

Sistemas de Equações Lineares com Coeficientes Reais

1. Introdução

Um conjunto de m equações na forma

$$(1.1) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

é chamado sistema (Σ) com n incógnitas, também representado pelo produto de matrizes:

$$(\Sigma): \quad \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{X}_{n \times 1} = \mathbf{B}_{m \times 1}, \quad \text{onde}$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m, \\ j=1, \dots, n}}, \quad \mathbf{B} = (b_i)_{i=1, \dots, m}, \quad \mathbf{X} = (x_i)_{i=1, \dots, n}$$

O conjunto de soluções de (Σ) será dado por $[\Sigma] = \{\mathbf{X}_{n \times 1} \mid \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}\}$, i.e., \mathbf{X} satisfaz *todas* as equações de (1.1).

AFIRMAÇÃO. $[\Sigma] = [\Sigma']$, onde (Σ') é obtido de (Σ) através de um número *finito* de operações elementares do tipo (1),(2) e (3), que consistem em:

- (1) Trocar a ordem de duas linhas de (Σ) .
- (2) Multiplicar *uma* linha de (Σ) por um escalar¹ k , $k \neq 0$.
- (3) Substituir a i -ésima linha pela soma da i -ésima com a j -ésima linha de (Σ) .

DEMONSTRAÇÃO. Para provar (1), basta verificar que, aplicada a operação (1), as equações do sistema (Σ') a serem satisfeitas são as mesma de (Σ) , o que trivialmente implica o mesmo conjunto solução.

Para provar (2), seja a i -ésima linha de (Σ) multiplicada por k , $k \neq 0$,

$$k \sum_{j=1}^n a_{ij} = kb_i$$

Como k é escalar não-nulo, a i -ésima linha de (Σ') é igual à i -ésima linha de (Σ) . Assim, $(\Sigma') = (\Sigma)$, o que implica $[\Sigma'] = [\Sigma]$.

Finalmente, para provar (3),

- (a) Seja \mathbf{X}_0 tal que satisfaça (Σ) .

Obtendo (Σ') por (3), temos que todas as equações de (Σ') , *exceto a i -ésima*, permanecem inalteradas, sendo portanto satisfeitas por \mathbf{X}_0 .

Para que \mathbf{X}_0 satisfaça também a i -ésima equação de (Σ') , é necessário que para $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ verifique-se

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} + a_{jk})x_k = (b_i + b_j) \implies \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k = b_i + b_j$$

¹Por escalar, entenda-se qualquer número real

Ou seja, \mathbf{X}_0 deve satisfazer a i - e j -ésima linha de (Σ) , o que é verdade por hipótese.

Portanto, \mathbf{X}_0 satisfaz $(\Sigma') \implies [\Sigma] \subseteq [\Sigma']$.

- (b) Seja \mathbf{Y}_0 tal que satisfaça (Σ') . Logo, pela operação (3), todas as equações de (Σ) , *exceto a i -ésima*, são iguais às de (Σ') , sendo portanto satisfeitas por \mathbf{Y}_0 . Como \mathbf{Y}_0 satisfaz à i -ésima equação de (Σ') e à j -ésima equação de (Σ) , então \mathbf{Y}_0 satisfaz à diferença entre as duas,

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} + a_{jk})x_k - \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k = (b_i + b_j) - b_j \implies \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i$$

Ou seja, \mathbf{Y}_0 satisfaz também à i -ésima equação de (Σ) . Portanto, todas as equações de (Σ) são satisfeitas por $\mathbf{Y}_0 \implies [\Sigma'] \subseteq [\Sigma]$.

Com isso, concluímos que $[\Sigma] = [\Sigma']$ □

2. Método de Solução do Sistema por Escalonamento

Como acabamos de verificar na seção anterior, cada vez que aplicamos qualquer uma das operações (1),(2) e (3) em (Σ) , obtemos um sistema (Σ') com a mesma solução. Dizemos portanto que (Σ) e (Σ') são equivalentes. Assim, se aplicamos essas operações elementares de forma sistemática, chegaremos a um sistema equivalente ao inicial que poderá ser resolvido por inspeção. Este consite no chamado Método de Solução do Sistema por Escalonamento da Matriz Aumentada², onde a matriz aumentada $\mathbf{D}_{m \times n}$ de (Σ) é dada por

$$(2.1) \quad \mathbf{D}_{m \times n+1} = \begin{cases} (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \\ (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=n+1}} \end{cases}$$

Apresentaremos a seguir exemplos práticos de aplicação do método.

EXEMPLO 1.1. Consideremos o seguinte sistema linear:

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 40 \\ -2 & -4 & 18 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ -38 \\ 7 \end{pmatrix}$$

A matriz aumentada associada a tal sistema é

$$(2.3) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 40 & 68 \\ -2 & -4 & 18 & -38 \\ 1 & 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Primeiramente, devemos obter 1 como entrada em a_{11} , o que pode ser feito através da operação (1) ou (2). Optamos por aplicar (1),

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ -2 & -4 & 18 & -38 \\ -1 & 2 & 40 & 68 \end{pmatrix}$$

O próximo passo é zerar as demais entradas da primeira coluna.

Para tanto, podemos – segundo a operação (2) – multiplicar a linha 2 por $(\frac{1}{2})$ e

²também conhecido como Método de Gauss-Jordan

somar a ela a linha 1 – pela operação (3)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ -1 & -2 & 9 & -19 \\ -1 & 2 & 40 & 68 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -12 \\ -1 & 2 & 40 & 68 \end{pmatrix}$$

Somando a linha 1 à linha 3

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 5 & 35 & 75 \end{pmatrix}$$

Repetindo o procedimento, devemos obter $a_{22} = 1$ e zerar a entrada em a_{32} . Como já temos $a_{22} = 1$, basta multiplicar a última linha por $(\frac{1}{5})$ e somar a linha 2 a ela.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & -1 & -7 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

E por fim, multiplicando a linha 3 por $(-\frac{1}{3})$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta é a forma escalonada da matriz (2.3).

Assim, o sistema (2.2) reduz-se à

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuja solução é

$$x = 60 \qquad y = -16 \qquad z = 1$$

Nesse caso, temos a seguinte interpretação geométrica: cada equação deste sistema representa um hiperplano 2-dimensionais em \mathbb{R}^3 . Temos portanto três hiperplanos que interseccionam-se exatamente no ponto $(60, -16, 1)$.

EXEMPLO 1.2. Dado o sistema (Γ):

$$(2.4) \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 & 68 & -16 \\ 6 & 48 & 276 & -30 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 96 \\ 9 \\ -27 \end{pmatrix}$$

Pelo método de escalonamento:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -4 & 4 & 68 & -16 & -28 \\ 6 & 48 & 276 & -30 & 96 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ -3 & -3 & 9 & -6 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ 6 & 48 & 276 & -30 & 96 \\ -4 & 4 & 68 & -16 & -28 \\ -3 & -3 & 9 & -6 & -27 \end{pmatrix} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ -1 & -8 & -46 & 5 & -16 \\ -1 & 1 & 17 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 3 & -2 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -49 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Assim, nosso sistema (Γ) acaba reduzido a

$$(2.5) \quad \begin{cases} x+y-3z+2w = 9 \\ y+7z-w = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (2.5) em função dos parâmetros livres λ e $\varphi \in \mathbb{R}$, temos como solução

$$(2.6) \quad (x, y, z, w) = (8 + 10\lambda - 3\varphi, 1 - 7\lambda + \varphi, \lambda, \varphi)$$

que pode ser reescrito como

$$(2.7) \quad (x, y, z, w) = (8, 1, 0, 0) + \lambda(10, -7, 1, 0) + \varphi(-3, 1, 0, 1)$$

Podemos interpretar geometricamente o sistema, com cada equação representando um hiperplano 3-dimensionais em \mathbb{R}^4 , sendo que os hiperplanos dados pela terceira e quarta equações de (2.4) coincidem. A intersecção desses quatro hiperplanos resulta num subespaço afim 2-dimensionais, parametrizado em (2.6).

