

# Lista 1 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, agosto de 2018

1. Duas irmãs gêmeas, Gyða e Kristín, estão inicialmente na origem de um referencial inercial  $K$ . Gyða dá adeus a Kristín e segue viagem de forma que, no referencial  $K$  (em unidades em que  $c = 1$ ),

$$x_{\text{Kristín}}(t) = 0, \quad x_{\text{Gyða}}(t) = \text{sen}(t + a) - \text{sen}(a),$$

com  $a = \pi/6$ .

- (a) Desenhe o diagrama espaço-temporal dos eventos descritos acima, desde a partida de Gyða até seu reencontro com Kristín.

- (b) Quanto tempo terá passado para Kristín entre a despedida e o reencontro? E para Gyða? Interprete.

- (c) A situação é simétrica entre Gyða e Kristín? Interprete.



2. Considere o espaço de Minkowski com sua métrica usual e dimensão  $D \geq 3$ . Mostre que se o vetor  $\lambda^\mu$  é ortogonal a:

- (a) um vetor tipo tempo  $t^\mu$ , então  $\lambda^\mu$  é tipo espaço.

- (b) um vetor tipo luz  $n^\mu$ , então  $\lambda^\mu$  é ou tipo espaço ou proporcional a  $n^\mu$ .

- (c) um vetor tipo espaço  $s^\mu$ , então  $\lambda^\mu$  pode ser tipo tempo, tipo luz ou tipo espaço.

3. (Problema 7, apêndice A do Foster & Nightingale) Uma distribuição uniforme de carga com densidade própria  $\rho_0$  encontra-se em repouso no referencial  $K$ . Mostre que um observador se movendo com velocidade  $\mathbf{v}$  com relação a  $K$  vê uma densidade de carga  $\gamma\rho_0$  e uma densidade de corrente  $-\gamma\rho_0\mathbf{v}$ .

4. (Problema 9, apêndice A do Foster & Nightingale) Mostre que a fórmula do efeito Doppler pode ser escrita de maneira invariante como

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{u_{\text{source}}^\mu k_\mu}{u^\nu k_\nu}$$

5. (Problema 16, capítulo 1 do Schutz) Use as transformações de Lorentz para derivar diretamente (a) a dilatação do tempo, e (b) as fórmulas de contração de Lorentz. Faça isso identificando os pares de eventos em que as separações (no tempo ou no espaço) devem ser comparadas e, em seguida, aplicando as transformações de Lorentz.

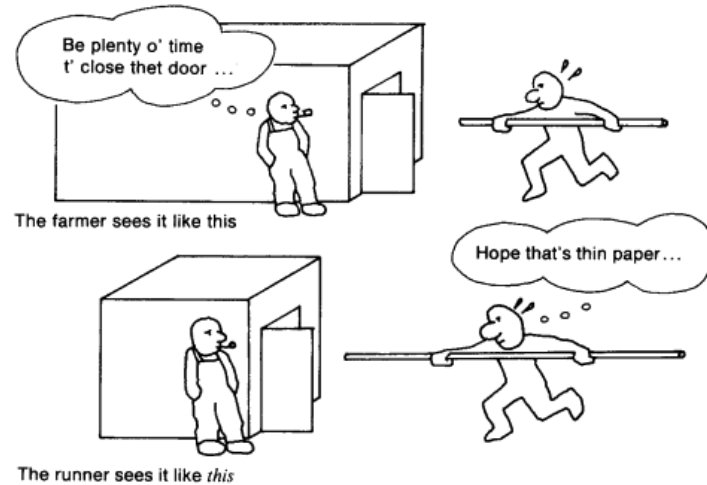


Figura 1: Paradoxo da vara e do celeiro (problema 6 desta lista). Figura retirada da página 80 do ótimo livro *Geometry, relativity and the fourth dimension*, de Rudolf v.B. Rucker (Dover, 1977).

6. (Problema 17, capítulo 1 do Schutz) Uma vara de  $20m$  de comprimento se encontra no chão, ao lado de um celeiro de  $15m$  de comprimento, onde Deslou descansa. Seu amigo Defleche pega essa vara, leva-a para longe, e corre com ela em direção ao celeiro a uma velocidade de  $0.8c$ . Deslou permanece em repouso ao lado da porta do celeiro.
- Qual o tamanho da vara medido por Deslou quando esta vem em direção ao celeiro?
  - A porta do celeiro está inicialmente aberta e, imediatamente após Defleche e a vara estarem inteiramente dentro dele, Deslou fecha a porta. De acordo com Deslou, quanto tempo se passa depois de a porta estar fechada para que a frente da vara bata na outra extremidade do celeiro? Calcule o intervalo entre os eventos “fechar a porta” e “bater na parede”. É tipo tempo, espaço ou nulo?
  - Qual é o comprimento do celeiro e da vara como medidos por Defleche enquanto este corre?
  - Defleche acredita que a vara está totalmente dentro do celeiro quando sua extremidade bate no final do celeiro? Você pode explicar por quê?
  - Após a colisão, a vara e Defleche param em relação ao celeiro. Do ponto de vista de Deslou, a vara de  $20m$  está agora dentro de um celeiro de  $15m$ , já que a porta do celeiro foi fechada antes de a vara parar. Como isso é possível? Alternativamente, do ponto de vista de Defleche, a colisão deveria ter parado a vara antes que a porta fosse fechada, de maneira que a porta nem sequer pode ter sido fechada. E então, o que de fato acontece?

- (f) Desenhe um diagrama do espaço-tempo do ponto de vista de Deslous e use-o para ilustrar e justificar todas as suas conclusões.
7. (Problema 21, capítulo 1 do Schutz) Mostre que se dois eventos são separados por um vetor tipo tempo, existe um referencial de Lorentz no qual eles ocorrem no mesmo ponto, ou seja, com os mesmos valores de coordenadas espaciais. Da mesma forma, mostre que, se dois eventos são separados por um vetor tipo tempo espaço, existe um referencial de Lorentz em que eles são simultâneos.
8. (Problema 26, capítulo 2 do Schutz) Calcule a energia que é necessária para acelerar uma partícula de massa de repouso  $m \neq 0$  de uma velocidade  $v$  para uma velocidade  $v + \delta v$ , em primeira ordem em  $\delta v$ . Mostre que seria necessária uma quantidade infinita de energia para acelerar a partícula até a velocidade da luz.
9. (Problema 31, capítulo 2 do Schutz) Um fóton de frequência  $\nu$  é refletido (sem mudança de frequência) por um espelho, com um ângulo de incidência  $\theta$ . Calcule o momento transferido para o espelho. Qual momento seria transferido se o fóton fosse absorvido em vez de refletido?
10. (Problema 32, capítulo 2 do Schutz) Considere que uma partícula de carga  $e$  e massa de repouso  $m$ , inicialmente em repouso no laboratório, sofre a colisão de um fóton de frequência inicial  $\nu_i$ . Suponha que o fóton espalhado saia em um ângulo  $\theta$  em relação à direção incidente. Use a conservação do quadrimomento para deduzir que a frequência final do fóton é dada por

$$\frac{1}{\nu_f} = \frac{1}{\nu_i} + h \left( \frac{1 - \cos \theta}{m} \right).$$

Esse é o chamado de espalhamento Compton.