Questão 1: *O espaço dual.* Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. O *espaço dual* a V é definido como o espaço vetorial das funções lineares de V em $\mathbb{R}$ (funcionais lineares), munido com as operações usuais. Usualmente, é denotado por V^*

a) Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V. Mostre que o conjunto de funcionais lineares $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ tais que $\theta^j(e_i) = \delta^i_j$ constitue uma base para V^*. Tal base é conhecida como *base dual.*

b) Como $\dim V = \dim V^*$, tais espaços vetoriais são isomorfos. Entretanto, esse isomorfimo não é natural, isto é, depende da escolha de base. Convença-se disso.

c) Agora, suponha que V possui um produto interno $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Prove o teorema da representação de Riesz: dado $f \in V^*$, existe um único $v_f \in V$ tal que $f(v) = g(v_f, v)$.

d) Utilize o resultado do item anterior para construir um isomorfismo natural entre V e V^*.

e) Sejam $\Lambda : V \to V^*$ o isomorfismo que você construiu no item anterior e Λ^{-1} o isomorfismo inverso. Para $v \in V$, escreva $\Lambda(v) = v^\flat$; se $\omega \in V^*$, escreva $\Lambda^{-1}(\omega) = \omega^\sharp$. Como a notação sugere, os isomorfismos Λ e Λ^{-1} são conhecidos como *isomorfismos musicais* (se você não entendeu isso, tudo bem; você não precisa entender de música para ser aprovado neste curso). Sejam v^i e ω_i as componentes de v e ω nas bases do item a), i.e, $v = v^i e_i$ e $\omega = \omega_i \theta^i$. Mostre que

$$(v^\flat)_i = g_{ij} v^j$$

e

$$(\omega^\sharp)^i = g^{ij} \omega_j,$$

onde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. O que significam os elementos g^{ij}?

Questão 2: *Produto tensorial de espaços vetoriais.* Sejam V e W dois espaços vetoriais reais de dimensão n e m, respectivamente. Suponha que exista uma transformação bilinear $T : V \times W \to E$, onde E é um espaço vetorial. Iremos chamar tal transformação de *produto tensorial* e denotá-la por $T(v, w) = v \otimes w$. Se $\{e_i\}$ e $\{\omega_i\}$ são bases de V e W, suponha que os elementos da forma $e_i \otimes \omega_j$ formam uma base para E. Então, E é um espaço vetorial de dimensão mn, chamado de *produto tensorial* dos espaços V e W e denotado por $E = V \otimes W$.

a) Considere transformações lineares $f : V \to F$ e $g : W \to H$, onde F e H são dois espaços vetoriais reais de dimensão finita. Utilize estas aplicações para construir uma transformação linear $f \otimes g : V \otimes W \to F \otimes H$. (Dica: Deixe a notação lhe guiar!)

b) A partir de agora, suponha que $W = V^*$ e que V possui um produto interno $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Mostre que $V \otimes V^*$ é naturalmente isomorfo ao espaço $L(V)$ das transformações lineares de V em V.

c) De modo análogo ao item b), argumente que o espaço $V^* \otimes V^*$ pode ser identificado naturalmente com o espaço das aplicações bilineares de V em $\mathbb{R}$. O que pode ser dito sobre $V \otimes V$?

Questão 3: *Tensores em espaços vetoriais.* Seja V um espaço vetorial real de dimensão n e V^* o seu dual. Um tensor do tipo (r, s) em V é um elemento do espaço vetorial

$$T^r_s(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s}.$$

a) Convença-se de que $T^r_s(V)$ é naturalmente isomorfo ao espaço das aplicações multilineares de r cópias de V^* e s cópias de V em $\mathbb{R}$.

b) Generalize o item e) da questão 1 para tensores do tipo (r, s).

c) Utilizando a linguagem desta questão, exiba as operações entre tensores dadas em aula. Em particular, mostre como a contração pode ser definida em termos de aplicações entre espaços vetoriais. Por exemplo, se $T = T^{ij}{}_k \, e_i \otimes e_j \otimes \theta^j$, descreva o tensor cujas componentes são $T^{ij}{}_j$ em termos de uma aplicação de $V \otimes V \otimes V^*$ em V. Generalize para tensores de tipo qualquer.

