Lista 2 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, agosto de 2018

1. Considere o toro mostrado na figura abaixo (à esquerda):

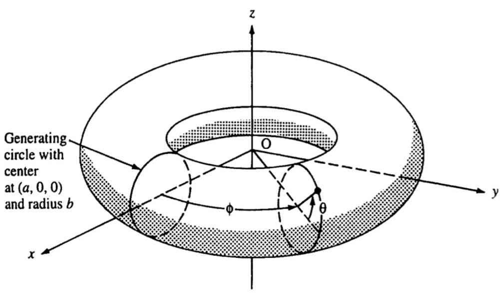
   (a) Parametrize tal superfície usando as coordenadas θ e ϕ da figura.

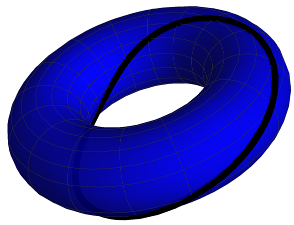
   (b) Obtenha expressões para os vetores $\boldsymbol{e}_i$ da base coordenada correspondente e para o o tensor métrico g_{ij}.

   (c) Obtenha expressões para $\boldsymbol{e}^i$ e g^{ij}.

   (d) Usando o que você obteve no ítem (b) escreva a integral que corresponde ao comprimento da curva dada por $\phi = \phi_0$ que abraça o toro e a calcule. Faça o mesmo para a curva $\theta = \theta_0$.

   (e) Escreva a integral que corresponde ao comprimento de uma curva que dá uma volta no toro como na figura da direita (escolha uma).





2. Considere a espiral esférica (ou loxodromia) dada pela curva C parametrizada por $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in S^2$, onde

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \cos(t)\,\operatorname{sech}(mt), \\
y(t) &= \operatorname{sen}(t)\,\operatorname{sech}(mt), \\
z(t) &= -\tanh(mt),
\end{aligned}
$$

   com $-\infty < t < \infty$ e $m \geq 0$.

   (a) Esboce C.

   (b) Obtenha a parametrização acime em coordenadas esféricas (isto é, $\theta = \theta(t)$ e $\phi = \phi(t)$.

   (c) Encontre expressões para $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ de $T_{\boldsymbol{r}(t)}\mathbb{R}^3$ e na base $\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right\}$ de $T_{\boldsymbol{r}(t)}S^2$.

(d) Calcule o ângulo que tal curva faz com $\frac{\partial}{\partial\theta}$ e $\frac{\partial}{\partial\phi}$ para cada t. Interprete. Dica: faça $\frac{m}{1+m^2} = \cos\alpha$.

(e) Calcule o comprimento de tal curva. Interprete.

3. O símbolo completamente antissimétrico de Levi-Civita, $\tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_n}$ é definido como sendo $+1$ se $\{\mu_1\ldots\mu_n\}$ é uma permutação par de $\{1\ldots n\}$, -1 se $\{\mu_1\ldots\mu_n\}$ é uma permutação ímpar de $\{1\ldots n\}$ e 0 nos demais casos (isto é, quando $\{\mu_1\ldots\mu_n\}$ contém algum índice repetido). Por *definição*, o símbolo de Levi-Civita tem as componentes acima em qualquer sistema de coordenadas e portanto não é um tensor (vamos remediar isso ainda nessa lista). Vamos assumir que estamos trabalhando em $\mathbb{R}^3$ euclidiano com coordenadas cartesianas de maneira que índices podem ser subidos e baixados impunemente.

(a) Mostre que $\tilde{\epsilon}_{ijk}\,\tilde{\epsilon}_{rsk} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}$;

(b) Mostre que $\tilde{\epsilon}_{ijk}\,\tilde{\epsilon}_{ijl} = 2\,\delta_{kl}$;

(c) Mostre que $(\vec{A}\times\vec{B})_k = \tilde{\epsilon}_{ijk}A_iB_j$ e $(\nabla\times\vec{A})_k = \tilde{\epsilon}_{ijk}\partial_iA_j$;

(d) Use os itens anteriores para mostrar que $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\,(\vec{A}\cdot\vec{B})$ e $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla\,(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$.

4. Definimos a simetrização e antissimetrização de um tensor $T_{i_1\cdots i_n}$ por $T_{(i_1\cdots i_n)} = \frac{1}{n!}\sum_\sigma T_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_n)}$ e $T_{[i_1\cdots i_n]} = \frac{1}{n!}\sum_\sigma(-1)^\sigma T_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_n)}$, respectivamente, onde a soma percorre todas as permutações σ de $\{1,2,\ldots,n\}$ e $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação.

