Assim, a equação da curva de Agnesi, escrita na forma paramétrica, é

$$x = \frac{a}{m} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{am^2}{1+m^2}$$

onde m é um parâmetro. A fim de escrever a equação da curva em termos das coordenadas, devemos eliminar o parâmetro m, de onde segue, a equação da curva em coordenadas cartesianas

$$y = \frac{a^3}{x^2+a^2}.$$

Enfim, uma outra maneira de parametrizar essa curva é introduzindo o ângulo θ, ângulo formado pela reta s e o eixo vertical, de onde podemos escrever

$$\begin{cases} x &= a\tan\theta \\ y &= a\cos^2\theta \end{cases}$$

bem como, na seguinte forma

$$\begin{cases} x &= a\cot\beta \\ y &= a\,\mathrm{sen}^2\,\beta \end{cases}$$

sendo, agora, β o ângulo formado pela reta s e o eixo horizontal. A área delimitada pela curva de Agnesi e a sua assíntota $y = 0$ é igual a πa^2 unidades de área, isto é, π vezes o diâmetro da circunferência ao quadrado. Esse resultado será mostrado no Capítulo 9.

Diferentemente dos cinco capítulos anteriores onde os exercícios estavam direcionados para o conteúdo discutido, aqui, além de exercícios específicos sobre funções, apresentamos, também, exercícios relativos aos capítulos anteriores, uma particular forma de revisar o conteúdo já discutido.

6.9 Exercícios

1. Sejam $\mathsf{f}_1(x) = x+1$ e $\mathsf{f}_2(x) = \sqrt{x-1}$. Pede-se: a) O domínio de f_1 e f_2. b) O domínio de $\mathsf{f}_1 \diamond \mathsf{f}_2(x)$ onde $\diamond$ representa a adição, subtração, multiplicação e divisão, quando devidamente definidas.

2. Sejam as funções $\mathsf{f}(x) = \sqrt{x}$ e $\mathsf{g}(x) = x^2+1$. Encontre os domínios e obtenha as funções compostas $\mathsf{f} \circ \mathsf{g}$ e $\mathsf{g} \circ \mathsf{f}$.

3. (Unicamp-98) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$3,44 e cada quilômetro rodado custa R$0,86, calcule: a) o preço de uma corrida de 11 km; b) a distância percorrida por um passageiro que pagou R$21,50 pela corrida.

4. Num estacionamento para automóveis, o preço por período (por exemplo, quatro horas) de estacionamento é R$20,00. A esse preço estacionam 50 automóveis por dia. Se o preço cobrado for R$15,00, estacionarão 75 automóveis. Admitindo que esta demanda possa ser representada por uma função afim, determine-a.

5. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e as funções $\mathsf{f}_1(x) = x^2+1$ e $\mathsf{f}_2(x) = \sqrt{x-1}$. Pede-se calcular: a) $\mathsf{f}_1 \circ \mathsf{f}_2$ e b) $\mathsf{f}_2 \circ \mathsf{f}_1$, se definidas. Explicite os respectivos domínios.

6. Sejam $a \in \mathbb{R}^*$ e $m \in \mathbb{R}$. O gráfico da função quadrática $\mathsf{f}(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola com foco em $F(m, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta $y = -1/4a$. É claro que podemos proceder como no EXEMPLO 6.19, isto é, a partir da defincão de parábola. Aqui, é conveniente observar que o gráfico de $\mathsf{f}(x) = a(x-m)^2$ pode ser obtido do gráfico $\mathsf{g}(x) = ax^2$ por uma translação horizontal $(x,y) \mapsto (x+m,y)$ que leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$. Esboçar o gráfico da função $\mathsf{f}(x) = a(x-m)^2$.

7. Sejam $a, m, k \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. O gráfico da função quadrática $\mathsf{f}(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F(m, k+1/4a)$ e cuja diretriz é a reta $y = k - 1/4a$. Conclusão análoga ao anterior acrescida de uma translação vertical $(x,y) \mapsto (x, y+k)$ ou ainda a partir de uma translação horizontal e uma outra vertical, a partir do EXEMPLO 6.19, isto é, $(x,y) \mapsto (x+m, y+k)$. Esboçar o gráfico da função $\mathsf{f}(x) = a(x-m)^2 + k$.

