Lista 3 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, setembro de 2018

Notação: nesta lista usaremos a seguinte convenção para os símbolos de Christoffel e tensores de curvatura:

(i) ${\Gamma_{ij}}^k = \frac{1}{2}\, g^{km}\,(g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m})$;

(ii) ${R_{abc}}^d = -\partial_a {\Gamma_{bc}}^d + \partial_b {\Gamma_{ac}}^d + {\Gamma_{ac}}^k\, {\Gamma_{bk}}^d - {\Gamma_{bc}}^k\, {\Gamma_{ak}}^d$;

(iii) $R_{ab} = {R_{acb}}^c$;

(iv) $R = g^{ab} R_{ab}$.

1. Considere a superfície de uma esfera S de raio a.
   (a) Escreva o tensor métrico nas coordenadas esféricas usuais (θ, ϕ).
   (b) Ache os coeficientes de conexão associados.
   (c) Considere um vetor X_0 de coordenadas X_0^μ no ponto $p \in S$ de coordenadas $(\theta, \phi) = (\theta_0, 0)$. Escreva o problema de Cauchy correspondente a fazer o transporte paralelo de X_0 ao longo do paralelo $\theta = \theta_0$ dando uma volta completa em ϕ de 0 a 2π.
   (d) Resolva este problema de Cauchy para $\theta_0 = \pi/2$. Interprete o resultado.
   (e) Resolva este problema de Cauchy para $\theta_0 = \pi/3$. Interprete o resultado.
   (f) Ache todos as componentes do tensor de curvatura $R_{\mu\nu\alpha\beta}$.
   (g) Compare a expressão que você obteve nos ítens (d) e (e) com a fórmula $\Delta\lambda^\alpha = \frac{1}{2}(X_0)^\kappa f^{\mu\nu} {R_{\mu\nu\kappa}}^\alpha$ (onde λ^μ é o vetor paralelamente transportado) e $f^{\mu\nu}$ dá a área infinitesimal. Esta fórmula se aplica a este caso?

2. Considere o espaço de Minkowski com coordenadas cartesianas (T, X, Y, Z) no referencial inercial K. Vamos introduzir coordenadas girantes em relação a K, com velocidade angular ω, por :

$$
\begin{aligned}
t &= T, \\
x &= \cos(\omega T) X + \operatorname{sen}(\omega T) Y, \\
y &= -\operatorname{sen}(\omega T) X + \cos(\omega T) Y, \\
z &= Z.
\end{aligned}
$$

Mostre que, perto do eixo z, temos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{\omega^2}{c^2}(x^2+y^2) & \frac{\omega\, y}{c} & -\frac{\omega\, x}{c} & 0 \\ \frac{\omega\, y}{c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega\, x}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, na notação introduzida em aula, temos $\vec{\alpha} = \left(\frac{\omega\, y}{c}, -\frac{\omega\, x}{c}, 0\right)$, $\vec{\omega} = -\frac{c}{2}\vec{\nabla}\times\vec{\alpha} = \omega\,\hat{z}$ e $\phi = -\omega^2(x^2+y^2)$. Mostre que a equação de movimento neste caso reduz-se a

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\omega}) - 2m\,\vec{\omega}\times\frac{d\vec{x}}{dt}.$$

Interprete esse resultado em termos de forças centrífuga e de Coriolis.

3. Mostre que os coeficientes de conexão se transformam como

$$\Gamma_{\mu'\nu'}{}^{\alpha'} = X^{\alpha'}_{\alpha} X^{\mu}_{\mu'} X^{\nu}_{\nu'} \Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} - X^{\kappa}_{\mu'} X^{\gamma}_{\nu'} X^{\alpha'}_{\kappa\gamma},$$

onde $X^{\alpha'}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}$ e $X^{\alpha'}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}$.

4. Mostre que

   (a) $\delta^{\beta}_{\alpha;\mu} = 0$;

   (b) $g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma_{\mu\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\beta\alpha}$;

   (c) $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\alpha} = \partial_\beta \ln\sqrt{|g|}$;

   (d) $X^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}X^{\mu}\right)$.

5. Mostre que

   (a) $\nabla_\alpha R_{\beta\gamma\mu}{}^{\nu} + \nabla_\beta R_{\gamma\alpha\mu}{}^{\nu} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} = 0$ (identidade de Bianchi);

   (b) $R^{\alpha}_{\beta;\alpha} = -\frac{1}{2}R_{,\alpha}$.

6. Faz diferença se substituirmos a derivada covariante pela derivada simples nas definições dos tensores A_{ab} e C_{abc} abaixo?

   (a) $A_{ab} := X_{a;b} - X_{b;a}$

   (b) $C_{abc} := B_{ab;c} + B_{bc;a} + B_{ca;b}$, onde B_{ab} é tensor antissimétrico.