(a) Obtenha expressões explícitas dessas operações para $n \leq 3$;

(b) Mostre que se $T_{i_1\cdots i_n}$ é simétrico (resp. antissimétrico) em todos os seu índices, então $T_{(i_1\cdots i_n)} = T_{i_1\cdots i_n}$ (resp. $T_{\{i_1\cdots i_n\}} = T_{i_1\cdots i_n}$);

(c) Mostre que se A_{ij} é simétrico, então $A^{ij}B_{ij} = A^{ij}B_{(ij)}$;

(d) Mostre que se A_{ij} é antissimétrico, então $A^{ij}B_{ij} = A^{ij}B_{[ij]}$;

(e) Mostre que se A_{ij} é simétrico e B_{ij} é antissimétrico, então $A^{ij}B_{ij} = 0$.

5. Considere um tensor R_{ijkl} em um espaço vetorial de dimensão n com as seguintes simetrias:

(i) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$,

(ii) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$,

(iii) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.

Use as propriedades (i), (ii) e (iii) para mostrar que:

(a) $R_{ijkl} = R_{klij}$,

(b) Mostre que o conjunto dos tensores que satisfazem as propriedades (i), (ii) e (iii) é um espaço vetorial de dimensão $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

(c) Dado um tensor simétrico B_{ij}, o tensor $A_{ijkl} = B_{ik}B_{jl} - B_{il}B_{jk}$ tem as mesma simetrias que R_{ijkl}.

(d) Mostre que se $n = 2$ e R_{ijkl} satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) então $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, K escalar.

(e) Se $R_{ijkl}x^i y^j x^k y^l = 0$ para todos os vetores x^i, y^i, então $R_{ijkl} = 0$.

6. *(Extra)* **O espaço dual** (exercício escrito pelo Matheus)

Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. O *espaço dual* a V é definido como o espaço vetorial das funções lineares de V em $\mathbb{R}$ (funcionais lineares), munido com as operações usuais. Usualmente, é denotado por V^*.

(a) Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V. Mostre que o conjunto de funcionais lineares $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ tais que $\theta^j(e_i) = \delta^i_j$ constitui uma base para V^*. Tal base é conhecida como *base dual*.

(b) Como $\dim V = \dim V^*$, tais espaços vetoriais são isomorfos. Entretanto, esse isomorfismo não é natural, isto é, depende da escolha de base. Convença-se disso.

(c) Agora, suponha que V possui um produto interno $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Prove o teorema da representação de Riesz: dado $f \in V^*$, existe um único $v_f \in V$ tal que $f(v) = g(v_f, v)$.

(d) Utilize o resultado do item anterior para construir um isomorfismo natural entre V e V^*.

(e) Sejam $\Lambda : V \to V^*$ o isomorfismo que você construiu no item anterior e Λ^{-1} o isomorfismo inverso. Para $v \in V$, escreva $\Lambda(v) = v^\flat$; se $\omega \in V^*$, escreva $\Lambda(\omega) = \omega^\sharp$. Como a notação sugere, os isomorfismos Λ e Λ^{-1} são conhecidos como *isomorfismos musicais* (se você não entendeu isso, tudo bem; você não precisa entender de música para ser aprovado neste curso). Sejam v^i e ω_i as componentes de v e ω nas bases do item a), i.e, $v = v^i e_i$ e $\omega = \omega_i \theta^i$. Mostre que

$$(v^\flat)_i = g_{ij} v^j$$

e

$$(\omega^\sharp)^i = g^{ij} \omega_j,$$

onde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. O que significam os elementos g^{ij}?

7. *(Extra)* **Produto tensorial de espaços vetoriais** (exercício escrito pelo Matheus)

Sejam V e W dois espaços vetoriais reais de dimensão n e m, respectivamente. Suponha que exista uma transformação bilinear $T : V \times W \to E$, onde E é um espaço vetorial. Iremos chamar tal transformação de *produto tensorial* e denotá-la por $T(v, w) = v \otimes w$. Se $\{e_i\}$ e $\{\omega_i\}$ são bases de V e W, suponha que os elementos da forma $e_i \otimes \omega_j$ formam uma base para E. Então, E é um espaço vetorial de dimensão mn, chamado de *produto tensorial* dos espaços V e W e denotado por $E = V \otimes W$.

