Lista 4 (extra) - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2018

Notação: nesta lista usaremos a convenção abaixo para os símbolos de Christoffel e tensores de curvatura.

(i) ${\Gamma_{ab}}^{c} = \frac{1}{2}\, g^{cd}\,(g_{bd,a} + g_{ad,b} - g_{ab,d})$;

(ii) ${R_{abc}}^{d} = -\partial_a {\Gamma_{bc}}^{d} + \partial_b {\Gamma_{ac}}^{d} + {\Gamma_{ac}}^{k}\,{\Gamma_{bk}}^{d} - {\Gamma_{bc}}^{k}\,{\Gamma_{ak}}^{d}$;

(iii) $R_{ab} = {R_{acb}}^{c}$;

(iv) $R = g^{ab} R_{ab}$.

1. Considere uma variedade Riemaniana M de dimensão n com métrica $g_{\mu\nu}$. Dado um ponto $p \in M$ e um vetor X em T_pM (espaço tangente em p), sabemos que existe uma única geodésica $\gamma(t)$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\left.\frac{d\gamma^\alpha}{dt}\right|_{t=0} = X^\mu$.[1] Denotemos tal geodésica por $C_X(t)$. Mostre que
$$C_{\lambda X}(t) = C_X(\lambda t). \tag{1}$$
Dica: use o teorema de existência e unicidade para EDOs.

2. **O mapa exponencial** Usando a notação do exercicio anterior, definimos o mapa exponencial em p, $\exp_p : T_pM \to M$ por
$$\exp_p(X) = C_X(1).$$
Mostre que a geodésica que sai de p em $t = 0$ com velocidade X é dada por
$$t \mapsto \exp_p(tX).$$
Desta forma, $\exp_p(v)$ é bem definido para v pequeno já que pelo TEU as geodésicas são bem definidas para parâmetros suficientemente pequenos. Fixemos uma base de vetores $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de T_pM e definamos coordenadas locais $\{x^1, \ldots, x^n\}$ em M pela aplicação $F(x^1, \ldots, x^n) = \exp(x^\mu E_\mu)$. Note que $F(0, \ldots, 0) = p$. Mostre que a aplicação $(dF)_0 : \mathbb{R}^n \to TpM$, $(dF)_0(x^1, \ldots, x^n) = \frac{d}{dt} F(tx^1, \ldots, tx^n)\big|_{t=0}$ pode ser escrita como
$$(dF)_0(x^1, \ldots, x^n) = x^\mu E_\mu.$$

[1] isso segue imediatamente do teorema de existência e unicidade para EDOs aplicado à equação da geodésica, $\frac{d^2\gamma^\mu}{dt^2} + {\Gamma_{\alpha\beta}}^{\mu}\,\frac{d\gamma^\alpha}{dt}\,\frac{d\gamma^\beta}{dt} = 0$.

e que portanto a jacobiana de F nessas coordenadas é dada por

$$\left.\frac{\partial F^\mu}{\partial x^\nu}\right|_0 = \delta^\mu_\nu.$$

Observamos que isso mostra que esse sistema de coordenadas é de fato bem definido já que a relação acima implica que F é um difeomorfismo entre uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{R}^n$ e $F(U)$ de $p \in M$.

Analogamente, podemos pensar que a aplicação exponencial define um sistema uma carta em torno de cada $p \in M$ dada por (U, ϕ) com $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, $\phi = F^{-1}$, isto é, $\phi(q) = (x^1, \ldots, x^n)$ tal que $q = \exp_p(x^\mu E_\mu)$. Mostre que nestas coordenadas as geodésicas saindo de p são dadas por

$$t \mapsto t x^\mu.$$

Assim, essas geodésicas são dadas por "retas radiais" nas coordenadas x^μ.

Finalmente, mostre que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_0 = E_\mu.$$

3. **Coodenadas normais de Riemann** Continuemos com a notação dos exercícios anteriores. Suponhamos agora que a base $\{E_1, \ldots, E_n\}$ seja **ortonormal**. Vamos denotar as quantidades neste caso com índices $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, etc. Temos assim coordenadas $\{\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n\}$ tais que $t \mapsto t\hat{x}^\mu$ dão as geodésicas que saem de p.

   (a) Mostre que a métrica, nessas coordenadas, satisfaz $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_0 = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Note que o subscrito 0 denota aqui a origem das coordenadas $x^{\hat{\mu}}$, que corresponde ao ponto p.

   (b) Mostre que os coeficientes de conexão, nessas coordenadas, se anulam na origem (isto é, no ponto p). Dica: use as equações da geodésica, $\frac{d^2\gamma^{\hat{\mu}}}{dt^2} + \Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\hat{\mu}} \frac{d\gamma^{\hat{\alpha}}}{dt}\frac{d\gamma^{\hat{\beta}}}{dt} = 0$.

   (c) Mostre que $\left[\Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\hat{\mu}}{}_{,\hat{\gamma}} + \Gamma_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}}{}^{\hat{\mu}}{}_{,\hat{\beta}} + \Gamma_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}{}^{\hat{\mu}}{}_{,\hat{\alpha}}\right]_0 = 0$. Continuando esse mesmo processo, convença-se de que todas as derivadas simétricas dos coeficientes de conexão se anulam na origem.

   (d) Use o item (b) para mostrar que $g_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\alpha}}|_0 = 0$.

   (e) Mostre que $\left.\Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\hat{\mu}}{}_{,\hat{\nu}}\right|_0 = -\frac{1}{3}\left(R_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\hat{\mu}} + R_{\hat{\nu}\hat{\beta}\hat{\alpha}}{}^{\hat{\mu}}\right)_0$.

   (f) Mostre que $\left.g_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\alpha}\hat{\beta}}\right|_0 = -\frac{1}{3}\left(R_{\hat{\mu}\hat{\beta}\hat{\nu}\hat{\alpha}} + R_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{\nu}\hat{\beta}}\right)_0$.

   (g) Mostre que $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}|_0 = \left(g_{\hat{\alpha}\hat{\nu},\hat{\mu}\hat{\beta}} - g_{\hat{\alpha}\hat{\mu},\hat{\nu}\hat{\beta}}\right)_0$.

   (h) Mostre que $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{x}) = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{3}\left(R_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{\nu}\hat{\beta}}\right)_0 x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} + \mathcal{O}(\hat{x}^3)$.

   (i) Mostre que $g^{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{x}) = \eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{3}\left(R^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\nu}}{}_{\hat{\beta}}\right)_0 x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} + \mathcal{O}(\hat{x}^3)$.