Lista 6 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, novembro de 2018

Notação: nesta lista usaremos a seguinte convenção para os símbolos de Christoffel e tensores de curvatura:

(i) $\Gamma_{ij}{}^{k} = \frac{1}{2}\, g^{km}\,(g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m})$;

(ii) $R_{abc}{}^{d} = -\partial_a \Gamma_{bc}{}^{d} + \partial_b \Gamma_{ac}{}^{d} + \Gamma_{ac}{}^{k}\,\Gamma_{bk}{}^{d} - \Gamma_{bc}{}^{k}\,\Gamma_{ak}{}^{d}$;

(iii) $R_{ab} = R_{acb}{}^{c}$;

(iv) $R = g^{ab} R_{ab}$.

1. Considere, no contexto da relatividade geral, o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu} = \rho c^2 u^\mu u^\nu$ para poeira *(dust)*, que satisfaz a equação de conservação $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Mostre que:

   (a) A equação da continuidade $j^\mu{}_{;\mu} = 0$ é satisfeita, onde $j^\mu = \rho u^\mu$.

   (b) As partículas de poeira seguem geodésicas.

2. Ache o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ de uma partícula livre em um dado espaço-tempo com métrica $g_{\mu\nu}$ e mostre que a equação de conservação $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ resulta na equação da geodésica para esta partícula. Dicas: (i) em um referencial que momentaneamente se move com a partícula, a única componente não nula é T^{00} e (ii) a função delta não se transforma como um escalar.

3. Considere o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ de um fluido ideal, $T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$. Mostre que a equação de conservação $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ resulta na equação de Euler relativística $(\rho + p)\nabla_u u = \nabla p + (\nabla_u \rho) u$. Mostre que o limite newtoniano dá a equação de Euler usual da mecânica de fluidos não-relativística.

4. Vimos que o "campo gravitacional" remoto produzido por uma fonte é

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T^{\mu\nu}(x^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV',$$

   onde $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{h}{2}\eta_{\mu\nu}$, $h = h^\mu{}_\mu$ e $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Para uma distribuição estacionária de massa, a única componente não-nula do tensor de energia-momento é $T^{00} = \rho c^2$. Determine a métrica produzida na região remota por uma massa M na origem.

5. **Onda gravitacional exata** (exercício 3 da lista 4, do curso do Maurício Richartz)

Considere a métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + L^2(e^{2\beta}dx^2 + e^{-2\beta}dy^2),$$

onde L e β dependem apenas da diferença $t - z$.

a) Escolha novas coordenadas $u = t - z$ e $v = t + z$, mantendo x e y inalterados. Escreva a métrica nesse novo sistema de coordenadas.

b) Calcule o tensor de Ricci para essa geometria e mostre que a única componente não nula é

$$R_{uu} = -\frac{2}{L}\left(L'' + (\beta')^2 L\right).$$

c) Encontre o limite desse espaço tempo que corresponde a uma onda gravitacional de pequena amplitude. Qual é a polarização dessa onda linearizada?

6. (Exercício 3.1, capítulo 5 do Foster & Nightingale) Obtenha a aproximação de onda plana para a onda gravitacional gerada por um haltere rodando, como medida por um observador distante situado no plano de rotação do haltere. Trabalhe no gauge TT.

7. (Problema 4, capítulo 5 do Foster & Nightingale) Quatro partículas de massa igual estão situadas nas extremidades dos braços de uma cruz rígida (de massa desprezível) com braços de igual comprimento, e toda a configuração gira livremente em torno de um eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano das massas. Mostre que na zona distante não há radiação quadrupolar.

8. Considere o universo fechado de Friedmann, com métrica

$$d\tau^2 = dt^2 - R(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2\right),$$

onde, como vimos, t e $R(t)$ são parametrizados por $t = \frac{B}{2}(\psi - \operatorname{sen}\psi)$ e $R(t) = \frac{B}{2}(1 - \cos\psi)$ e B é uma constante positiva.