(a) Considere transformações lineares $f : V \to F$ e $g : W \to H$, onde F e H são dois espaços vetoriais reais de dimensão finita. Utilize estas aplicações para construir uma transformação linear $f \otimes g : V \otimes W \to F \otimes H$. (Dica: Deixe a notação lhe guiar!)

(b) A partir de agora, suponha que $W = V^*$ e que V possui um produto interno $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Mostre que $V \otimes V^*$ é naturalmente isomorfo ao espaço $L(V)$ das transformações lineares de V em V.

(c) De modo análogo ao item b), argumente que o espaço $V^* \otimes V^*$ pode ser identificado naturalmente com o espaço das aplicações bilineares de V em $\mathbb{R}$. O que pode ser dito sobre $V \otimes V$?

8. *(Extra)* **Tensores em espaços vetoriais** (exercício escrito pelo Matheus)

Seja V um espaço vetorial real de dimensão n e V^* o seu dual. Um tensor do tipo (r, s) em V é um elemento do espaço vetorial

$$T^r_s(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s}.$$

(a) Convença-se de que $T^r_s(V)$ é naturalmente isomorfo ao espaço das aplicações multilineares de r cópias de V^* e s cópias de V em $\mathbb{R}$.

(b) Generalize o item e) da questão 1 para tensores do tipo (r, s).

(c) Utilizando a linguagem desta questão, exiba as operações entre tensores dadas em aula. Em particular, mostre como a contração pode ser definida em termos de aplicações entre espaços vetoriais. Por exemplo, se $T = T^{ij}{}_k\, e_i \otimes e_j \otimes \theta^j$, descreva o tensor cujas componentes são $T^{ij}{}_j$ em termos de uma aplicação de $V \otimes V \otimes V^*$ em V. Generalize para tensores de tipo qualquer.

9. **Densidades tensoriais e o tensor de Levi-Civita** (exercício 10 ligeiramente modificado da lista 2, do curso do Maurício Richartz)

Vamos agora construir um tensor a partir do símbolo de Levi-Civita.

(a) Seja $M^{\mu}{}_{\mu'}$ uma matrix $n \times n$ (μ indica a linha e (μ' indica a coluna). Mostre que $\det(M) = \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} M^{\mu_1}{}_1 \cdots M^{\mu_n}{}_n$. Faça a conta explícita para o caso $n = 2$ e $n = 3$.

(b) Mostre que $\tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} \det(M) = \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} M^{\mu_1}{}_{\mu'_1} \cdots M^{\mu_n}{}_{\mu'_n}$.

(c) Mostre que o símbolo de Levi-Civita se transforma pela seguinte regra:

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} = \det(J)\ \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}},$$

onde $J = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\right)$ é a matriz Jaconiana. Assim, a menos do fator $\det(J)$, o símbolo de Levi-Civita se transforma como um tensor. Como o fator $\det(J)$ aparece elevado a potência 1, dizemos que o símbolo de Levi-Civita é uma densidade tensorial de peso 1.

(d) A métrica g é um tensor do tipo $(0, 2)$ e assim se transforma como $g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}$. Mostre que seu determinante $g = \det(g_{\mu\nu})$ como $g' = \det(J)^{-2} g$. Assim, a menos do fator $\det(J)$, o determinante da métrica se transforma como um escalar. Como o fator $\det(J)$ aparece elevado à potência -2 dizemos que o determinante da métrica é uma densidade escalar de peso -2.

(e) Mostre que, dada uma densidade tensorial de peso w, podemos transformá-la em um tensor simplesmente multiplicando-a por $g^{w/2}$, se $g > 0$. Em particular, podemos definir o *tensor* de Levi-Civita $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ a partir do símbolo de Levi-Civita fazendo

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{g}\ \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}.$$

(f) Como devemos proceder no caso em que $g < 0$?

10. *(Extra)* **Formas diferenciais e integração em variedades** (exercício 11 da lista 2, do curso do Maurício Richartz)

a) Em um espaço plano, sabemos que a área de um paralelogramo gerado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é dada por $|\vec{A} \times \vec{B}|$ e que o volume de um paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ é dado por $|(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}|$. Mostre que podemos escrever $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\epsilon_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}|$ e $|(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}| = |\epsilon_{\mu\nu\rho} A^{\mu} B^{\nu} C^{\rho}|$, onde ϵ é o tensor de Levi-Civita definido no exercício anterior.