3. Sistemas Homogêneos Associados

A todo sistema linear (Σ) em \mathbb{R}^n , podemos associar um sistema linear homogêneo (Σ_0) , dado por

$$(3.1) \quad (\Sigma_0) : \quad \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Definimos α como uma transformação linear³

$$\alpha(\mathbf{X}) := \mathbf{A}\mathbf{X}$$

cujos espaço nulo (kernel) é um subespaço linear de \mathbb{R}^n dado por

$$\ker \alpha := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(\mathbf{X}) = \mathbf{0}\}$$

Concluimos portanto que o espaço solução $[\Sigma_0]$ será justamente o kernel de α .

Podemos determinar o espaço solução $[\Sigma]$ a partir do kernel de α .

$$(3.2) \quad [\Sigma] = \ker \alpha + \mathbf{X}_B = [\Sigma_0] + \mathbf{X}_B$$

onde $[\Sigma_0]$ é a solução de (3.1) e \mathbf{X}_B é uma solução particular de (Σ) .

³A ser estudado detalhadamente em Álgebra Linear

No exemplo 1.2, o sistema homogêneo associado seria

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 68 & -16 \\ 6 & 48 & 276 & -30 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}$$

O espaço solução desse sistema seria o subespaço 2-dimensionais de \mathbb{R}^4 , parametrizado por

$$\ker \alpha = \{(x, y, z, w) = \lambda(10, -7, 1, 0) + \varphi(-3, 1, 0, 1), \quad \lambda, \varphi \in \mathbb{R}\}$$

Uma possível solução *particular* para o sistema não-homogêneo (2.4) seria o ponto $(x, y, z, w) = (12, -4, 1, 2)$. Assim, por (3.2), obteríamos como solução para (2.4) o mesmo subespaço parametrizado em (2.6),

$$[\Gamma] = \{(x, y, z, w) = (12, -4, 1, 2) + \mu(10, -7, 1, 0) + \nu(-3, 1, 0, 1), \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$$

4. Exercícios

- (1) Determinar a e b para que o sistema abaixo seja possível e determinado :

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

- (2) Determinar o valor de k para que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$$

tenha :

- (a) solução única;
 (b) nenhuma solução;
 (c) mais de uma solução.
- (3) Resolver, por escalonamento, os seguintes sistemas, expressar as soluções em termos de geradores e interpretar geometricamente os resultados obtidos :

(a)

$$\begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + 5y + 4z - 13w = 3 \\ 3x - y + 2z + 5w = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4w = 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

- (4) Dado o sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x - y + 3z - t = -1 \end{cases}$$

- (a) Determine a solução do sistema homogêneo associado.
 (b) Determine a solução do sistema dado.
 (c) Expresse a solução anterior em termos de geradores.

(5) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{3}{v} = 8 \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -1 \end{cases}$$

(6) Discuta os seguintes sistemas

(a)

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 5 \\ ax + z = 4 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2w = 1 \\ x + (k+1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + my - (m+1)z = 1 \\ mx + 4y + (m-1)z = 3 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 9 \\ 6x + 7z = 13 \\ 4x + 2y + az = b \end{cases}$$

(7) Qual é a condição necessária e suficiente para que a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x - 4y = a \\ 6x + ky = b \end{cases}$$

seja um par de números inteiros, quaisquer que sejam a e b inteiros ?

(8) Sabendo que o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + 2y + 3z = 7 \\ m^2x + 4y + 9z = 1 \end{cases}$$

admite uma única solução, podemos concluir que m pode assumir todos os valores do intervalo real :

(a) $[0,1]$ (b) $[1,2]$ (c) $[2,3]$ (d) $[3,4]$ (e) $[0,4]$

(9) Seja

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

a matriz ampliada de um sistema linear. Para que valores de a e b o sistema admite :

- (a) solução única
- (b) solução com um parâmetro
- (c) solução com dois parâmetros
- (d) nenhuma solução

(10) Discuta a solução do sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

Acrescente a equação $2z + kw = 9$ a este sistema e encontre um valor de k que o torne impossível.

- (11) Determine os valores de a , b e c que façam com que o gráfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passe pelos pontos $(1, 2)$, $(-1, 6)$, $(2, 3)$.
- (12) Dados $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = 2ax + b$, determine os valores de a , b e c para que f passe pelos pontos $(-1, 0)$, $(2, -9)$ e que 2 seja raiz de g .
- (13) Determinar os polinômios reais $q(x)$ do segundo grau que verificam a identidade $q(x) = q(1-x) \forall x \in \mathbb{R}$.
- (14) Considere as matrizes reais: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determine valores reais para k , x e y tais que $AB = kB$.
- (15) Repita o exercício anterior para as matrizes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este exercício merece algum comentário. Cada valor obtido para o escalar k é chamado um **autovalor** da matriz A , e cada solução B correspondente é chamada de **autovetor** de A associado ao autovalor k . Você seria capaz de interpretar geometricamente a situação com a qual estamos lidando?

- (16) Encontre os autovalores e os autovetores das seguintes matrizes :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (17) Considere os seguintes sistemas lineares abaixo, onde os coeficientes tomam valores no corpo dos complexos (\mathbb{C}).

$$\begin{cases} 2x + (-1 + i)y + w = 0 \\ 3y - 2iz + 5w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (1 + \frac{i}{2})x + 8y - iz - w = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + z + 7w = 0 \end{cases}$$

O segundo sistema pode ser obtido a partir do primeiro através de operações elementares?

- (18) Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} (1 - i)x - iy = 0 \\ 2x + (1 - i)y = 0 \end{cases}$$

- (19) Considere o sistema de equações $AX = 0$, onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é uma matriz com coeficientes complexos. Mostre que :

(a) Se $ad - bc \neq 0$, o sistema $AX = 0$ possui apenas a solução trivial $x = y = 0$.

(b) Se $ad - bc = 0$ e alguma entrada de A é não nula, então existe uma solução (x^0, y^0) tal que (x, y) é solução se, e somente se, existe um escalar complexo k tal que $x = kx^0$ e $y = ky^0$.

- (20) Encontre duas matrizes 2×2 distintas tais que $A^2 = 0$ mas $A \neq 0$.
- (21) Sejam A, B matrizes tais que $AB = I$, onde I é a matriz identidade da ordem necessária. Mostre que $BA = I$. Isto é válido para matrizes de quaisquer ordens?
- (22) Seja

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

uma matriz 2×2 . Mostre que existem matrizes 2×2 tais que $C = AB - BA$ se, e somente se, $C_{11} + C_{22} = 0$.

(23) Mostre que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

é inversível.

CAPÍTULO 2

Vetores

1. Definição algébrica

A seguir, definiremos *axiomaticamente* um espaço vetorial real (\mathbb{R}^n).

DEFINIÇÃO 2.1. Um espaço vetorial real \mathbb{R}^n é estabelecido pela seguinte estrutura:

- (1) O conjunto de todas as n-uplas $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, com $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.
- (2) Duas operações, denominadas Soma e Multiplicação por escalar, definidas de forma a possuírem as seguintes propriedades.
Sejam $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

Propriedades da Soma

$$(S1) \quad \mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{X}$$

$$(S2) \quad (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \mathbf{Z} = \mathbf{X} + (\mathbf{Y} + \mathbf{Z})$$

$$(S3) \quad \text{Existe um único elemento } \mathbf{O} \text{ tal que } \mathbf{O} + \mathbf{X} = \mathbf{X}$$

$$(S4) \quad \text{Para cada elemento } \mathbf{X} \text{ existe um único elemento } -\mathbf{X} \text{ tal que } \mathbf{X} + (-\mathbf{X}) = \mathbf{0}.$$

Propriedades da Multiplicação por escalar

$$(M1) \quad r(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = r\mathbf{X} + r\mathbf{Y}$$

$$(M2) \quad 1\mathbf{X} = \mathbf{X}$$

$$(M3) \quad r s(\mathbf{X}) = r(s\mathbf{X})$$

$$(M4) \quad (r + s)\mathbf{X} = r\mathbf{X} + s\mathbf{X}$$

Assim, definimos as duas operações como

(A) A soma $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ é dada por

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

e portanto também pertence a \mathbb{R}^n .