8. Seja $y = ax^2 + bx + c$ com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$. Submete-se esta parábola à translação horizontal $(x,y) \mapsto (x+m,y)$ onde m é a soma das raízes da correspondente equação, de modo a obter uma nova parábola, cujo vértice tem abscissa igual a zero, isto é, está sobre o eixo Oy, mostre que

$$\mathsf{g}(x) = \mathsf{f}(x-m) = ax^2 + k$$

onde $k = -\Delta/4a$.

9. Utilizando os dados do exercício anterior, efetue uma translação vertical, isto é, $(x,y) \mapsto (x, y-k)$ de modo a obter uma nova parábola cujo vértice coincide com a origem, isto é, mostre que

$$\mathsf{h}(x) = \mathsf{g}(x) - k = ax^2.$$

Dos dois exercícios anteriores concluímos: *A parábola, gráfico da função* $\mathsf{f}(x) = ax^2 + bx + c$ *é levada na parábola, gráfico da função*, $\mathsf{h}(x) = ax^2$ *mediante uma translação horizontal seguida de uma translação vertical*. Estas duas parábolas são chamadas congruentes.

10. Mostre que a reflexão em torno do eixo horizontal, isto é, a transformação $(x,y) \mapsto (x, -y)$ leva o gráfico de $\mathsf{f}(x) = -ax^2$ no gráfico de $\mathsf{g}(x) = ax^2$.

11. Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere as equações

$$\text{a)} \quad x^2 + 5x + 10 = 0 \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad 3x^2 + x - 10 = 0.$$

(a) Escreva a soma e o produto das raízes e (b) Completando o quadrado, determine as raízes reais.

12. Dada a função $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\mathsf{f}(x) = x^2/8 - x/2 - 3/2$ pede-se: a) Conjunto imagem; b) Esboçar um gráfico de $\mathsf{f}(x) \times x$; c) Coordenadas do foco e d) Equação da reta diretriz.

13. Seja $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\mathsf{f}(x) = 3x^2 + x - 10$. Mostre que $\mathsf{g}(x) = \mathsf{f}(x+h) - \mathsf{f}(x)$ é uma função afim.

14. Seja $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\mathsf{f}(x) = 3x^2 - 16$. Escreva a equação da reta tangente passando pelo ponto $P(2, -4)$ bem como aquela passando pelo ponto $Q(-2, -4)$.

15. Com os dados do exercício anterior, esboce, num mesmo sistema de eixos, um gráfico da parábola e das duas tangentes. Determine o ângulo formado por estas duas tangentes.

16. Dê o conjunto solução para as inequações

$$\text{a)}\quad \frac{x^2+5x+10}{x^2-x-6} \leq 0 \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad (3x^2+x-10)(-x^2+5x-4) \geq 0.$$

17. Com L metros de cerca um fazendeiro deseja circundar um galpão retangular junto a um muro a fim de confinar animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

18. Sejam x e y reais tais que $2x+3y=12$. Determine o valor mínimo de $z=x^2+9y^2$.

19. Seja $n \in \mathbb{N}$. Qual é o máximo valor de $-n^2+17n$?

20. Seja $\mathsf{f}(x)=x^n$ com $n \in \mathbb{Z}$. Define-se a derivada (derivada de ordem um) de $\mathsf{f}(x)$, denotada por $\mathsf{f}'(x)=nx^{n-1}$. a) Considere o polinômio $\mathsf{p}(x)=ax^2+bx+c$ com $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Mostre que se $\mathsf{p}(x_0)=0$ então $\mathsf{p}'(x_0) \neq 0$. b) Analogamente para $\mathsf{p}(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Mostre que se $\mathsf{p}(x_0)=0$ e $\mathsf{p}'(x_0)=0$ então $\mathsf{p}''(x_0) \neq 0$ onde $\mathsf{p}''(x)$ é a derivada de ordem dois.

21. Esboçar o gráfico para

$$\text{a)}\quad \mathsf{f}(x) = -\frac{2}{x} \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \mathsf{f}(x)=\frac{1}{x-1}$$

apresentando os conjuntos domínio e imagem.

