Lista 5 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, novembro de 2018

Notação: nesta lista usaremos a seguinte convenção para os símbolos de Christoffel e tensores de curvatura:

(i) ${\Gamma_{ij}}^k = \frac{1}{2}\, g^{km}\,(g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m})$;

(ii) ${R_{abc}}^d = -\partial_a {\Gamma_{bc}}^d + \partial_b {\Gamma_{ac}}^d + {\Gamma_{ac}}^k\, {\Gamma_{bk}}^d - {\Gamma_{bc}}^k\, {\Gamma_{ak}}^d$;

(iii) $R_{ab} = {R_{acb}}^c$;

(iv) $R = g^{ab} R_{ab}$.

1. (Problema 1, capítulo 4 do Foster & Nightingale) No espaço-tempo de Schwarzschild, o "plano equatorial" dado por $\theta = \pi/2$ é chato?

2. Vimos que no limite de campo fraco e baixas velocidades o potencial Newtoniano V é relacionado à métrica, em coordenadas adequadas, por $g_{00} \cong 1 + \frac{2}{c^2}V$. Considere uma família de trajetórias de partículas-teste Newtonianas e compare suas equações de movimento com a equação do desvio geodésico para mostrar que, nessas condições,
$$R_{i0j0} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}.$$

3. (Exercício 4.3, capítulo 4 do Foster & Nightingale) Considere o espaço-tempo de Schwarzschild com coordenadas usuais e $m = GM/c^2$. Um observador estacionado em $r = r_0$ observa um sinal luminoso emitido a partir de um ponto onde $r = r_1$. O sinal viaja radialmente e é refletido por um espelho fixo em $r = r_2$, voltando ao ao seu ponto de origem em $r = r_1$. Quanto tempo demora a viagem de ida e volta de acordo com o observador em $r = r_0$? Considere $2m < r_2 < r_1 < r_0$.

4. (Problema 4, capítulo 4 do Foster & Nightingale) No espaço-tempo de Schwarzschild, mostre o período orbital de um fóton numa órbita circular em $r = 3m$, conforme medido pelo tempo próprio de um observador estacionado em $r = 3m$, é $6\pi m/c$. Que período orbital um observador muito distante atribui ao fóton?

5. Considere um observador parado nas coordenadas de Schwarzschild, digamos com coordenadas $(t, r_0, \theta_0, \phi_0)$. Mostre que, em termos do tempo próprio τ deste observador, $t = t_0 + \gamma\tau$, onde $\gamma = \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)^{-1}$. Mostre ainda que sua aceleração é dada por $a = \nabla_u u = \frac{m}{r_0^2}\partial_r$, onde u é a 4-velocidade. Esboce o gráfico da magnitude dessa aceleração (o que isso significa fisicamente?) em termos de r. Interprete.

6. (Problema 6, capítulo 3 do Carrol) Segue da solução de Schwarzschild que uma boa aproximação para métrica na superfície da Terra e nas suas vizinhanças é

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + (1-2\Phi)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

onde $\Phi = -GM/r$ é o potencial gravitacional Newtoniano (G é a constante de Newton e M é a massa da Terra). Ao longo do problema, assuma que $\Phi \ll 1$.

   a) Imagine um relógio na superfície da Terra a uma distância R_1 do centro da Terra e um outro relógio no topo de um prédio alto a uma distância R_2 do centro da Terra. Calcule o tempo marcado por cada relógio em função do tempo coordenado t. Qual relógio é mais rápido?

   b) Encontre a geodésica correspondente a um movimento circular de órbita em torno do equador da Terra ($\theta = \pi/2$). Quanto vale $d\phi/dt$?

   c) Considere uma partícula massiva movendo-se radialmente na métrica de Schwarzschild. Compare as equações de movimento e discuta as condições para que se recupera a equação newtoniana correspondente. Faça o mesmo para um fóton e mostre que o resultado não tem análogo newtoniano mesmo no limite em que $r \gg GM/c^2$.

   d) Quanto tempo próprio se passa para que um satélite localizado a uma distância R_1 do centro da Terra complete uma órbita? Trabalhe em primeira ordem em Φ. Substitua os valores para G, M e R_1, sem esquecer de recuperar os fatores c, para encontrar o resultado em segundos. Compare o valor com o tempo medido por um relógio estacionário na superfície da Terra.