(B) A multiplicação por escalar $r\mathbf{X}$ é dada por

$$r\mathbf{X} = (rx_1, \dots, rx_n)$$

e portanto também pertence a \mathbb{R}^n .

2. Definição Geométrica

A noção mais primária que temos de vetor é aquela de caráter puramente geométrico, amplamente usada na Física para representar forças, velocidades, momentos, etc. Isso nos motiva a formular uma definição geométrica para vetores, restrita a \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .¹

DEFINIÇÃO 2.2. A uma classe de equivalência de segmentos de reta orientados chamamos de vetor \vec{v} . Portanto, todas as setas com mesma magnitude, direção e sentido constituem uma mesma classe de equivalência e são representadas por um vetor \vec{v} .

¹Espaço euclidiano bi e tridimensional, respectivamente.

Para um vetor \vec{v} em $\tilde{\mathbb{R}}^2$ ou $\tilde{\mathbb{R}}^3$ definimos geometricamente as operações de soma e multiplicação por escalar (Fig.1), que têm como consequência o mesmo elenco de propriedades dadas em (A) e (B), agora, porém, derivadas a partir da geometria – conforme exemplificado nas Fig.2 e Fig.3.

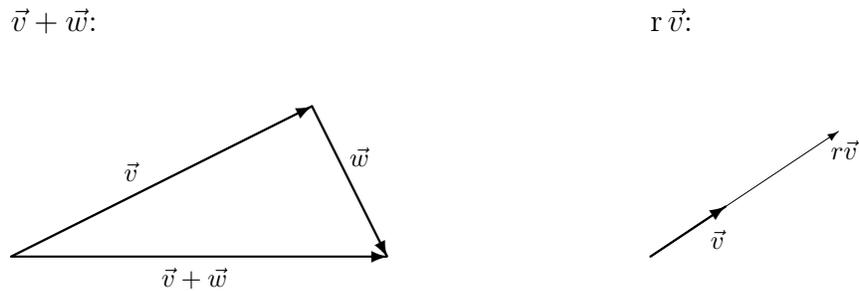


FIGURA 1. Soma e Multiplicação por escalar em $\tilde{\mathbb{R}}^2$

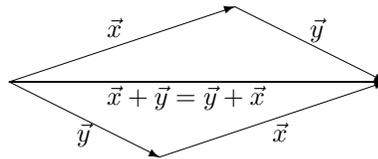


FIGURA 2. Propriedade Comutativa, pela soma dos lados do paralelogramo em $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

$$r(\vec{x} + \vec{y}) = r\vec{x} + r\vec{y}$$

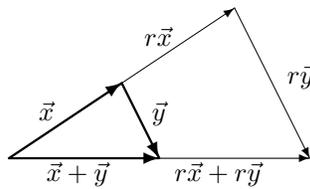


FIGURA 3. Propriedade Distributiva, por semelhança de triângulos em $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

3. A equivalência entre definição algébrica e definição geométrica

Por ora, nos restringiremos a $\tilde{\mathbb{R}}^2$. Todos os resultados aqui derivados podem ser analogamente estendidos a $\tilde{\mathbb{R}}^3$.

Demonstraremos a seguir que todo vetor $\vec{v} \in \tilde{\mathbb{R}}^2$ pode ser unicamente determinado por uma dupla (a, b) .

DEMONSTRAÇÃO. Em $\tilde{\mathbb{R}}^2$, fixamos um ponto $\mathbf{0}$ do plano (origem). Em $\mathbf{0}$, fixamos um par *ordenado* de vetores não-colineares $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

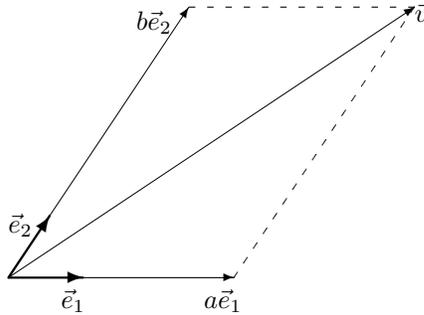


FIGURA 4. Representação única de \vec{v} , por soma de vetores

Pela Fig.4, vemos que todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado de *maneira única* através da soma de vetores

$$\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

pois se houvesse uma segunda representação

$$\vec{v} = a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2, \quad a', b' \in \mathbb{R}$$

então

$$\vec{0} = (a - a')\vec{e}_1 + (b - b')\vec{e}_2$$

$$-(a - a')\vec{e}_1 = (b - b')\vec{e}_2 \implies \begin{cases} (1) \vec{e}_1 \text{ e } \vec{e}_2 \text{ são colineares} & \text{ou} \\ (2) a = a' \text{ e } b = b' \end{cases}$$

Por hipótese, \vec{e}_1 e \vec{e}_2 não são colineares, o que invalida (1). Resta-nos (2), que implica unicidade de coordenadas para \vec{v} .

Assim, podemos representar unicamente \vec{v} por

$$(3.1) \quad \vec{v} \equiv (a, b)$$

□

TEOREMA 2.1. Se $\vec{v} \equiv (a, b)$ e $\vec{w} \equiv (c, d)$ então

$$\vec{v} + \vec{w} = (a + c, b + d)$$

Para demonstração, vide Fig.5.

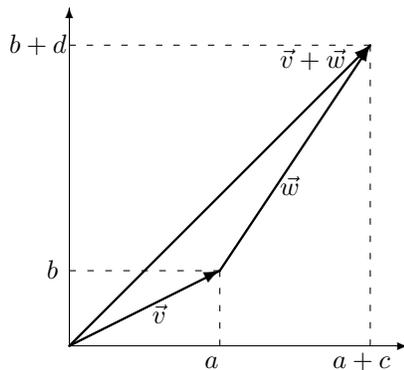


FIGURA 5. Teorema 2.1

TEOREMA 2.2. Se $\vec{v} \equiv (a, b)$ e r é escalar,

$$r\vec{v} = (ra, rb)$$

Para demonstração, vide Fig.6.

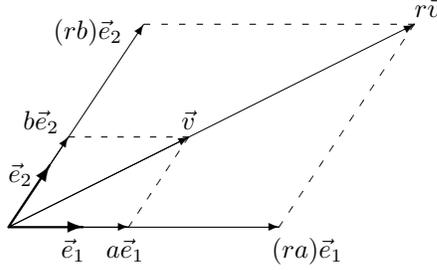


FIGURA 6. Teorema 2.2

De maneira análoga, dado um par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (sempre com $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e $\mathbf{0}$ fixos em $\tilde{\mathbb{R}}^2$) temos

$$\mathbb{R}^2 \ni (a, b) \longmapsto \vec{v} \in \tilde{\mathbb{R}}^2 \text{ tal que } \vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$

com as propriedades

- (a) $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \longmapsto \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- (b) $\lambda(a, b) \longmapsto \lambda\vec{v}$

Portanto, o ponto $\mathbf{0}$ (que agora também pode ser identificado por $\vec{0}$) e o par ordenado $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ fixados nos permitem uma identificação entre \mathbb{R}^2 e $\tilde{\mathbb{R}}^2$, que respeita soma e multiplicação por escalar, e, conseqüentemente, suas respectivas propriedades (seção 1).

EXEMPLO 2.1. Num plano cartesiano, dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, determinaremos a seguir qual é o vetor \vec{c} que vai de A a B .

No plano xy , tomamos como ponto $\vec{0}$ a origem do plano e como $\{e_1, e_2\}$ os vetores unitários sobre os eixos x e y , $\hat{i} = (1, 0)$ e $\hat{j} = (0, 1)$.