22. Análogo ao anterior para a função

$$\mathsf{f}(x)=\frac{x-3}{x-1}.$$

23. A cidade de Campinas tem hoje, aproximadamente, 1.000.000 de habitantes. Admita que esse número cresça a uma taxa de 2% ao ano. Pede-se: a) O número de habitantes daqui a um ano; b) Se daqui a 10 anos o número de habitantes for igual a 1.500.000, qual teria sido a taxa de crescimento; c) Qual deve ser a taxa para que a população duplique em 10 anos?

24. Uma particular peça de um equipamento sofre, com o uso, uma depreciação que pode ser caracterizada como tipo exponencial de tal forma que seu valor, daqui a t anos, seja dado por

$$D(t)=200\cdot 2^{-2t}.$$

a) Qual seu valor hoje, em reais?; b) Qual será a depreciação após 5 anos?; c) Esboce um gráfico de $D \times t$.

25. Um carro zero quilômetro deprecia 20% no primeiro ano; 18% no segundo ano, e 16% ao ano do terceiro ano em diante. a) Se uma pessoa comprou esse carro com 2 anos de uso pagando R$10.000,00 qual seu valor quando era zero quilômetro; b) Nas condições do item anterior, qual o valor do carro daqui a t $(t \geq 2)$ anos?

26. Um indivíduo começa a trabalhar e resolve fazer, de imediato, uma poupança privada a fim de receber uma quantia complementar mensal após a aposentadoria. Para tal, todo mês, a partir do primeiro mês, deposita C_0 reais em uma aplicação que rende juros compostos de 0,4% ao

mês. Efetua 420 depósitos, correspondentes aos 35 anos de trabalho. Todo este esforço é para constituir uma poupança da qual possa sacar R$2.000,00 por mês durante 180 meses, sendo a primeira retirada um mês após o último depósito. a) Qual a poupança que ele deverá constituir logo após o último depósito? e b) Qual o valor do depósito mensal?

27. Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboçar o gráfico para:

$$\text{a)} \quad \mathsf{f}_1(x) = 2^x, \qquad \text{b)} \quad \mathsf{f}_2(x) = 2^{-x}, \qquad \text{c)} \quad \mathsf{f}_3(x) = 3^x$$

28. Resolver as equações exponenciais

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0 & \text{b)} & 9^x - 6 \cdot 3^x + 5 = 0 \\ \text{c)} & 2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x + 3 = 0 & \text{d)} & 3^{x-1} = 7^{x-1} \end{array}$$

29. Resolver as inequações exponenciais

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & 2^{2x} > 1 & \text{b)} & 2^{-x} > 4 \\ \text{c)} & 3^{(2-x)(x+2)} \leq \frac{1}{27} & \text{d)} & \sqrt[x]{2} \geq (64)^x \end{array}$$

30. Esboçar, num mesmo sistema de eixos, o gráfico associado às duas funções $\mathsf{f}(x) = \log_2 x$ e $\mathsf{f}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

31. Seja $x \in \mathbb{R}$. Determinar o conjunto solução para as seguintes desigualdades

$$\text{a)} \quad \log x > 2 - \log 2x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \log_x (2x - 1) > 2.$$

32. Considere $a > 1$. Esboçar num mesmo sistema de eixos o gráfico associado às funções $\mathsf{f}(x) = \log_a x$ e $\mathsf{f}(x) = a^x$.

33. Análogo ao anterior no caso em que $0 < a < 1$.

34. Mostre que $\mathsf{L} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva.

35. Mostre que $\mathsf{L}(1) = 0$.

36. Mostre que: Números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.

37. Mostre que para todo $x > 0$ tem-se $\mathsf{L}(1/x) = -\mathsf{L}(x)$.

38. Mostre que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$ vale

$$\mathsf{L}(x/y) = \mathsf{L}(x) - \mathsf{L}(y).$$

39. Dadas as funções $\mathsf{L}, \mathsf{M} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $\mathsf{M}(x) = c\,\mathsf{L}(x)$ para todo $x > 0$ [12]. Admita as condições de validade da definição dos logaritmos para mostrar que

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

conhecida como a expressão de mudança de base. Esta relação assegura que duas funções logarítmicas quaisquer diferem apenas por um fator constante.

