Lista 4 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, setembro de 2017

1. Vimos que dado um poço de potencial em um sistema 1D pode-se achar o período das oscilações T, que é função da energia, pela fórmula

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \tag{1}$$

onde x_1 e x_2 são os pontos de retorno, dados pelas raízes de $E - V(x) = 0$.

Determine $T(E)$ para os potenciais abaixo:

(a) $V(x) = A|x|^n$, $A > 0$;

(b) $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$, $-V_0 < E < 0$;

(c) $V(x) = V_0 \operatorname{tg}^2(\alpha x)$, $V_0 > 0$.

2. O objetivo deste problema é mostrar que o conhecimento de $T(E)$ permite que se recupere o potencial $V(x)$. Considere que $V(x)$ tem seu mínimo em $x = 0$, com $V(0) = 0$, e que é um potencial par, sem outros pontos de mínimo ou máximo. Temos aqui um problema inverso em que queremos inverter (1) para achar $V(x)$ em termos de $T(E)$.

(a) Multiplique (1) por $\frac{1}{\sqrt{\alpha - E}}$ e integre ambos os lados em E de 0 a α para obter

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = 2\sqrt{2m} \int_0^\alpha dE \int_0^E dV \frac{dx}{dV} \frac{1}{\sqrt{\alpha - E}\sqrt{E - V}},$$

onde fizemos a mudança de variáveis $x = x(V)$ (para integrar em V);

(b) Troque a ordem de integração e integre em E para mostrar que

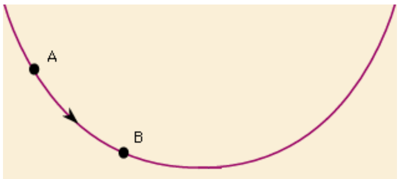
$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = 2\pi\sqrt{2m} \left[x(\alpha) - x(0)\right].$$

(c) Conclua que a $V(x)$ é dado implicitamente por

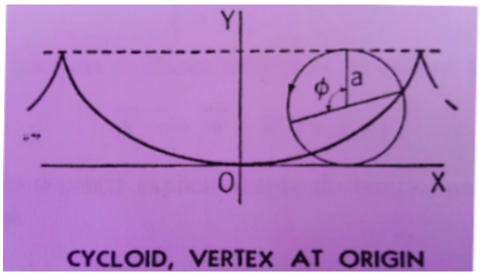
$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{T(E)dE}{\sqrt{V - E}}.$$

(d) Suponha que $T(E) = T_0$ é independente de E. Determine o potencial $V(x)$ correspondente. Interprete.

3. Uma partícula de massa m desliza sem atrito sobre uma rampa e sob a ação da gravidade, como na figura ao lado. Deduza a forma da curva que faz com que o período de oscilação independa da energia.



4. Uma conta de de massa m escorrega por um fio sem atrito. A curva do fio tem a forma de uma cicloide, como mostra a figura abaixo.



CYCLOID, VERTEX AT ORIGIN

$$\begin{cases} x = a(\phi + \operatorname{sen}\phi) \\ y = a(1 - \cos\phi) \end{cases}$$

com $-\pi < \phi < \pi$

   (a) Considere o sistema sob a ação da gravidade (na direção de $-\hat{y}$). Encontre a lagrangiana e escreva as equações de movimento (considere o zero do potencial no vértice da cicloide).

   (b) O movimento da coordenada ϕ é oscilatório. Encontre o período correspondente. Dica: utilize a integral da energia (quadratura).

   (c) Mostre que a variável $\eta = \operatorname{sen}\phi/2$ realiza movimento harmônico simples e integre a equação de movimento.

   (d) Interprete seu resultado levando em conta o exercício anterior.

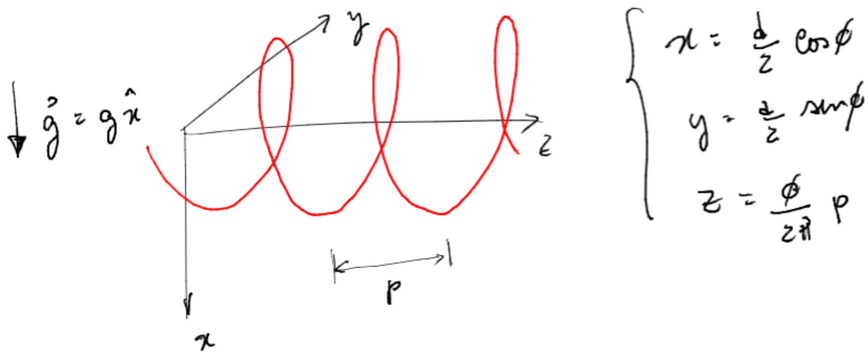
5. Uma conta de massa m se move sem atrito em um arame em forma de hélice com eixo de simetria na horizontal, sem massa, e sujeita a um campo gravitacional uniforme com aceleração vertical g. A hélice tem diâmetro d e passo p (veja figura abaixo).