O ponto $A = (a_1, a_2)$ deste plano pode ser identificado através do vetor \vec{a} , que vai da origem ao ponto A . Da mesma forma, o ponto $B = (b_1, b_2)$ também pode ser identificado através do vetor \vec{b} , indo da origem ao ponto B . Dessa forma, \vec{c} pode ser facilmente encontrado através da soma de vetores $\vec{b} + (-1)\vec{a}$. Pelos teoremas 2.1 e 2.2, teremos $\vec{c} \equiv (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Analogamente, em \mathbb{R}^3 , dados os pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, teremos que o vetor \overrightarrow{AB} que vai do ponto A ao ponto B é $\overrightarrow{AB} \equiv (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

EXEMPLO 2.2. Exemplificaremos a seguir como a escolha de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ afeta a identificação entre \mathbb{R}^2 e $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

Dado o vetor \vec{v} , tomamos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{\hat{i}, \hat{j}\}$ e a origem $\vec{0}$. Podemos descrever o vetor \vec{v} como $\vec{v} \equiv (9, 7)$ (dado).

Tomaremos agora os vetores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{(-1, 2), (5, 3)\}$ (em relação à origem e a $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, estabelecidos inicialmente). Mantendo a origem e usando este novo par ordenado de vetores, a descrição de \vec{v} será alterada para $\vec{v} \equiv (6, 1)$.

Aqui torna-se evidente a importância do par $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ser *ordenado*: se ao invés de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{(-1, 2), (5, 3)\}$ tivéssemos tomado $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{(5, 3), (-1, 2)\}$, a descrição de \vec{v} seria alterada para $\vec{v} \equiv (1, 6)$. Portanto, a ordenação adotada no

conjunto de n vetores linearmente independentes interfere na descrição vetorial por meio de n -uplas.

4. Exercícios

Wexler, C., *Analytic Geometry – A vector approach*. Grupos de Exercícios 2-1, 2-2 e 2-3.

Independência Linear em \mathbb{R}^n

1. Introdução

Vimos no capítulo anterior que um vetor \vec{v} em \mathbb{R}^2 pode ser representado a partir de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ não-colineares, através da combinação linear $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.

Em \mathbb{R}^n , interessa-nos saber quantos vetores \vec{e}_i podemos encontrar, tais que nenhum deles possa ser expresso como uma combinação linear dos demais vetores \vec{e}_i . Dizemos nesse caso que $\{\vec{e}_i\} = \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ são linearmente independentes.

DEFINIÇÃO 3.1. Dados $\{\vec{v}_i\} = \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$, dizemos que tais vetores são linearmente independentes quando

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad \text{se e somente se} \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

Se o conjunto de vetores $\{\vec{v}_i\}$ não é linearmente independente, dizemos que é então linearmente dependente.

A definição nos afirma portanto que o vetor $\vec{0}$ possui uma representação *única* – que é a trivial – através da combinação linear dos vetores em $\{\vec{v}_i\}$.

Na prática, o conceito de independência linear implica que, fixados $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ linearmente independentes, então qualquer $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ou é representado *de forma única* por combinação linear de $\{\vec{v}_i\}$ ou não existe $b_i, i = 1, \dots, k$ tal que $\vec{u} = \sum_{i=1}^k b_i \vec{v}_i$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja \vec{u} tal que possa ser representado por uma combinação linear de $\{\vec{v}_i\}$,

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^k c_i \vec{v}_i$$

Suponhamos que esta representação não é única. Então,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \sum_{i=1}^k c_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^k c'_i \vec{v}_i \\ \sum_{i=1}^k c_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^k c'_i \vec{v}_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^k (c_i - c'_i) \vec{v}_i &= 0 \end{aligned}$$

Seja $a_i = c_i - c'_i$,

$$\sum_{i=1}^k a_i \vec{v}_i = 0$$

Mas, por hipótese, $\{\vec{v}_i\}$ é linearmente independente. Então, para todo i ,

$$a_i = 0 \implies c_i = c'_i$$

A representação é portanto única. \square

Note que se $\{\vec{v}_i\}$ for linearmente dependente, teremos pela definição que para

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_j \vec{v}_j + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$$

existe *pelo menos* um $\alpha_j \neq 0$. Então,

$$(1.2) \quad \alpha_j \vec{v}_j = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$$

$$(1.3) \quad \vec{v}_j = \frac{\alpha_1}{\alpha_j} \vec{v}_1 + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_j} \vec{v}_k$$

O fato de $\{\vec{v}_i\}$ ser linearmente dependente permite que elementos do conjunto possam ser escritos como combinação linear dos demais, o que acaba tendo como consequência representações de \vec{u} não únicas.

EXEMPLO 3.1. Tomemos k vetores \vec{v}_i em \mathbb{R}^n . Com eles, construímos a matriz \mathbf{L} , cuja i -ésima coluna é determinada por \vec{v}_i .

$$(1.4) \quad \mathbf{L} = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \dots \mid \vec{v}_k)$$

Logo, qualquer dependência linear entre $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ implicará dependência linear entre as respectivas colunas de \mathbf{L} .

Discutir a independência linear de $\{\vec{v}_i\}$ corresponde a resolver o sistema

$$(1.5) \quad \mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

onde $\mathbf{X} = (x_{i1})_{i=1, \dots, k}$ são os escalares da combinação linear que determinará $\mathbf{0}$.

Para (1.5) podemos ter

- (1) Solução única $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. As colunas de \mathbf{L} serão linearmente independentes.
- (2) Se a solução de \mathbf{X} não for única, o vetor $\mathbf{0}$ não terá representação única em $\{\vec{v}_i\}$ e portanto, as colunas não serão linearmente independentes. Conforme visto no Capítulo 1, tal solução será um subespaço em \mathbb{R}^n com d parâmetros livres e, como se trata de um sistema homogêneo, esse subespaço será o kernel de $\alpha(\mathbf{X}) = \mathbf{L}\mathbf{X}$. Veremos na próxima seção que, nesse caso, dentre os k vetores em $\{\vec{v}_i\}$, teremos apenas $(n - d)$ vetores linearmente independentes.

EXEMPLO 3.2. Em \mathbb{R}^n , dados k vetores \vec{v}_i , é plausível perguntar-nos acerca do número *máximo* de vetores linearmente independentes que podemos encontrar em tal espaço. Provaremos a seguir que, escolhendo adequadamente, teremos *no máximo* n vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n .

Tomando os k vetores em \mathbb{R}^n , seja $k > n$. A matriz \mathbf{M} cujas linhas são $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ é

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

Podemos escalonar \mathbf{M} . Porém, a forma escalonada da matriz nos obrigará a ter, no máximo, n linhas linearmente independentes, pois o escalonamento mais completo

que se pode obter de \mathbf{M} é

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & v'_{12} & \cdots & v'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v'_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Embora as linhas de \mathbf{M}' contenham vetores \vec{v}'_i diferentes dos \vec{v}_i iniciais, a quantidade de vetores linearmente independentes em $\{\vec{v}_i\}$ e $\{\vec{v}'_i\}$ é a mesma: no escalonamento, os vetores em $\{\vec{v}_i\}$ foram submetidos às três operações elementares do Capítulo 1, que nada mais fazem do que realizar combinações lineares entre os vetores-linhas. Mas, sabemos de (1.3) que vetores linearmente dependentes são expressos como combinações lineares dos vetores linearmente independentes. O escalonamento procede-se de forma a eliminar somente esses vetores linearmente dependentes da matriz \mathbf{M} . Sabemos, também do Capítulo 1, que essa perda de linhas não acarreta perda de informação alguma para o sistema, uma vez que o escalonamento preserva a solução do sistema. Portanto, vemos que as linhas linearmente independentes descrevem de forma completa o espaço solução do sistema e as linhas linearmente dependentes, sendo apenas combinações lineares dos demais, são redundantes e portanto, desnecessárias a descrição completa do espaço solução.