40. Utilize o gráfico da hipérbole equilátera a fim de verificar a dupla desigualdade

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

41. Utilizando a circunferência trigonométrica, verifique a identidade (relação fundamental da trigonometria) $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.

42. Análogo ao EXEMPLO 6.25 no intervalo $(-\pi, \pi)$.

43. Esboçar os gráficos para

$$\text{a)} \quad y = \tan x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad y = \arctan x$$

44. Seja $y = ax + b$ a equação de uma reta não vertical. Mostre que $a = \tan \alpha$ onde α é o ângulo que o semieixo positivo $\overrightarrow{Ox}$ forma com esta reta.

45. Mostre as relações

$$\text{a)} \quad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

46. Esboçar um gráfico, no intervalo aberto $(0, 2\pi)$, para as funções

$$\text{a)} \quad y = \cot x, \qquad \text{b)} \quad y = \sec x, \qquad \text{c)} \quad y = \csc x$$

explicitando os respectivos conjuntos domínio e imagem.

Os exercícios a seguir foram, com algumas modificações, retirados da referência [6].

47. Sabendo que $\tan \alpha = 3$ e $0 < \alpha < \pi/2$, calcule: a) $\operatorname{sen} \alpha$ e b) $\cos \alpha$.

48. Um triângulo retângulo tem hipotenusa 1 e perímetro $1 + \sqrt{6}/2$. Qual é a medida do menor de seus ângulos?

49. Sabendo que

$$\begin{array}{rcl} a \sec x & = & 1 + \tan x \\ b \sec x & = & 1 - \tan x \end{array}$$

encontre uma relação entre a e b.

50. Mostre que $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A$.

51. Calcule a) $\operatorname{sen} 3\pi/4$ e b) $\cos \pi/12$.

52. Mostre que $\tan 40° + \tan 20° = 4\sqrt{3} \operatorname{sen} 10°$

53. Resolva a equação $\sqrt{3} \operatorname{sen} x = 1 + \cos x$.

54. Para determinar a distância entre dois pontos A e B situados além de um rio, marcaram-se dois pontos C e D aquém do rio e mediram-se os ângulos $A\widehat{C}B = 35°$, $B\widehat{C}D = 20°$, $A\widehat{D}C = 18°$, $A\widehat{D}B = 41°$ e a distância $\overline{CD} = 320$ metros. Calcular a distância $\overline{AB}$.

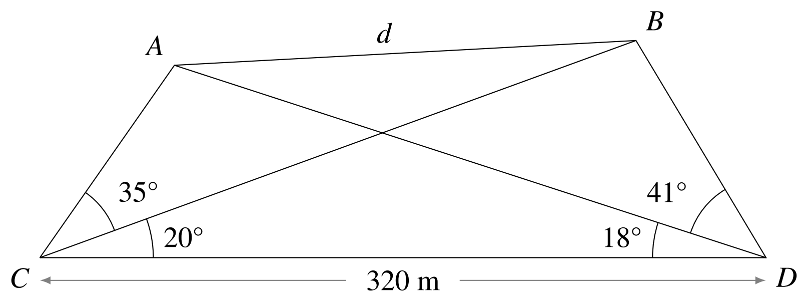

Figura 6.17: Figura relativa ao Exercício 54.

55. Resolva a inequação $\cos x + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x \leq 1$.

56. Considere a função
$$y = -3\,\mathrm{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 1.$$
Esboçar o gráfico desta função a partir dos gráficos da sequência abaixo.

    a) $y = \mathrm{sen}\, 2x$ que possui período π.

    b) Translação horizontal de $\pi/6$
$$y = \mathrm{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

    c) Dilatação vertical
$$y = 3\,\mathrm{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

    d) Simetria em relação ao eixo horizontal x
$$y = -3\,\mathrm{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

    e) Translação vertical
$$y = -3\,\mathrm{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 1.$$

57. A partir do EXEMPLO 6.28 e das fórmula do arco duplo, mostre que $\beta = 2\alpha$.

58. A partir do EXEMPLO 6.28, expresse $\sec\alpha$ e $\csc\alpha$ em termos de $t = \tan(\alpha/2)$.

59. Mostre que: A área de um triângulo qualquer é igual ao semiproduto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo por eles formado.