   (a) Escreva a lagrangiana do sistema e ache suas equações de movimento.

   (b) Ache a hamiltoniana do sistema e a compare com a energia total. Ela é conservada?

   (c) Determine os pontos de equilíbrio do sistema e os classifique (estável/instável). Determine a frequência para pequenas oscilações perto dos pontos de equilíbrio estáveis.

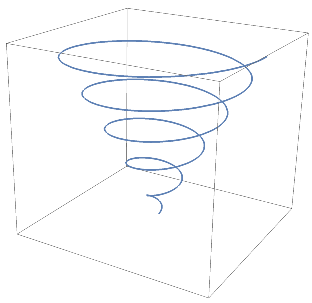
6. Considere um sistema análogo ao do exercício anterior, mas agora suponha que o corpo possua uma carga elétrica q e que exista um campo elétrico constante E orientado paralelamente ao eixo de simetria da hélice.



(a) Repita o exercício anterior para este caso, discutindo os casos de campo fraco e forte (calcule a frequência de pequenas oscilações apenas no regime de campo fraco).

(b) Resolva explicitamente as equações de movimento com as condições iniciais em que a partícula parte do repouso em um dos pontos mais baixos da hélice. Interprete fisicamente.

(c) O que muda se ao invés de o corpo possuir carga elétrica, a hélice como um todo for submetida (por um agente externo qualquer) a uma aceleração constante a orientada paralelamente a seu eixo de simetria?

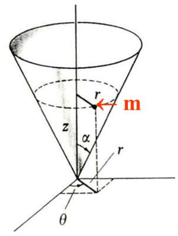


7. Considere uma partícula de massa m se movendo sem atrito e sob a ação da gravidade em uma espiral cônica, como mostra a figura acima. O cone que contém a espiral tem ângulo de abertura 2α, eixo de simetria z e vértice na origem.

   (a) Encontre as equação de movimento da partícula se a espiral roda em torno do eixo de simetria com velocidade angular constante ω.

   (b) Para qual valor de ω a partícula permanece sempre em uma mesma altura z_0?

8. Considere uma partícula de massa m se movendo sobre um cone, sem atrito e sob a ação da gravidade, como mostra a figura abaixo. O cone tem ângulo de abertura 2α, eixo de simetria z e vértice na origem. Sejam r e θ dados pelas coordenadas cilíndricas usuais.



   (a) Ache as equações de movimento para $r(t)$ e $\theta(t)$.
   (b) Mostre que existem soluções onde $r(t) = r_0$, r_0 constante. Qual é a frequência ω correspondente neste caso?
   (c) Esta órbita é estável? Se sim, qual é a frequência Ω para pequenas oscilações em torno do raio r_0?
   (d) Sob que condições temos $\Omega = \omega$?

9. Considere uma partícula de referência de massa m caindo do repouso de uma altura R sob a ação da força de Kepler. Agora considere um haltere formado por duas partículas, de massa $m/2$ cada, presas entre si por uma barra sem massa de comprimento l.

   (a) Deixe esse haltere cair do repouso com altura inicial de seu centro de massa sendo também R (veja a figura abaixo à esquerda). Quem cai mais rápido, o haltere ou a partícula de referência?
   (b) Suponha agora que $l = l(t)$ depende do tempo e que inicialmente o haltere está fechado ($l(0) = 0$), se abre até um tamanho final L, e então novamente se fecha, levando para completar esse ciclo um tempo T. Assim, tanto em $t = 0$ quanto em $t = T$ o haltere é nada mais que uma partícula de massa total m (veja a figura abaixo à direita). Quem cai mais rápido, a partícula que se dividiu e se juntou ou a partícula de referência?

Exercício Extra:

Nosso objetivo aqui é resolver quantitativamente o exercício anterior, calculando a diferença entre as alturas do haltere oscilante e da partícula de referência ao final de um ciclo. Trabalhando sempre na ordem mais baixa possível de L e T que capture o efeito acima, mostre que

$$\delta r \approx -K\,\frac{L^2T^2}{R^4},$$

onde a constante positiva K depende de G (constante da gravitação universal), M (massa central, que gera o campo) e de uma integral adimensional envolvendo $l(t)$.