7. **Redshift/Blueshift** (exercício 10 da lista 4, do curso do Maurício Richartz)

   a) Um foguete espacial em órbita circular de raio r em torno de uma estrela de massa M aciona sua arma laser (cuja frequência de repouso é ν_0). O disparo ocorre no plano orbital sendo que a arma está apontada a um ângulo α (no referencial do foguete) em relação à direção tangencial de movimento. Qual é a frequência do laser vista por um observador estacionário no infinito?

   b) Um radialista está descrevendo sua queda radial em direção ao interior de um buraco negro de Schwarzschild. Logo antes dele atravessar o horizonte de eventos, sua frequência de transmissão se torna enormemente desviada para o vermelho, com uma dependência temporal do tipo $e^{-t/\text{constante}}$, onde t mede o tempo próprio de um ouvinte no infinito. A partir da constante determine a massa do buraco negro.

8. **Avanço do periélio** Obtivemos em aula a equação para órbitas de partículas massivas no espaço-tempo de Schwarzschild,

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \mathcal{E} + \frac{2m}{L^2}u + 2mu^3, \tag{1}$$

onde $u = 1/r$, e $\mathcal{E}$ e L são as constantes do movimento que vêm da invariância da métrica de Schwarzschild em relação a t e ϕ. Mais precisamente, $\mathcal{E} = \frac{E^2-1}{L^2}$ com $E = (1-\frac{2m}{r})\dot{t}$ e $L = r^2\dot{\phi}$, onde a derivada é com relação ao parâmetro afim que pode ser tomado como o tempo próprio.

(a) Revise o problema de Kepler Newtoniano e mostre que ele dá origem exatamente à equação acima sem o último termo, isto é, a

$$\left(\frac{du_0}{d\phi}\right)^2 + u_0^2 = \mathcal{E} + \frac{2m}{L^2}u_0.$$

(b) Complete o quadrado em u_0 para mostrar que tal equação é equivalente a

$$\left(\frac{d}{d\phi}(u_0 - u_c)\right)^2 + (u_0 - u_c)^2 = A^2,$$

com $u_c = m/L^2$ e $A^2 = \mathcal{E} + m^2/L^4$. Esta é a equação do oscilador harmônico simples que tem como solução $u_0 - u_c = A\cos(\phi - \phi_0)$, onde ϕ_0 é uma constante de integração que tomaremos como zero. Desta forma, temos que

$$u_0 = \frac{m}{L^2}\left(1 + e\cos\phi\right), \tag{2}$$

com e constante. Note que isso representa uma cônica, como já esperávamos da solução para o problema de Kepler:

$$r_0(\phi) = \frac{L^2/m}{1 + e\cos\phi}.$$

(c) Vamos agora incluir a correção relativística para a equação de u, Eq. (1), perturbativamente. Para isso precisamos de um parâmetro de perturbação adimensional ϵ que seja pequeno e que identificaremos mais à frente. Uma escala de comprimento para o problema em questão é dada pela distância corresponte ao afélio ($r_1 = 1/u_1$) ou periélio ($r_2 = 1/u_2$). Vamos tomar $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$, de maneira que se a órbita não for muito alongada teremos $y := u/\bar{u}$ de ordem 1. (Note que no caso não relativístico $\bar{u}$ é constante e igual a m/L^2). Mostre que, com isso,

$$\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 + y^2 = \frac{\mathcal{E}}{\bar{u}^2} + \frac{2m}{L^2\bar{u}}y + 2m\bar{u}y^3,$$