60. Calcule a área de um triângulo cujo ângulo formado por dois lados de 10 cm e 12 cm é igual a $\pi/12$ rad.

61. Mostre que: A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do correspondente ângulo central.

62. Mostre que, em todo triângulo retângulo, vale: o produto da altura pela hipotenusa é igual ao produto dos catetos.

63. Mostre que a área de um triângulo, denotada por A, de lados a, b, c pode ser escrita na forma, conhecida pelo nome de fórmula de Heron

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde p é o semiperímetro.

64. (Translação horizontal.) Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboce, no mesmo sistema de eixos, o gráfico para as funções $y_-(x) = (x+1)^2$, $y(x) = x^2$ e $y_+(x) = (x-1)^2$.

65. (Deslocamento vertical.) Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboce, num mesmo sistema de eixos, o gráfico para as funções $y^-(x) = x^2 - 1$, $y(x) = x^2$ e $y^+(x) = x^2 + 1$.

66. Explicitar as frações a seguir como soma de frações (parciais):

$$\text{a)} \quad \frac{1}{x(x^2+3x+2)} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

67. Explicitar as frações a seguir como soma de frações (parciais):

$$\text{a)} \quad \frac{x}{x^2+2x-3}, \qquad \text{b)} \quad \frac{x^2-x}{(x-1)(x+5)(x-3)}, \qquad \text{c)} \quad \frac{x^3}{x^2-1}.$$

68. Dados os conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{0,3,8,15,17,24,26\}$ e a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Determine o domínio, o contradomínio e a imagem de f.

69. Explicitar as frações a seguir como soma de frações (parciais):

    (a) $\dfrac{4}{x(x-1)^2}$

    (b) $\dfrac{4x+1}{3x^2-4x+1}$

70. Dê o domínio para

$$\text{a)} \quad f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad g(x) = \frac{|x-1|}{x-1}.$$

71. Considere a função $f(x) = |x-1| + |x-2|$. a) Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x < 2. \\ 2x-3 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

b) Esboce o gráfico de $f(x) \times x$.

72. (Unicamp/2015) Seja $a \in \mathbb{R}_+$ e considere as funções afins $f(x) = ax + 3a$ e $g(x) = 9 - 2x$, definidas para todo número real x. a) Encontre o número de soluções inteiras da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ e b) Encontre o valor de a tal que $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo real x.

73. (UFU/Adaptado) Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $g(x) = \dfrac{x+4}{5}$ e $f(x) = \dfrac{x-5}{x}$, com $x \neq 0$. Determine a função $[f^{-1} \circ (g \circ f)](x)$.

74. Seja $\{x \in \mathbb{R} : x > -5/3\}$. Determine a inversa da função $y = 2\log_2(3x+5)$.

75. Seja $a \neq 1$ e positivo. Qual é o domínio da função $y(x) = \log_a(x^2 - 2x - 3)$?

76. Mostre que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

77. (ITA/1991-Adaptado) Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}\cdot$$

Determine a função inversa de $f(x)$.

78. (ITA/2017-Adaptado) Sejam

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R} : y \geq ||x| - 1|\} \\ S_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + (y+1)^2 \leq 25. \end{aligned}$$

Determine a área delimitada pela região $S_1 \cap S_2$.

79. Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x \qquad \text{e} \qquad e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x\cdot$$

80. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y\cdot$$

81. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y\cdot$$

82. Utilizando os dois exercícios anteriores, mostre que

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \text{e} \qquad \cosh 2x = \cosh^2 + \operatorname{senh}^2 x\cdot$$

83. Mostre as relações entre as funções trigonométrica e hiperbólica

$$\text{a)} \quad \operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \cosh iz = \cos z\cdot$$

84. Mostre o resultado $\tanh iz = i \tan z$.

85. Sabendo que $\tanh x = \operatorname{senh} x / \cosh x$ e que $\tanh x = 3/5$, calcular: a) $\operatorname{senh} x$ e b) $\cosh x$.