b) Seguindo a lógica acima, no espaço de Minkowski podemos definir o volume do paralelepípedo gerado pelos quadrivetores A^{μ}, B^{ν}, C^{ρ} e D^{σ} como sendo a quantidade $|\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\mu} B^{\nu} C^{\rho} D^{\sigma}|$. Dizemos que esses quadrivetores tem orientação positiva quando vale $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\mu} B^{\nu} C^{\rho} D^{\sigma} > 0$. O volume de uma região arbitrária é obtido somando-se volumes de paralelepípedos infinitesimais gerados pelos vetores $\Delta x^0 \hat{e}_0$, $\Delta x^1 \hat{e}_1$, $\Delta x^2 \hat{e}_2$, e $\Delta x^3 \hat{e}_3$, onde $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ é a base coordenada associada ao sistema de coordenadas (t, x, y, z). O volume de cada paralelepípedo infinitesimal é portanto

$$\Delta^4 V = \epsilon_{0123} \Delta x^0 \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3 = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \Delta x^\sigma \Delta x^\rho (-1)^\Pi,$$

onde Π é o sinal da permutação (i.e. $\Pi = 0$ se $\mu\nu\sigma\rho$ é uma permutação par de 0123, e $\Pi = 1$ se $\mu\nu\sigma\rho$ é uma permutação ímpar de 0123). Demonstre a segunda igualdade na relação acima.

Comentário: Mudando a notação é possível obter o elemento de volume em uma forma mais convencional. Para isso, escrevemos $d^4V = \epsilon_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ ao invés de $\Delta^4 V = \epsilon_{0123}\, \Delta x^0 \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$. Temos, portanto, que o volume de uma região arbitrária Ω é dado por

$$|\Omega| = \int_\Omega \epsilon_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \equiv \int_\Omega d^4V$$

Como $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\mu B^\nu C^\rho D^\sigma$ é um invariante (i.e. um escalar) para quaisquer quadrivetores A^μ, B^ν, C^ρ, D^σ, concluimos que a fórmula acima vale para qualquer referencial. No caso do espaço tempo plano, com a métrica $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$, temos $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\sigma\rho}$ e, portanto, o elemento de volume é simplesmente $d^4V = \epsilon_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \tilde{\epsilon}_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. No caso de uma métrica diferente (por exemplo, coordenadas esféricas), temos $d^4V = \epsilon_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{|g|}\, \tilde{\epsilon}_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{|g|}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, onde utilizamos resultados do exercício anterior. De forma mais geral, em uma variedade M de dimensão n, definimos a integral de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ como sendo

$$\int_\Omega f\, d^nV = \int_\Omega f\, \epsilon_{01\dots n-1}\, dx^0 dx^1 \dots dx^{n-1} = \int_\Omega f\, \sqrt{|g|}\, dx^0 dx^1 \dots dx^{n-1}.$$

c) O tensor de Levi Civita $\epsilon_{01\dots n-1}$ é exemplo de uma estrutura matemática chamada forma diferencial (ou simplesmente forma). As formas constituem a maneira rigorosa de se definir a integral em uma variedade, formalizando a ideia construida acima. Uma p-forma diferencial é simplesmente um tensor do tipo $(0, p)$ que é totalmente antisimétrico. Em particular, qualquer escalar é uma 0-forma, qualquer covetor (tensor do tipo $(0, 1)$) é uma 1-forma, e qualquer tensor F do tipo $(0, 2)$ cujas componentes satisfazem $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ é uma 2-forma. O espaço de todas as p-formas em uma variedade M é denotado por $\Lambda^p(M)$. É um simples exercício de combinatória mostrar que, em um ponto qualquer de uma variedade de dimensão n, existem $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ p-formas que são linearmente independentes. Consequentemente, num espaço 4-dimensional existem apenas uma 0-forma (i.e. escalares), quatro 1-formas (i.e. covetores), seis 2-formas, quatro 3-formas, e uma 4-forma que são linearmente independentes. Mostre, explicitamente, que não existem p-formas com $p > n$ num espaço de dimensão n.

d) Umas das razões pelas quais as formas são tão importantes é que elas podem ser diferenciadas e integradas sem que sejam introduzidas estruturas geométricas adicionais em uma variedade. Para entender isso, primeiro definimos o produto externo, que é uma operação entre uma p-forma e uma q-forma, produzindo uma $(p+q)$-forma. Mais precisamente, se A é uma p-forma e B é uma q-forma, então o produto externo entre A e B, denotado por $A \wedge B$, é definido como sendo a $(p+q)$-forma cujas componentes são

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots B_{\mu_{p+q}}]}$$

Já a derivada exterior, denotada pelo símbolo d, é uma operação que transforma uma p-forma em uma $(p+1)$-forma. Mais precisamente, se A é uma p-forma, definimos dA como sendo a $(p+1)$-forma cujas componentes são

$$(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p+1)\, \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]}$$

