Lista 5 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2017

1. Considere novamente a lagrangiana para o problema de Kepler,

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{k}{r}.$$

Considere a transformação dada por $\vec{r} \to \vec{r}_s = \vec{r} + s\,\delta\vec{r}$ com

$$\delta\vec{r} = \frac{1}{k}\left[2(\vec{r}\cdot\hat{n})\dot{\vec{r}} - (\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\hat{n} - (\dot{\vec{r}}\cdot\hat{n})\vec{r}\right],$$

onde $\hat{n}$ é um versor fixo em $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que tal transformação é uma simetria do sistema, com

$$\delta_s L = \frac{dl}{dt}, \quad l = -2\hat{r}\cdot\hat{n}.$$

(b) Mostre que a constante de movimento resultante do teorema de Noether é, neste caso, a componente do vetor de Runge-Lenz $\vec{A}$ na direção de $\hat{n}$, isto é, $\vec{A}\cdot\hat{n}$.

2. Considere o campo de forças originado por um fio homogêneo, localizado sobre uma curva parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}(s) = (x(s), y(s), z(s))$. Suponha que um elemento de linha do fio, localizado na posição $\boldsymbol{r}_0$, contribui com um potencial da forma $dV = f(\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|)\,ds$ (força central). O potencial resultante em uma dado ponto $\boldsymbol{r}$ é desta forma dado por $V(\boldsymbol{r}) = \int f(\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|)\,ds$. Considere uma partícula teste sob a ação desse campo de força.

(a) Encontre três constantes do movimento se o fio é uma reta infinita localizada sobre o eixo z.

(b) Encontre duas constantes do movimento se o fio é uma hélice com eixo de simetria sobre o eixo z.

3. *Uma forma mais geral para o teorema de Noether:* Consideremos o caso em que a lagrangiana depende do tempo, $L = L(q, \dot{q}, t)$. Consideremos a transformação

$$q \to q' = q'(q, \dot{q}, t; s), \qquad t \to t' = t'(q, \dot{q}, t; s), \tag{1}$$

agindo em curvas $q(t)$ e tal que $q' = q$ e $t' = t$ quando $s = 0$. Para nós será suficiente considerar sua versão infinitesimal,

$$q \to q' = q + s\delta q + O(s^2), \qquad t \to t' = t + s\delta t + O(s^2), \tag{2}$$

com $\delta q = \delta q(q, \dot{q}, t)$ e $\delta t = \delta t(q, \dot{q}, t)$. Estamos interessados em transformações que preservam as equações de movimentodo sistema. Isso ocorre quando esta transformação leva extremos da ação $S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$ (quando mantemos os pontos inicial $q(t_1)$ e final $q(t_2)$ fixados) em extremos da ação $S[q'(t)] = \int_{t_1'}^{t_2'} L(q', \dot{q}', t')dt'$ (quando mantemos os pontos inicial $q'(t_1')$ e final $q'(t_2')$ fixados).

(a) Fazendo a mudança de variável $t_s \to t$ na integral da ação, mostre que

$$S'[q'(t)] - S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt} - L(q, \dot{q}, t) \right] dt.$$

Assim, as equações de movimento são preservadas se

$$L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt} - L(q, \dot{q}, t) = \frac{dF}{dt} \tag{3}$$

para alguma função $F = F(q, t; s)$. Ou, em sua versão infinitesimal,

$$L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt} - L(q, \dot{q}, t) = s \frac{df}{dt} + O(s^2), \tag{4}$$

onde $f(q, t) = \left. \frac{\partial F(q,t;s)}{\partial s} \right|_{s=0}$. Neste caso, dizemos que a transformação é uma simetria do sistema.

(b) Por outro lado, podemos expandir diretamente a expressão de $L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt}$ em s. Mostre que se $q(t)$ é solução das equações de movimento então

$$L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt} - L(q, \dot{q}, t) = s \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\delta q - \dot{q} \delta t) + L \delta t \right] + O(s^2).$$

(c) Combinando os resultados de (a) e (b) mostre que se a transformação é uma simetria do sistema então a quantidade

$$Q = p \delta q - E \delta t + f$$

é constante do movimento, onde $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ e $E = p\dot{q} - L$.

(d) Generalize para o caso de vários graus de liberdade, $q = (q^1, \ldots, q^k)$ e mostre que a quantidade conservada é, neste caso,

$$Q = p_i \delta q^i - E \delta t + f. \tag{5}$$

Na prática, dado um sistema lagrangiano e uma transformação como a acima, fazemos os seguintes passos para identificar uma possível quantidade conservada como a acima.

i. Calculamos $\delta_s L := \frac{d}{ds} \left[L' \frac{dt'}{dt} \right]_{s=0}$;

ii. Achamos, se possível (e isso só ocorre quando a transformação é de fato uma simetria), uma função $f(q,t)$ tal que $\delta_s L = \frac{df}{dt}$;

iii. Determinamos a quantidade conservada correspondente, dada por (5).

4. Use o exercício anterior para determinar, se possível, quantidades conservadas nos seguintes sistemas lagrangianos:

   (a) Uma partícula em um campo externo escalar produzido por uma onda plana se propagando na direção de $\vec{u}$,
   $$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r} - t\vec{u}).$$

   (b) Uma partícula em um potencial homogêneo, da forma $V(\alpha\vec{r}) = \alpha^n V(\vec{r})$. Dica: considere a transformação $\vec{r}' = \alpha\vec{r}$ e $t' = \beta t$ e explore.