Portanto, o número máximo de vetores linearmente independentes em \mathbf{M} é o mesmo que em \mathbf{M}' , ou seja, n .

TEOREMA 3.1. *Chamamos de posto linha o número de linhas linearmente independentes de uma matriz e de posto coluna o número de colunas linearmente independentes. Em qualquer matriz o posto linha é igual ao posto coluna.*

DEMONSTRAÇÃO. Do resultado anterior, sabemos que dentre os k vetores em $\{\vec{v}_i\}$, podemos ter no máximo n vetores linearmente independentes. Se tivermos exatamente n vetores linearmente independentes, a prova do teorema decorre diretamente. É possível ainda que tenhamos $j < n$ vetores linearmente independentes. Nesse caso, após o escalonamento da matriz \mathbf{M} , teríamos

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & v'_{12} & \cdots & v'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & v'_{jn} \end{pmatrix}$$

Se tomarmos a transposta $(\mathbf{M}')^t$,

$$(\mathbf{M}')^t = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ v'_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v'_{1n} & \cdots & v'_{jn} \end{pmatrix}$$

Agora, pelo escalonamento (1.6) de $(\mathbf{M}')^t$, teremos, com um raciocínio análogo ao utilizado no Exemplo 3.2, *no máximo* j linhas linearmente independentes (ou seja, em \mathbf{M}' , no máximo j colunas são linearmente independentes.)

$$(1.6) \quad (\mathbf{M}'^t)' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v''_{1j} & \cdots & v''_{jj} \end{pmatrix}$$

Porém, teremos agora *necessariamente* o número máximo j de linhas linearmente independentes: se fosse possível ter $i < j$ linhas linearmente independentes em $(\mathbf{M}'^t)'$, poderíamos realizar uma nova transposição na matriz, obtendo $(\mathbf{M}')'^t$, na qual haveria uma contradição. Essa nova matriz teria $i < j$ colunas linearmente independentes e j linhas, que sabemos linearmente independentes, de \mathbf{M}' . No entanto, efetuando o escalonamento de $(\mathbf{M}')'^t$, teremos que só é possível ter no máximo i linhas linearmente independentes, o que é portanto falso, por hipótese. Assim, não podemos ter $i < j$ linhas linearmente independentes em $(\mathbf{M}'^t)'$. Logo, o posto linha da matriz é igual ao seu posto coluna. \square

2. Geradores e Bases de um Espaço Vetorial

Em \mathbb{R}^n , dizemos que um certo conjunto de vetores $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ gera um subespaço vetorial $L(S)$ se todo vetor $\vec{l} \in L(S)$ puder ser representado por uma combinação linear do tipo

$$(2.1) \quad \vec{l} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i, \quad \text{onde os } \lambda_i \text{ são escalares quaisquer.}$$

EXEMPLO 3.3. Consideremos o vetor $\vec{v} = (1, 2)$ em \mathbb{R}^2 . Podemos multiplicá-lo por um parâmetro livre λ_1 e assim, ele gerará a reta $(x, y) = (\lambda_1, 2\lambda_1)$, de coeficiente angular $\alpha = 2$ passando pela origem. Da mesma forma, o vetor o vetor $\vec{v} = (2, 4)$, quando multiplicado pelo parâmetro livre λ_2 gerará a mesma reta.

Sabendo da seção anterior que todo vetor linearmente dependente pode ser descrito como combinação linear de vetores linearmente independentes, podemos afirmar que um conjunto gerador S composto por vetores linearmente independentes é o menor conjunto gerador do subespaço $L(S)$. Ou seja: a forma mais econômica de se gerar o subespaço é através de geradores linearmente independentes. Essa conclusão nos leva a definição de base de um espaço.

DEFINIÇÃO 3.2. Dizemos que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ são uma base do espaço vetorial \mathbb{V} se eles forem linearmente independentes e gerarem \mathbb{V} – ou seja, se qualquer vetor de \mathbb{V} puder ser expresso como uma combinação linear da base. Chamamos de dimensão o número k de vetores linearmente independentes necessários para gerar o espaço.

É importante notar que as bases de um espaço vetorial não são únicas: por exemplo, em \mathbb{R}^3 , quaisquer três vetores linearmente independentes nos fornecem uma base para tal espaço. Da mesma forma, quaisquer n vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n determinam uma possível base para tal espaço. Assim, podemos afirmar que cada base nos fornece um sistema de coordenadas, as quais são determinadas pelos escalares λ_i . Um exemplo claro disso está dado no exemplo 2.2 do capítulo anterior.

Frequentemente, utilizamos como base de \mathbb{R}^n o conjunto de vetores $\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)\}$, que formam uma base ortonormal (cada vetor da base é ortogonal a todos os demais e a norma de cada um deles é unitária). Veremos que a preferência por essa base deve-se ao fato de que a determinação das coordenadas de qualquer vetor do espaço com respeito a essa base torna-se imediata. Em particular, em \mathbb{R}^3 representamos essa base por $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

EXEMPLO 3.4. Do exemplo 3.1, sabemos que se o conjunto de vetores $\{\vec{v}_i\}$ em L for linearmente dependente, a solução será um subespaço de dimensão d , ou seja, $\dim(\ker \alpha) = d \neq 0$. Mostraremos agora que $\{\vec{v}_i\}$ possui $(n - d)$ vetores linearmente independentes.

Inicialmente, temos a matriz \mathbf{L} cujas colunas são os vetores em \mathbb{R}^n que queremos verificar, e que portanto, tem n linhas. No sistema \mathbf{L}' escalonado, sabemos que as linhas da matriz que são linearmente dependentes serão eliminadas. A cada linha que é eliminada, podemos atribuir um parâmetro livre ao subespaço solução do sistema homogêneo (kernel). Portanto, $\dim(\ker \alpha) = d$ corresponderá ao número de linhas linearmente dependentes de \mathbf{L}' . Logo, restarão no sistema $(n - d)$ linhas, linearmente independentes. Ou seja, *posto linha* = $(n - d)$. Como *posto linha* = *posto coluna*, teremos $(n - d)$ colunas linearmente independentes em \mathbf{L}' , sendo portanto esse o número de vetores linearmente independentes em $\{\vec{v}_i\}$.

3. Exercícios

- (1) Encontre em cada caso os escalares x e y tais que $x(\hat{i} - \hat{j}) + y(\hat{i} + \hat{j})$ seja igual a
 - (a) \hat{i}
 - (b) \hat{j}
 - (c) $3\hat{i} - 5\hat{j}$
 - (d) $7\hat{i} + 5\hat{j}$
- (2) Se $\mathbf{A} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{C} = (2, -11, 7)$ são três vetores em \mathbb{R}^3 , encontre escalares x e y tais que $\mathbf{C} = x\mathbf{A} + y\mathbf{B}$.
- (3) Prove que o Exercício 3 não tem solução se \mathbf{C} for substituído por $(2, 11, 7)$. Por que isso ocorre?
- (4) Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} dois vetores não-nulos em \mathbb{R}^n . Prove que
 - (a) Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são paralelos, \mathbf{A} e \mathbf{B} são linearmente dependentes.
 - (b) Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são não-paralelos, \mathbf{A} e \mathbf{B} são linearmente independentes.
- (5) Sejam $\mathbf{A} = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 1, 1, 1)$ e $\mathbf{C} = (1, 1, 0, 0)$ vetores de \mathbb{R}^4 .
 - (a) Detemine se $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ são linearmente independentes ou dependentes.
 - (b) Exiba um vetor \mathbf{D} tal que $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ sejam linearmente dependentes.
 - (c) Exiba um vetor \mathbf{E} tal que $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}$ sejam linearmente independentes.
 - (d) Usando o vetor \mathbf{E} determinado no item anterior, expresse $\mathbf{X} = (1, 2, 3, 4)$ como combinação linear de $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}$.
- (6) Prove que um conjunto S de três vetores em \mathbb{R}^3 é uma base de \mathbb{R}^3 se e somente se o espaço $L(S)$ por ele gerado contiver os três vetores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.
- (7) Enuncie e prove a generalização do item anterior para \mathbb{R}^n .
- (8) Considere os seguintes conjuntos de vetores em \mathbb{R}^3 :

$$S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, -1)\}$$

$$T = \{(2, 1, 0), (2, 0, -2)\}$$

$$U = \{(1, 2, 3), (1, 3, 5)\}$$
 - (a) Prove que $L(T) \subseteq L(S)$.
 - (b) Determine todas as relações de inclusão válidas entre os conjuntos $L(S)$, $L(T)$ e $L(U)$.