A crash course on Differential Geometry of surfaces

Nos próximos exercícios, M sempre denotará uma variedade bidimensional imersa em $\mathbb{R}^3$ com métrica induzida g e conexão de Levi-Civita ∇. A métrica do espaço ambiante também será denotada por g. A conexão euclidiana, entretanto, será denotada por $\bar{\nabla}$.

Questão 4: *O mapa de Weingarten (shape operator).*

Para cada $p \in M$, suponha que N_p seja um vetor unitário normal a M, isto é, $g(N_p, V_p) = 0, \; \forall \; V_p \in T_pM$. Observe que dada uma parametrização local $\Sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ em torno do ponto p, sempre conseguimos determinar N em uma vizinhança do mesmo em M considerando $N = \hat{N} \circ \Sigma^{-1}$, com

$$\hat{N} = \frac{\partial_1 \Sigma \times \partial_2 \Sigma}{||\partial_1 \Sigma \times \partial_2 \Sigma||}. \tag{1}$$

Na prática, confundiremos N com $\hat{N}$. Abusos de notação são mais do que bem-vindos em geometria!

a) Mostre que para cada $V \in T_pM$ temos $\bar{\nabla}_V N \in T_pM$

b) O mapa de Weingarten é uma aplicação $L : T_pM \to T_pM$ definida por

$$L(V) = -\bar{\nabla}_V N. \tag{2}$$

Mostre que L é uma aplicação linear.

c) Considere coordenadas locais (x^i) com base coordenada associada $\{e_i\}$. Se $L(e_j) = L^i{}_j e_i$, mostre que

$$\partial_j N = -L^i{}_j e_i. \tag{3}$$

Estas são as chamadas *equações de Weingarten*.

d) Descreva L nos seguintes casos: (i) M é um plano em $\mathbb{R}^3$; (ii) M é a esfera de raio a.

Questão 5: *A segunda forma fundamental.*

A segunda forma fundamental de M é a forma bilinear $\Pi : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Pi(X, Y) = g(L(X), Y). \tag{4}$$

a) Descreva a segunda forma fundamental de um plano e de uma esfera.

b) Defina $\Pi_{ij} = \Pi(e_i, e_j)$. Mostre que

$$\Pi_{ij} = g(N, \partial_i e_j). \tag{5}$$

Conclua que a segunda forma fundamental é simétrica.

c) Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ uma curva em M parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. Definimos a *curvatura normal* de α em $\alpha(s)$ por

$$\kappa_N(s) = g\left(\frac{d^2\alpha(s)}{ds^2}, N(s)\right). \tag{6}$$

Interprete esta definição.

Se $\alpha(0) = p$ e $\dfrac{d\alpha(0)}{ds} = X \in T_pM$, mostre que

$$\Pi(X, X) = \kappa_N(0). \tag{7}$$

Assim, concluímos que todas as curvas que passam pelo ponto p e têm vetor tangente X neste ponto apresentam a mesma curvatura normal. Nesse sentido, podemos dizer que $\Pi(X, X)$ mede a curvatura normal na direção de X.

d) Fixados $X, N \in T_pM$, considere o plano gerado por estes vetores. Observe que tal plano intercepta a superfície M segundo uma curva β, a qual chamaremos de *secção normal* de M em p na direção de X. Se κ denota a curvatura de β, mostre que

$$\kappa_N = \pm\kappa. \tag{8}$$

Questão 6: *Curvaturas principais.*

Dado um ponto $p \in M$, considere todos os vetores $X \in T_pM$ com $g(X, X)$=1. Definimos as *curvaturas principais* de M em p como o menor e o maior valor de $\Pi(X, X)$. Iremos denotá-las por κ_1 e κ_2, respectivamente. Um fato assaz interessante é que tais quantidades são os autovalores do mapa de Weingarten! Vamos provar isso.

