Nome: ______________________________ RA: ____________________

Métodos Matemáticos I (F520/MS550) - Exame

14 de julho de 2014

Resolva quatro questões dentre as seis questões apresentadas abaixo.

1. (2,5 pontos) Considere o sistema de coordenadas curvilíneas paraboloidais, dado por

$$x = uv\cos\phi, \qquad y = uv\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad z = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right).$$

   (a) Mostre que tais coordenadas são ortogonais;

   (b) Ache a solução mais geral da equação de Laplace, $\nabla^2\psi = 0$, em que $\psi = \psi(u)$ é uma função apenas de u.

2. (2,5 pontos) Considere a equação diferencial

$$x(x+1)y'' + y' = 0$$

   Vemos imediatamente que $y_1(x) = 1$ é uma solução desta equação diferencial. Utilize o método de Frobenius para encontrar uma segunda solução $y_2(x)$ linearmente independente.

3. (2,5 pontos) Considere a equação diferencial

$$x\,y''(x) + y'(x) = f(x),$$

   sujeita às condições de contorno $y(0)$ finito e $y(1) = 0$.

   (a) Ache a função de Green para tal problema.

   (b) Resolva este problema para $f(x) = 1$ usando o método da função de Green.

4. Considere a equação diferencial $y'' + 2y' + \lambda y = 0$ no intervalo $[0, 1]$.

   (a) Determine os autovalores e autofunções correspondentes para o problema de Sturm-Liouville associado à EDO acima sujeita às condições de contorno $y(0) = y(1) = 0$.

   (b) Escreva a condição de ortogonalidade entre essas autofunções.

5. (2,5 pontos) Seja P_n o n-ésimo polinômio de Legendre. Calcule $P_n(0)$. Dica: use a função geratriz $g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$.

6. (2,5 pontos) Considere uma função infinitamente diferenciável $\phi(x)$ com integral $c = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx$ não nula. Seja

$$\phi_n(x) = \frac{1}{c}n\phi(nx).$$

   Mostre que $\{\phi_n\}$ é uma seqüência delta. Dê um exemplo de aplicação deste resultado.

Fórmulas possivelmente úteis:

1. $\int \ln(u)du = u\ln(u) - u + \text{cte},$

2. $(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \cdots,$

3.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\psi &= \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\hat{\boldsymbol{q}}_i \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2)\right] \\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\boldsymbol{q}}_1 & h_2\hat{\boldsymbol{q}}_2 & h_3\hat{\boldsymbol{q}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

coord. curvilíneas ortogonais