Produto Escalar

1. Definição

Em \mathbb{R}^n , podemos definir o produto interno entre dois vetores \mathbf{X} e \mathbf{Y} como qualquer operação $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ que possua as seguintes propriedades.

Sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ escalar.

- (P1) $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle$
- (P2) $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle$
- (P3) $c \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle (c\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{X}, (c\mathbf{Y}) \rangle$
- (P4) $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle > 0$, se $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$
- (P5) $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0$ se $\mathbf{X} = \mathbf{0}$

Um produto interno de especial interesse em geometria analítica é o chamado produto escalar, também representado por $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$.

DEFINIÇÃO 4.1. Sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

$$(1.1) \quad \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Por essa definição, pode-se facilmente verificar que o produto escalar obedece às propriedades mencionadas.

TEOREMA 4.1. A Desigualdade de Schwarz é dada por

$$(1.2) \quad \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle$$

onde a igualdade vale se e somente se \mathbf{X} for paralelo a \mathbf{Y} .

DEMONSTRAÇÃO. A desigualdade pode ser demonstrada através das cinco propriedades do produto interno. Portanto, (1.2) vale para qualquer produto interno, não se limitando apenas ao produto escalar.

Seja $\mathbf{X} = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Por (P4) e (P5),

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \geq 0$$

Podemos reescrever isso como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle &= \langle \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}, \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B} \rangle \\ &\stackrel{P2}{=} \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle + \langle \mathbf{A}, -\lambda \mathbf{B} \rangle + \langle -\lambda \mathbf{B}, \mathbf{A} \rangle + \langle -\lambda \mathbf{B}, -\lambda \mathbf{B} \rangle \\ &\stackrel{P3}{=} \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle - \lambda \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle - \lambda \langle \mathbf{B}, \mathbf{A} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle \\ &\stackrel{P1}{=} \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle - 2\lambda \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo como uma inequação do tipo $ax^2 + bx + c \geq 0$

$$(1.3) \quad \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle \lambda^2 - 2 \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle \lambda + \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle \geq 0$$

Para que a desigualdade acima seja satisfeita para todo λ , a imagem em (1.3) deve encontrar-se acima do eixo x . Uma vez que $\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle \geq 0$, $\forall \mathbf{B}$, basta portanto que verifiquemos

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle^2 - 4 \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle \leq 0$$

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle$$

Note que o sinal de igualdade vale apenas quando $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0$, ou seja, quando $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B} = 0$. Isso implica $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{B}$, ou seja, os vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} devem ser paralelos. \square

Nas próximas seções, utilizaremos a definição de produto escalar para generalizar em \mathbb{R}^n alguns conceitos que são, por enquanto, puramente geométricos e restritos a \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

2. Algumas consequências do produto escalar

A seguir, apresentaremos as definições de norma e ângulo em termos de produto escalar.

A definição de norma decorre das propriedades P4 e P5 do produto escalar, ou seja, do fato desta operação ser “positiva definida”.

DEFINIÇÃO 4.2. Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$. Sua norma $\|\mathbf{X}\|$ será dada por

$$(2.1) \quad \|\mathbf{X}\| = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle^{1/2}$$

Assim, pela definição (1.1) de produto escalar, temos

$$(2.2) \quad \|\mathbf{X}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

A definição 1.1 corresponde ao comprimento de um vetor em \mathbb{R}^n . Utilizando a geometria do ensino médio, para $n = 2, 3$ podemos aplicar o Teorema de Pitágoras nas componentes do vetor para obter seu comprimento, que resultará no mesmo valor obtido com 1.1.

Com (2.2), a Desigualdade de Schwarz (1.2) pode também ser expressa por meio de normas,

$$|\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle| \leq \|\mathbf{X}\| \|\mathbf{Y}\|$$

Com esse formato da desigualdade, considerando que a norma de qualquer vetor é sempre positiva, efetuamos a seguinte manipulação,

$$\begin{aligned} \frac{|\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle|}{\|\mathbf{X}\| \|\mathbf{Y}\|} &\leq 1 \\ -1 &\leq \frac{\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle}{\|\mathbf{X}\| \|\mathbf{Y}\|} \leq 1 \end{aligned}$$

A função de x e y na desigualdade acima apresenta a mesma propriedade da função cosseno. Com base nisso, definimos de forma generalizada o ângulo entre dois vetores em \mathbb{R}^n .

DEFINIÇÃO 4.3. Dados \mathbf{X} e \mathbf{Y} em \mathbb{R}^n ,

$$(2.3) \quad \cos \angle(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \frac{\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle}{\|\mathbf{X}\| \|\mathbf{Y}\|}$$

Notamos que essa definição também concorda com a noção geométrica usual de ângulo em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Basta aplicar a Lei dos Cossenos nos vetores $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ posicionados na origem $\mathbf{0}$ para se verificar (2.3).

Ainda tomando $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, por (2.1), podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|^2 &= \langle (\mathbf{X} + \mathbf{Y}), (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle^2 + 2 \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle^2 \end{aligned}$$

Em termos de normas, teremos

$$(2.4) \quad \|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|^2 = \|\mathbf{X}\|^2 \|\mathbf{Y}\|^2 + 2\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$$

Se \mathbf{X} é perpendicular a \mathbf{Y} em \mathbb{R}^2 , pelo Teorema de Pitágoras, (2.4) se reduziria à

$$\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|^2 = \|\mathbf{X}\|^2 + \|\mathbf{Y}\|^2$$

o que implica

$$2\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0 \implies \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0, \text{ se } X \perp Y$$

Essa noção de ortogonalidade em \mathbb{R}^2 nos sugere uma definição geral para ortogonalidade entre dois vetores em \mathbb{R}^n .

DEFINIÇÃO 4.4. Dois vetores $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais se

$$(2.5) \quad \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0$$

A projeção ortogonal ($\text{pr}_{\vec{v}} \vec{u}$) de vetor \vec{u} sobre a reta definida por \vec{v} (Fig.1) é dada, em módulo, por

$$\|\text{pr}_{\vec{v}} \vec{u}\| = \|\vec{u}\| \cos \theta$$

que por (2.3) se reduz a

$$\|\text{pr}_{\vec{v}} \vec{u}\| = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|}$$

Como a projeção tem a mesma direção de \vec{v} , tomamos o vetor unitário¹ $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ para determinar a direção do vetor $\text{pr}_{\vec{v}} \vec{u}$.

$$(2.6) \quad \text{pr}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

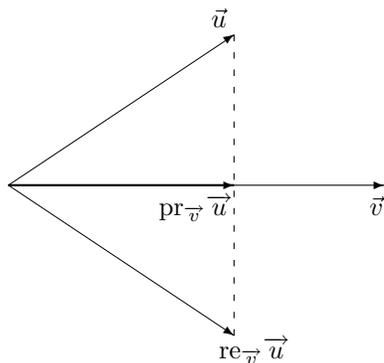


FIGURA 1. Projeção e Reflexão do vetor \vec{u}

A partir da projeção, podemos facilmente determinar o vetor $\text{re}_{\vec{v}} \vec{u}$ obtido a partir da reflexão ortogonal de \vec{u} em torno de \vec{v} , o qual é obtido mantendo a mesma componente de \vec{u} na direção \vec{v} e invertendo o sentido das demais componentes – e.g.