7. Considere um espaço-tempo esfericamente simétrico genérico, com métrica

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) d\phi^2.$$

Encontre as equações das geodésicas e mostre que os coeficientes de conexão não triviais nesse caso são dados por:

$$\begin{array}{lll} {\Gamma_{10}}^0 = A'/2A, & {\Gamma_{00}}^1 = A'/2B, & {\Gamma_{11}}^1 = B'/2B, \\ {\Gamma_{22}}^1 = -r/B, & {\Gamma_{33}}^1 = -(r\sin^2\theta)/B, & {\Gamma_{21}}^2 = 1/r, \\ {\Gamma_{33}}^2 = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta, & {\Gamma_{31}}^3 = 1/r, & {\Gamma_{32}}^3 = \cot\theta, \end{array}$$

onde $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$.

8. Calcule todos as componentes não triviais do tensor de Riemann para o espaço-tempo do exemplo anterior. Mostre que as componentes não triviais do tensor de Ricci são dadas por:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \tfrac{A''}{2B} - \tfrac{A'}{4B}\left(\tfrac{A'}{A} + \tfrac{B'}{B}\right) + \tfrac{A'}{rB}, \\ R_{11} &= -\tfrac{A''}{2A} + \tfrac{A'}{4A}\left(\tfrac{A'}{A} + \tfrac{B'}{B}\right) + \tfrac{B'}{rB}, \\ R_{22} &= 1 - \tfrac{1}{B} - \tfrac{r}{2B}\left(\tfrac{A'}{A} - \tfrac{B'}{B}\right), \\ R_{33} &= \operatorname{sen}^2\theta\, R_{22}. \end{aligned}$$

9. *(Extra)* **Comutador entre campos de vetores** (exercício 7 da lista 2, do curso do Maurício Richartz)

Assim como podemos pensar em um vetor $v_p \in T_pM$ num ponto p de uma variedade M como sendo uma aplicação $v_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, podemos pensar num campo de vetores v como sendo um operador $v : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ (o símbolo $C^\infty(M)$ é o conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis $f : M \to \mathbb{R}$). Sejam v e w dois campos de vetores suaves de uma variedade n-dimensional M. Definimos o comutador $[v, w]$ entre v e w através da relação $[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f))$, onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ qualquer.

(a) Mostre que o comutador $[v, w]$ entre dois campos de vetores é linear e satisfaz a regra de Leibnitz para concluir que $[v, w]$ é também um campo de vetores.

(b) Sejam u, v, w três campos de vetores suaves quaisquer. Mostre que a identidade de Jacobi é satisfeita, i.e. mostre que

$$[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0.$$

(c) Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ campos de vetores suaves em uma variedade n-dimensional M que formam, em cada ponto $p \in M$, uma base do espaço T_pM. Portanto, em cada ponto $p \in M$, podemos expandir cada comutador $[Y_\alpha, Y_\beta]$ em termos dessa base, definindo assim funções $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ tais que $[Y_\alpha, Y_\beta] = C^\gamma{}_{\alpha\beta} Y_\gamma$. Mostre que $C^\gamma{}_{\alpha\beta} = -C^\gamma{}_{\beta\alpha}$ e, usando a identidade de Jacobi demonstrada acima, encontre uma equação que deve ser satisfeita pelos $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$.

(d) Dada uma carta/sistema de coordenadas (U, ψ) da variedade M, com a notação usual $\psi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, podemos construir uma base coordenada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big|_p \right\}$, $\mu = 1, \dots, n$ de T_pM, para cada $p \in U \subset M$. Dessa forma, dado um campo de vetores v, podemos decompô-lo através de $v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, sendo cada componente v^μ uma função de $p \in U \subset M$ em $\mathbb{R}$. Sabendo, disso, dados dois campos de vetores v e w, mostre que as componentes do comutador $[v, w]$ são dadas por

$$[v, w]^\mu = v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}.$$

(e) Observe que o comutador entre dois campos de vetores de uma base coordenada qualquer $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ é sempre nulo, i.e. $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Queremos mostrar que a recíproca também é verdade, isto é, que se temos uma base em que o comutador entre dois campos de vetores quaisquer se anulam, então existe um sistema de coordenadas na qual essa base é uma base coordenada. Mais precisamente, assuma que $Y_1, \dots, Y_n$ são campos de vetores suaves em uma variedade n-dimensional M que formam uma base de T_pM em cada ponto $p \in M$. Suponha que $[Y_\alpha, Y_\beta] = 0$ para quaisquer dois α, β. Prove que em uma vizinhança de cada $p \in M$ existem coordenadas $(y_1, \dots, y_n)$ tais que $Y_1, \dots, Y_n$ são os campos de vetores coordenados, i.e., tais que $Y_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu}$.
Dica: em uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, as equações $\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = F_\mu$, com $\mu = 1, \dots, n$, para a função desconhecida f, possuem solução se e somente se $\frac{\partial F_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F_\nu}{\partial x^\mu}$. Use esse fato, juntamente com o item **e**, para encontrar as novas coordenadas.

(f) Dê um exemplo de dois campos de vetores em $\mathbb{R}^2$ que, em qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^2$, são linearmente independentes e não-nulos, e cujo comutador não é nulo. Esse par de campos de vetores constitui uma base para $T_p\mathbb{R}^2$ em qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^2$, mas por causa dos resultados acima não pode ser uma base coordenada pois o comutador entre eles não é nulo.