(a) Qual é o tempo de vida total deste universo (medido por um observador dentro dele)?

(b) Sabemos que a métrica acima corresponde a seções espaciais ($t = cte$) dadas por 3-esferas com raio $R(t)$. Um fóton é emitido da origem no instante do Big Bang. Quanto tempo demora para esse fóton dar a volta no universo e voltar ao ponto inicial? Interprete.

9. **Espaço de de Sitter** Como vimos em aula, o espaço de de Sitter corresponde ao espaço-tempo com curvatura constante e positva (pela nossa escolha de convenções abaixo) e é solução das equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica. Esse espaço-tempo é

importante observacionalmente porque aproxima a fase inflacionária (com constante cosmológica muito grande) e o futuro do universo (com constante cosmológica muito pequena), de acordo com modelos com energia escura. Consideremos o espaço de de Sitter n-dimensional, dS_n. Considere o espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ de dimensão $n+1$ e métrica $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$ (note a escolha de assinatura que estamos fazendo). Definamos uma hipersuperfície n dimensional em $\mathbb{R}^{1,n}$ por $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = \ell^2$ e métrica induzida pela métrica ds^2 acima. O espaço dS_n corresponde a essa hipersuperfície dotada dessa métrica induzida (que denotaremos ainda por ds^2).

(a) Esboce dS_2 dentro de $\mathbb{R}^{2,1}$. O que muda para $\mathbb{R}^{n,1}$ em geral?

(b) Considere $\mathbb{R}^n$ com coordenadas cartesianas usuais $(z^1, \ldots, z^n)$. Parametrize a esfera unitária S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$ por coordenadas apropriadas $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Obtenha a expressão explícita da métrica de S^{n-1}, $d\Omega^2_{n-1} = (dz^1)^2 + \cdots + (dz^n)^2$, em termos de $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ para $n = 2$, 3 e 4. Generalize para n qualquer.

(c) Definimos coordenadas globais em dS_n pela parametrização

$$x^0 = \ell \sinh(t/\ell), \qquad x^i = \ell \cosh(t/\ell) z^i,$$

onde $z^i = z^i(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ parametriza a esfera S^{n-1}, como no item anterior. Escreva essas expressões explicitamente em termos de $(t, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ para os casos $n = 2$, 3 e 4. Interprete essas coordenadas em termos de seu esboço no item (a).

(d) Com a notação dos itens anteriores, mostre que

$$ds^2 = -dt^2 + \ell^2 \cosh^2(t/\ell) d\Omega^2_{n-1}.$$

(e) Calcule todas as componentes do tensor de Riemann nessas coordenadas e mostre que

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\ell^2} \left(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \right).$$

Compare com o exercício 5 da lista 2.

(f) Mostre que $R_{\mu\nu} = \frac{n-1}{\ell^2} g_{\mu\nu}$ e $R = \frac{n(n-1)}{\ell^2}$. Releia o enunciado.

(g) Mostre que de fato essa métrica é solução das equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica, isto é, mostre que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0,$$

com

$$\Lambda = \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2}.$$

(h) Existem muitas escolhas úteis de coordenadas no espaço de de Sitter. Uma dessas escolhas é dada pelas coordenadas estáticas, que correspondem a parametrizar dS_n por

$$x^0 = \sqrt{\ell^2 - r^2}\sinh(t/\ell), \quad x^1 = \sqrt{\ell^2 - r^2}\cosh(t/\ell), \quad x^i = ry^i,$$

para $i = 2, \ldots, n$, onde agora y^i parametriza S^{n-2} dentro de $\mathbb{R}^{n-1}$ (analogamente ao que z^i fazia com S^{n-1} nos itens acima), e $0 < r < \ell$. Mostre que, nestas coordenadas,

$$ds^2 = -(1 - r^2/\ell^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2/\ell^2} + r^2 d\Omega^2_{n-2}.$$

Esse sistema de coordenadas cobre todo o espaço de de Sitter?