¹Todo vetor com norma valendo uma unidade

$re_{(1,0)}(1,1) = (1, -1)$. Basta observar que $re_{\vec{v}} \vec{u}$ é determinado através da soma vetorial

$$\begin{aligned}\vec{u} + re_{\vec{v}} \vec{u} &= 2 pr_{\vec{v}} \vec{u} \\ re_{\vec{v}} \vec{u} &= 2 pr_{\vec{v}} \vec{u} - \vec{u} \\ &= 2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} - \vec{u}\end{aligned}$$

3. Aplicações

Uma vez estabelecidos o produto interno e a condição de ortogonalidade, podemos agora definir o que é um hiperplano $(n - 1)$ -dimensionais em \mathbb{R}^n .

DEFINIÇÃO 4.5. Todo ponto \mathbf{X} que satisfizer

$$(3.1) \quad \langle \mathbf{X} - \mathbf{P}, \vec{N} \rangle = 0$$

pertence ao hiperplano π que é normal (ortogonal) ao vetor \vec{N} e contém o ponto \mathbf{P} .

Assim, todos os vetores $\mathbf{X} - \mathbf{P}$ ortogonais a \vec{N} pertencerão ao hiperplano π .

EXEMPLO 4.1. Dados $\mathbf{P}_1 = (r, s)$ e $\vec{N}_1 = (a, b)$ em \mathbb{R}^2 , teremos, por (3.1)

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{X} - (r, s), (a, b) \rangle &= 0 \\ (x - r)a + (y - s)b &= 0 \\ ax + by - (ra + sb) &= 0\end{aligned}$$

que é a equação de uma reta em \mathbb{R}^2 (Fig.??).

EXEMPLO 4.2. Da mesma forma, dados $\mathbf{P}_2 = (r, s, t)$ e $\vec{N}_2 = (a, b, c)$ em \mathbb{R}^3 , teremos

$$\langle \mathbf{X} - (r, s, t), (a, b, c) \rangle = 0 \implies ax + by + cz - (ar + bs + ct) = 0$$

que é a equação de um plano em \mathbb{R}^3 .

Uma outra aplicação importante de projeções está no cálculo de distâncias em \mathbb{R}^n .

4. Exercícios

Wexler, C., *Analytic Geometry – A vector approach*. Grupo de Exercícios 2-4.

Hiperplanos em \mathbb{R}^n

1. Introdução

Sabemos que, em \mathbb{R}^2 , uma equação do tipo $ax_1 + bx_2 = c$ representa uma reta (hiperplano 1-dimensional) em \mathbb{R}^2 . Da mesma forma, em \mathbb{R}^3 , a equação $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ representa um plano (hiperplano 2-dimensionais) em \mathbb{R}^3 . Analogamente, em \mathbb{R}^n , uma equação do tipo $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ representa um hiperplano $(n - 1)$ -dimensionais em \mathbb{R}^n .

DEFINIÇÃO 5.1. A equação

$$(1.1) \quad F(x_1, \dots, x_n) = 0$$

representa o lugar geométrico $L = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \mid F(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ Todas e apenas as coordenadas de $\mathbf{X} \in L$ satisfazem (1.1).

Note que a recíproca dessa afirmação não vale: podemos ter equações diferentes com o mesmo conjunto L (e.g. basta multiplicar (1.1) por um escalar não-nulo: teremos duas equações diferentes com a mesma solução).

2. Equações Paramétricas

Podemos também descrever hiperplanos em \mathbb{R}^n por meio da sua respectiva equação paramétrica, em termos de geradores, como foi descrito anteriormente nos exemplos 1.1 e 1.2.

EXEMPLO 5.1. Obteremos a equação paramétrica da reta dada em \mathbb{R}^2

$$(2.1) \quad ax + by = c$$

Podemos atribuir a y o parâmetro livre $\lambda \in \mathbb{R}$. Escrevendo x em função do parâmetro livre também,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a}\lambda + c \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Reescrevendo em termo de geradores, obtemos a seguinte representação paramétrica

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b/a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto decorre diretamente de (2.2) que a reta (2.1) passa pelo ponto $(c, 0)$ e tem $\begin{pmatrix} b/a \\ 1 \end{pmatrix}$ como vetor diretor (gerador). Os pontos da reta consistem nas combinações lineares desse único vetor linearmente independente – que no caso, reduzem-se simplesmente a uma multiplicação por escalar.

EXEMPLO 5.2. Obteremos a equação paramétrica do plano dado em \mathbb{R}^3

$$(2.3) \quad ax + by + cz = d$$

Podemos atribuir a y e a $z \in \mathbb{R}$ os parâmetros livres φ e θ , de forma que x deverá ser escrito em função desses dois parâmetros.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - b\varphi - c\theta \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$$

A equação paramétrica será

$$(2.4) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} -b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por (2.4), podemos afirmar que esse plano corta o eixo x no ponto $x = d$. Neste ponto, podem ser posicionados os vetores $(-b, 1, 0)$ e $(-c, 0, 1)$, linearmente independentes. Por meio de combinações lineares desses dois vetores (dadas pleos escalares φ e θ) estaremos parametrizando todos os pontos do plano, assim gerando o lugar geométrico dado em (2.3).

É importante notar que essa atribuição de parâmetros é arbitrária: poderíamos igualmente atribuir parâmetros α e β a x e z , por exemplo, obtendo uma representação paramétrica (2.4) diferente, mas que no entanto descreve exatamente o mesmo lugar geométrico.

EXEMPLO 5.3. Em \mathbb{R}^3 , dado o sistema de equações linearmente independentes

$$(2.5) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Podemos afirmar que tal sistema nos fornece o lugar geométrico de uma reta em \mathbb{R}^3 .

Por escalonamento, obtemos o sistema equivalente

$$(2.6) \quad \begin{cases} x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

Atribuindo a z o parâmetro livre $\gamma \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_1 - b'_1d'_2 + (c'_2b'_1 - c'_1)\gamma \\ d'_2 - c'_2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Que resulta na equação paramétrica de uma reta

$$(2.7) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_1 - b'_1d'_2 \\ d'_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} c'_2b'_1 - c'_1 \\ -c'_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para parametrizar a reta (2.5) em \mathbb{R}^3 , adotamos o mesmo procedimento dos exemplos anteriores: posicionamos o vetor $(c'_2b'_1 - c'_1, -c'_2, 1)$ no ponto $(d'_1 - b'_1d'_2, d'_2, 0)$, obtendo os pontos da reta por meio de combinações lineares desse único vetor.

Seguindo essa linha de raciocínio, podemos fazer a seguinte generalização: a parametrização de um subespaço afim k -dimensionais em \mathbb{R}^n será dada por

$$(2.8) \quad \mathbf{X} = \mathbf{P}_0 + \lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_k\vec{v}_k$$

onde os vetores $\{\vec{v}_i\}, i = 1, \dots, k$ são linearmente independentes. Como nos exemplos anteriores, a idéia é fixar no ponto \mathbf{P}_0 esses k vetores, cujas combinações lineares dadas pelos parâmetros $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ “localizarão” todos os pontos desse subespaço afim.

O número de parâmetros livres k nos informará *os graus de liberdade* do subespaço afim: nos exemplos 5.1 e 5.3, vemos que a reta possui um único parâmetro livre, e portanto, um grau de liberdade, o qual diz respeito ao fato de que, se “caminharmos” sobre uma reta, haverá *uma única* direção linearmente independente a ser seguida.

Estendendo essa generalização para as equações de lugar geométrico (1.1), temos que

- uma equação linearmente independente representa um hiperplano $(n-1)$ -dimensionais em \mathbb{R}^n .
- um sistema de duas equações linearmente independentes representa um subespaço afim $(n-2)$ -dimensionais em \mathbb{R}^n .
- um sistema de três equações linearmente independentes representa um subespaço afim $(n-3)$ -dimensionais em \mathbb{R}^n .

⋮

- um sistema de n equações linearmente independentes representa um subespaço afim 0-dimensional em \mathbb{R}^n , ou seja, um ponto.

