Lista 7 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2017

1. Considere um oscilador harmônico 1D, com lagrangiana

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Seja $S_c = S_c(q_1, q_2, t_1, t_2)$ a ação calculada no caminho clássico que começa em (t_1, q_1) e termina em (t_2, q_2).

(a) Mostre que

$$S_c = S_c(q_1, q_2, t_1, t_1 + \tau) = \frac{m\omega}{2\,\mathrm{sen}(\omega\tau)} \left[(q_1^2 + q_2^2)\cos(\omega\tau) - 2q_1 q_2 \right].$$

(b) Note que

$$\left| \frac{\partial^2 S_c}{\partial q_1 \partial q_2} \right| \to \infty$$

nos pontos focais, isto é, para $\tau = n(\text{período}/2) = \frac{n\pi}{\omega}$.

(c) Verifique, para este caso, as relações

$$\frac{\partial S_c}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial S_c}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial S_c}{\partial t_1} = H_1, \quad \frac{\partial S_c}{\partial t_2} = -H_2.$$

2. Ainda considerando o oscilador harmônico, exiba uma trajetória clássica que não é um mínimo local da ação. Mais explicitamente, exiba uma solução clássica $\gamma_c(t)$ e uma configuração perturbada $\gamma_p(t)$ que passe pelos mesmos pontos inicial e final de $\gamma_c(t)$ e tal que $S[\gamma_p] < S[\gamma_c]$. Fique à vontade para usar recursos computacionais.

3. Considere uma partícula de massa m sob a ação de um campo gravitacional constante, $V(q) = mgq$.

(a) Calcule a ação clássica reduzida $S^*_{cl} = S^*_{cl}(q, E)$ (*on-shell*).

(b) Mostre que $W = S^*_{cl}(q, E)$ satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo,

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + V(q) = E.$$

(Vimos que isso vale em geral; o objetivo do exercício é verificar isso explicitamente neste caso específico).

4. Considere uma hamiltoniana de um sistema 1D dependente do tempo $H(q,p,t)$. Vamos fazer um *upgrade* da variável t para uma nova coordenada, juntamente com seu momento generalizado correspondente p_t. Assim, a hamiltoniana nas novas variáveis fica independente do novo parâmetro de "tempo", que denotaremos por τ, e dada por $\bar{H} = \bar{H}(q,t,p,p_t) = H(q,p,t) + p_t$.

   (a) Escreva as novas equações de movimento para $\dot{q}, \dot{t}, \dot{p}$ e $\dot{p}_t$, onde agora o ponto denota derivada com relação a τ.

   (b) Interprete o novo parâmetro de "tempo" τ e p_t em termos da dinâmica original.

   (c) A nova hamiltoniana $\bar{H}$ é conservada, já que independe de τ. Que valor ela assume?