(d) Mostre que $y_1 = u_1/\bar{u}$ e $y_2 = u_2/\bar{u}$ são a menor e maior raiz de

$$2m\bar{u}\, y^3 - y^2 + \frac{2m}{L^2\bar{u}} y + \frac{\mathcal{E}}{\bar{u}^2} = 0. \tag{3}$$

Denotemos a terceira raiz da equação acima por y_3, de maneira que $y_1 \leq y_3 \leq y_2$. Escreva a equação acima como $\epsilon(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$, onde $\epsilon := 2m\bar{u}$, e mostre que $y_1 + y_2 + y_3 = 1/\epsilon$ e $y_1 + y_2 = 2$, de maneira que $\epsilon y_3 = 1 - 2\epsilon$.

(e) Como vimos acima, y é uma quantidade de ordem 1, de maneira que podemos considerar o termo cúbico em (3) perturbativamente se $\epsilon = 2m\bar{u}$ for pequeno. Para Mercúrio e Terra temos $\epsilon \simeq 5,1 \times 10^{-8}$ e $\epsilon \simeq 2 \times 10^{-8}$ respectivamente, de maneira que essa condição é amplamente satisfeita. Utilizando os resultados acima mostre que, em primeira ordem em ϵ,

$$\frac{d\phi}{dy} = \pm \frac{1 + \epsilon(1 + \bar{u}/2)}{\sqrt{(y - y_1)(y_2 - y)}}$$

(f) Podemos agora achar o ângulo entre afélio e periélio consecutivos integrando a equação acima. Mostre que, em primeira ordem em ϵ, tal ângulo é dado por $\int_{y_1}^{y_2} \frac{d\phi}{dy} dy = \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right)\pi$. O ângulo entre dois periélios consecutivos é, assim, dado por duas vezes esse valor.

(g) Mostre que a cada revolução o periélio avança, em primeira ordem emde ϵ, de um ângulo $\Delta\phi = 3\epsilon\pi$, isto é,

$$\Delta\phi = \frac{3GM\pi}{c^2}\left(\frac{1}{r_{\text{periélio}}} + \frac{1}{r_{\text{afélio}}}\right).$$

(h) Calcule o avanço do periélio de Mercúrio, nessa aproximação, no período de um século.

9. **Buracos de minhoca** (exercício 7 da lista 4, do curso do Maurício Richartz)

a) Mostre que a métrica de Scwarzschild pode ser escrita como

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2r'}{1 + M/2r'}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4 \left[dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right],$$

onde r' se relaciona com a coordenada radial usual r através de $r = r'(1 + M/2r')^2$. As coordenadas (t, r', θ, ϕ) são chamadas coordenadas isotrópicas pois: a parte espacial é uma função de r' multiplicada pela métrica euclidiana 3-dimensional que, por sua vez, não tem nenhuma direção especial.

b) Mostre que em coordenadas isotrópicas r' é sempre uma coordenada espacial, isto é, $\vec{e}_{r'} = \partial_{r'}$ é sempre um vetor tipo espaço. Compare com a coordenada usual de Schwarzschild, mostrando que esta é uma coordenada espacial se $r > 2M$ e é uma coordenada temporal quando $0 < r < 2M$.

c) Considere a superfície equatorial bidimensional definida por $t =$ constante, $\theta =$ constante $= \pi/2$. Construa um "diagrama de mergulho"para essa superfície usando coordenadas isotrópicas. Isto é, em um espaço euclidiano plano com coordenadas $(\bar{r}, \bar{z}, \bar{\phi})$ e métrica $ds^2 = d\bar{r}^2 + d\bar{z}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\phi}^2$, construa uma superfície bidimensional parametrizada por r' e θ cuja métrica induzida é

$$ds^2 = \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4 \left(dr'^2 + r'^2 d\phi^2\right).$$

Essa superfície é um buraco de minhoca que conecta dois espaços assintoticamente planos.

d) Encontre uma equação $\bar{z} = \bar{z}(\bar{r})$ para a curva que, ao ser rotacionada, gera uma superfície de revolução idêntica à superfície encontrada em b).