a) Mostre que L é um operador auto-adjunto.

b) Prove ou aceite o seguinte resultado: Seja V um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno g. Dada uma forma quadrática Q em V (i.e., existe uma aplicação bilinear simétrica $B : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $Q(V) = B(V, V)$), existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ tal que se $V = xe_1 + ye_2$, então

$$Q(V) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2, \tag{9}$$

onde $\lambda_1 = max\{Q(V) : g(V, V) = 1\}$ e $\lambda_2 = min\{Q(V) : g(V, V) = 1\}$. (Dica: Existe uma prova deste resultado no livro de GD do Manfredo).

c) Utilizando o resultado do item anterior, prove que se $T : V \to V$ é um operador linear auto-adjunto, então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que $T(e_1) = \lambda_1 e_1$ e $T(e_2) = \lambda_2 e_2$. Além disso, temos

$$\lambda_1 = max\{g(T(V), V) : g(V, V) = 1\} \tag{10}$$

e

$$\lambda_2 = min\{g(T(V), V) : g(V, V) = 1\} \tag{11}$$

d) Conclua que as curvaturas principais são de fato os autovalores do mapa de Weingarten. Uma vez que o traço e o determinante de um operador são invariantes de base, eles merecem atenção especial. No caso de L, temos

$$det(L) = \kappa_1 \kappa_2, \tag{12}$$

$$Tr(L) = \kappa_1 + \kappa_2. \tag{13}$$

A primeita quantidade é a famosíssima *curvatura gaussiana*. Na próxima questão, iremos mostrar que ela é de fato uma quantidade intrínseca. Já o traço de L é a chamada *curvatura média*. Argumente por que esta última claramente não é uma quantidade intrínseca.

e) Usando o que temos até agora, calcule a curvatura gaussiana de uma esfera de raio a.

Questão 7: *O Teorema Egregium de Gauss.*

a) Seja K a curvatura gaussiana de M (que pode variar ponto a ponto, obviamente). Utilizando a relação do mapa de Weingarten com a segunda forma fundamental, mostre que

$$K = \frac{\Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \tag{14}$$

b) Utilizando o item *b)* da questão 5, mostre que

$$\partial_j e_i = {\Gamma_{ij}}^k e_j + \Pi_{ij} N, \tag{15}$$

onde N é o mesmo campo normal que aparece nos exercícios anteriores. Tal expressão é geralmente chamada de *fórmula de Gauss*.

Dica: Para cada $p \in M$, sempre podemos descrever $T_p\mathbb{R}^3$ como a soma direta $T_p\mathbb{R}^3 = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$, onde o complemento ortogonal $(T_pM)^\perp$ é simplesmente o subespaço gerado por N_p.

c) Tomando as derivadas da fórmula de Gauss e utilizando as equações de Weingarten, mostre que

$$\partial_k\partial_j e_i = (\partial_k {\Gamma_{ij}}^m + {\Gamma_{ij}}^l {\Gamma_{lk}}^m - \Pi_{ij} {L^m}_k) e_m + ({\Gamma_{ij}}^l \Pi_{lk} + \partial_k \Pi_{ij}) N. \tag{16}$$

d) Argumente que

$$\partial_k\partial_j e_i = \partial_j\partial_i e_k. \tag{17}$$

e) Utilizando a observação acima, prove a seguinte relação:

$$ {R_{ijk}}^m = \Pi_{ki} {L^m}_J - \Pi_{ij} {L^m}_k. \tag{18}$$

f) Prove o teorema egregium de Gauss:

$$K = \frac{R_{1212}}{det(g)}. \tag{19}$$

Discuta por que a equação acima é suficiente para garantir que a curvatura gaussiana é de fato uma quantidade intrínseca.