Vemos que cada equação acrescentada acarreta a perda de um grau de liberdade no hiperplano, até que não reste mais grau de liberdade algum (ponto).

3. Distâncias

Faremos agora uma generalização em \mathbb{R}^n do seguinte problema: dado um subespaço afim r -dimensionais e um ponto \mathbf{Q} , encontrar o ponto \mathbf{P}_X no subespaço afim que é mais próximo ao ponto \mathbf{Q} dado. Seja

$$(3.1) \quad \mathbf{P}_0 + t_1 \vec{w}_1 + \dots + t_r \vec{w}_r$$

a equação paramétrica deste subespaço afim r -dimensionais em \mathbb{R}^n , com

$$\langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle = \delta_{ij}, \text{ onde } \delta_{ij} \begin{cases} = 0, & \text{se } i \neq j \\ = 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Nesse caso, dizemos que $\{\vec{w}_i\}$ forma uma base ortonormal do subespaço. Em Álgebra Linear, veremos que qualquer conjunto de vetores pode ser ortonormalizado através do Processo de Gram-Schmidt. Esse processo leva a eliminação de qualquer eventual dependência linear existente no conjunto de vetores iniciais, através da redução do número de vetores no conjunto final.

Dado $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$, calcularemos o ponto \mathbf{P}_X em (3.1) mais próximo de \mathbf{Q} . Para tanto, notamos primeiramente que os pontos \mathbf{Q} e \mathbf{P}_X determinam a distância realizada do ponto \mathbf{Q} ao subespaço afim dado. Assim, o ponto \mathbf{P}_X é determinado através da projeção ortogonal do ponto \mathbf{Q} no subespaço afim (3.1). Portanto, \mathbf{P}_X deve ser tal que o vetor $\mathbf{P}_X - \mathbf{Q}$ seja ortogonal a todos os vetores da base $\{\vec{w}_i\}$. Como \mathbf{P}_X pertence a (3.1), podemos escrever esse conceito geométrico da seguinte forma

$$(3.2) \quad \left\langle \mathbf{Q} - \left(\mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^r t_i \vec{w}_i \right), \vec{w}_j \right\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, r$$

Essa equação nos permitirá determinar os valores dos parâmetro t_j , fixando assim o ponto \mathbf{P}_X no subespaço afim.

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{Q} - \left(\mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^r t_i \vec{w}_i \right), \vec{w}_j \right\rangle &= 0 \\
\langle \mathbf{Q} - \mathbf{P}_0, \vec{w}_j \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^r t_i \vec{w}_i, \vec{w}_j \right\rangle &= 0 \\
\langle \mathbf{Q} - \mathbf{P}_0, \vec{w}_j \rangle + \sum_{i=1}^r t_i \langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle &= 0 \\
\langle \mathbf{Q} - \mathbf{P}_0, w_j \rangle + t_j &= 0 \\
t_j &= \langle \mathbf{P}_0 - \mathbf{Q}, w_j \rangle
\end{aligned}$$

Temos assim os r parâmetros livres t_1, \dots, t_r que determinam o ponto \mathbf{P}_X . De acordo com (3.1), tal ponto será dado por

$$(3.3) \quad \mathbf{P}_X = \mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^r \langle \mathbf{P} - \mathbf{Q}, w_i \rangle w_i$$

4. Exercícios

Wexler, C., *Analytic Geometry – A vector approach*. Grupo de Exercícios 2-6.

Produto Vetorial

1. Definição

Vimos nos capítulos anteriores que os vetores ortogonais a um conjunto de vetores dado desempenham um papel importante no estudo de hiperplanos. Assim, o *produto vetorial* é uma operação definida em \mathbb{R}^3 de grande interesse em Geometria Analítica: sua peculiaridade está no fato de que submetendo dois vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} a essa operação, obteremos como resultado um terceiro vetor $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *ortogonal* aos dois vetores iniciais, e portanto, normal ao plano gerado por \mathbf{A} e \mathbf{B} , conforme mostraremos neste capítulo.

DEFINIÇÃO 6.1. Sejam $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3)$ e c escalar.

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$(1.1) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} := \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} + (-a_3 b_1 + a_1 b_3) \hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k}$$

Da definição 1.1 decorrem as seguintes propriedades.

- (P1) Linearidade com respeito a \mathbf{A} :
 $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \times \mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B} + \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}$
 $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \times \mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B} + \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}$
- (P2) Anti-simetria: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \longrightarrow$ Linearidade com respeito a \mathbf{B} .
- (P3) Produto Misto: $\langle \mathbf{A}, (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \rangle = \langle (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \mathbf{C} \rangle = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$
- (P4) $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle^2$ (Identidade de Lagrange)
- (P5) $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre os dois vetores.

DEMONSTRAÇÃO. Provaremos apenas a propriedade (P5). As demais decorrem trivialmente da definição.

De P4, temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 &= \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle^2 \\ &= \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - (\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cos \theta)^2 \\ &= \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| (\sin^2 \theta) \end{aligned}$$

mas como $0 \leq \theta \leq \pi$, temos sempre $\sin \theta \geq 0$. Consequentemente,

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \sin \theta$$

□

COROLÁRIO 6.1.

- (1) $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$ corresponde à área do paralelogramo cujos lados são formados pelos vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} .
- (2) \mathbf{A} e \mathbf{B} não-nulos e paralelos em $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$
- (3) \mathbf{A} e \mathbf{B} não-nulos e não-paralelos $\Rightarrow (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \perp \mathbf{A}$ e $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \perp \mathbf{B}$
- (4) $\|\langle (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \mathbf{C} \rangle\|$ corresponde ao volume do paralelepípedo formado pelo vetores $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.

DEMONSTRAÇÃO. (1) e (2) decorrem trivialmente de (7). Provaremos (3) e (4). Para provar (3), basta verificar que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = 0$ e $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = 0$, o que implica ortogonalidade do vetor $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ com respeito a \mathbf{A} e \mathbf{B} .

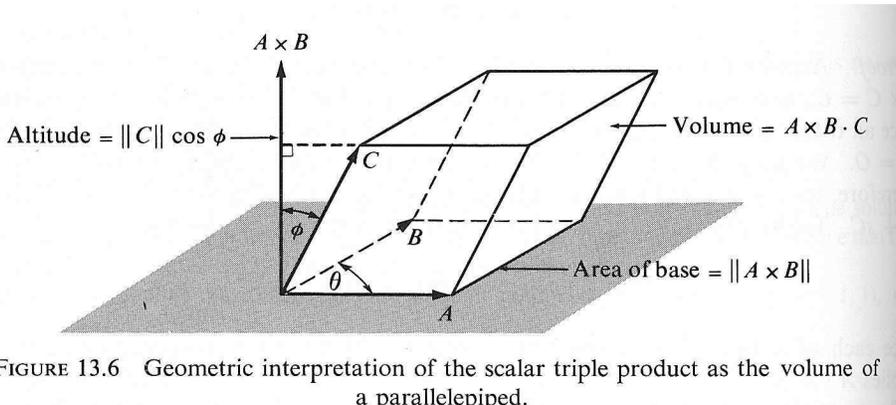


FIGURE 13.6 Geometric interpretation of the scalar triple product as the volume of a parallelepiped.

Para provar (4), vemos na figura acima

$$\begin{aligned} \|\langle (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \mathbf{C} \rangle\| &= \|C\| \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| \cos \phi \\ &= h \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| \end{aligned}$$

□

EXEMPLO 6.1. Pela definição 6.1, mostre que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ é uma combinação linear dos vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} . Indique qual é a combinação linear, em função de \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} .

EXEMPLO 6.2. Dizemos que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ e $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ são produtos triplos de \mathbf{A}, \mathbf{B} e \mathbf{C} . Prove que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, ou seja, o produto triplo vetorial não é associativo.

Qual é a combinação linear de vetores dada por $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, em função de \mathbf{A}, \mathbf{B} e \mathbf{C} ? ¹

¹ $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$