O exemplo mais simples de derivada exterior é o gradiente, que é a derivada exterior de uma 0-forma. Mostre que a derivada exterior satisfaz uma versão modificada da regra de Leibnitz: se ω é uma p-forma e η é uma q-forma, então vale

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta).$$

e) A derivada exterior tem grande importância pois, mesmo em espaços curvos, ela é um tensor (ao contrário da derivada parcial). Seja W uma 1-forma cujas componentes em uma base coordenada são W_μ. Mostre que as derivadas parciais de W, i.e. o objeto cujas componentes são $\partial_\nu W_\mu$, não se transforma como um tensor, mas que a derivada exterior de W, i.e. dW, se transforma sim como um tensor.

f) Seja ω uma p-forma. Mostre que $d^2\omega = d(d\omega) = 0$. **Comentário:** dizemos que uma p-forma A é fechada se $dA = 0$ e dizemos que ela é exata se existe uma $(p-1)$-forma B tal que $A = dB$. Toda forma exata é fechada, mas nem toda forma fechada é exata.

g) Em uma variedade M de dimensão n, a maneira rigorosa de se entender a integral é através de formas diferenciais. Mais precisamente, a integral sobre uma região n-dimensional $\Sigma \subset M$, $\int_\Sigma$, é uma transformação que leva um campo de n-formas em um número real. Por exemplo, em uma dimensão, temos apenas uma 1-forma que é linearmente independente. Se x denota a coordenada, então podemos escrever qualquer 1-forma ω como sendo $\omega = \omega(x)dx$. A integral é, nesse caso, simplesmente $\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma \omega(x)\, dx$. Perceba que estamos acostumados a pensar em dx como uma distância infinitesimal, mas aqui dx representa uma 1-forma (mais precisamente, um campo de 1-formas). No caso geral de $\Lambda^n(M)$ já vimos que existe apenas uma n-forma que é linearmente independente, que serve como base para $\Lambda^n(M)$, e portanto qualquer n-forma ω é um múltiplo dessa n-forma base. Repare que podemos tomar como base qualquer n-forma em $\Lambda^n(M)$ que não seja nula. Se $(x^1, \ldots, x^n)$ são as coordenadas utilizadas em M, então gostaríamos de tomar a n-forma base como sendo $dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$. O problema é que $dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$ não se transforma como um tensor, mas sim como uma densidade tensorial. Para entender isso, vamos assumir $n = 2$ e considerar dois sistemas de coordenadas distintos: $\{x^1, x^2\}$ e $\{y^1, y^2\}$. Partindo de $dx^1 \wedge dx^2$, use as transformações dos covetores dx^1 e dx^2 em termos de dy^1 e dy^2 para encontrar a relação entre $dx^1 \wedge dx^2$ e $dy^1 \wedge dy^2$ e concluir que $dx^1 \wedge dx^2$ se transforma como uma densidade tensorial de peso 1.

h) Para generalizar o resultado do item anterior, mostre primeiro que

$$dx^0 \wedge \ldots dx^{n-1} = \frac{1}{n!} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \ldots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n}.$$

Usando esses fatos, juntamente com os resultados do exercício anterior, mostre que $dx^0 \wedge \ldots dx^{n-1}$ é uma densidade tensorial de peso 1. Consequentemente, não podemos usar $dx^0 \wedge \ldots dx^{n-1}$ como a n-forma base de $\Lambda^n(M)$. O que podemos usar é a quantidade

$$(n!)^{-1} \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \ldots dx^{\mu_n} = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \ldots dx^{n-1}.$$

Portanto, qualquer n-forma ω em uma variedade M de dimensão n pode ser escrita como $\omega = \omega(x^\mu)\sqrt{|g(x^\mu)|} dx^0 \wedge \ldots dx^{n-1}$. Em um outro sistema de coordenadas, temos simplesmente $\omega = \omega(x^{\mu'})\sqrt{|g(x^{\mu'})|} dx^{0'} \wedge \ldots dx^{n-1'}$. Como $\omega(x^\mu)$ pode ser uma função qualquer, dada uma função $f : M \to \mathbb{R}$, definimos a integral de f sobre a região $\Sigma \subset M$, como sendo (compare com os resultados do exercício anterior)

$$\int_\Sigma f \sqrt{|g|}\, dx^0 dx^1 \ldots dx^{n-1}.$$