MA141 Geometria Analítica

Prova 2 - Turmas 8h-10h

16 de maio 2024

Nome completo: RA: Turma:

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	3	2	2	3	
Nota					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

- Desligue o celular.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Essa prova terá inicio às 8:00h e **finalizará às 09:55h**. Você terá duas horas para resolvê-la.
- A prova contém **4 (quatro)** questões, uma por folha. Resolva cada questão **em sua respectiva folha**.
- Não retire o grampo da prova.
- **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

As questões da prova estão nas próximas páginas; **aguarde a indicação da professora/do professor** para virar a folha.

Boa prova!

Questão 1

1. [1 pt] Encontre a equação da reta r que une os pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$.
2. [1 pt] Encontre a equação do plano π que passa pela origem e é perpendicular à reta r.
3. [1 pt] Encontre a distância do ponto $C = (1, 0, 1)$ ao plano π.

Solução:

1.1) Como já possuímos dois pontos da reta r, podemos calcular o vetor diretor $\vec{v}$ da reta r como sendo o vetor que liga os pontos A e B. Logo,

$$\vec{v} = BA = A - B = (1, 0, 0) - (0, 1, 0) = (1, -1, 0).$$

Como já possuímos o vetor diretor da reta r, basta um ponto da reta para que possamos escrever a sua equação vetorial. Tomando esse ponto como sendo o ponto A, temos que

$$r)\ \ A + t\vec{v} = (1, 0, 0) + t(1, -1, 0) = (1 + t, -t, 0).$$

1.2) Temos que a equação geral do plano π é dada por $\pi)\ \ ax + by + cz + d = 0$. Como π é ortogonal a r, o vetor diretor de r (o vetor $\vec{v}$) tem que ser normal ao plano π. Logo, podemos tomar $(a, b, c) = \vec{v} = (1, -1, 0)$, logo $1 \cdot x + (-1) \cdot y + 0 \cdot z + d = 0$, ou seja

$$\pi)\ \ x - y + d = 0$$

Como o plano passa pela origem, o ponto $(0, 0, 0)$ pertence ao plano, ou seja $0 - 0 + d = 0$. Portanto, $d = 0$ e

$$\pi)\ \ x - y = 0$$

1.3) Tome $P = (0, 0, 1)$. Perceba que P está no plano. temos que

$$PC = C - P = (1, 0, 1) - (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

Temos que $\vec{N} = (1, -1, 0)$ é um vetor normal ao plano.

A projeção de PC em $\vec{N}$ é dado por

$$\vec{N}\frac{N \cdot PC}{|N|^2} = (1, -1, 0) \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

Por fim, a distância entre o ponto e o plano é a norma desse vetor, ou seja

$$D = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Questão 2 [2 pt] Determinar se os planos $\pi)\, 2x - y + z = 0$ e $\tau)\, 2y - z - 1 = 0$ se interceptam. Em caso afirmativo, dar a equação da interecção.

Solução:

Sabemos que, se os vetores normais de dois planos não forem paralelos, eles se intersectam. Vamos mostrar que seus vetores normais não são paralelos.

Temos que $\vec{N}_1 = (2, -1, 1)$ e $\vec{N}_2 = (0, 2, -1)$ são os vetores normais de π e τ respectivamente. Temos que, se $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ são paralelos, então são múltiplos um do outro, ou seja, existe um número λ tal que $\vec{N}_1 = \lambda \vec{N}_2$.

Substituindo temos que $(2, -1, 1) = \lambda(0, 2, -1) = (0, 2\lambda, -\lambda)$, o que é impossível, dado que $2 \neq 0$. Vamos calcular a interseção.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ \quad\;\; 2y - z = 1 \end{cases}$$

Simplificando o y da primeira equação com o da segunda, somando a primeira linha com metade da segunda linha, temos que

$$\begin{cases} 2x \qquad + \dfrac{z}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \qquad 2y - z = 1 \end{cases}$$

Tome $y = t$. Da segunda equação, temos que $z = 2t - 1$, e da primeira equação, temos que

$$2x + \frac{2t - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2x + t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2x + t = 1$$

$$x = \frac{1 - t}{2}$$

Logo, a interseção dos dois planos é a reta r dada por

$$r)\ (x, y, z) = \left(\frac{1 - t}{2}, t, 2t - 1 \right).$$

Questão 3 [2 pt] Mostrar que as retas

$$r)\, x+1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}, \qquad s) \begin{cases} x &=& 1+t \\ y &=& 2+3t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z &=& 4t \end{cases}$$

são reversas.

Solução:

Para que duas retas sejam reversas, seus vetores diretores não podem ser paralelos, e as duas retas não podem ser concorrentes, ou seja, não podem se intersectar.

Perceba que a reta r está escrita em sua forma simétrica. Dessa equação, podemos concluir que

$$r)\ (x, y, z) = (-1, 1, -2) + t \cdot (1, 2, 3),$$

e da reta s podemos concluir que

$$s)\ (x, y, z) = (1, 2, 0) + t \cdot (1, 3, 4).$$

Perceba que os vetores diretores das duas retas não são múltiplos, pois se $(1, 2, 3) = \lambda(1, 3, 4) = (\lambda, 3\lambda, 4\lambda)$, ou seja $\lambda = 1$ e $3\lambda = 2$, o que é impossível. Logo os dois vetores diretores não são paralelos, portanto as duas retas são reversas ou concorrentes. Vamos mostrar que elas não se intersectam.

Se r e s se intersectam, teríamos que

$$(-1, 1, -2) + u(1, 2, 3) = (1, 2, 0) + t(1, 3, 4)$$

Ou seja,

$$\begin{cases} -1 + u = 1 + t \\ 1 + 2u = 2 + 3t \\ -2 + 3u = 4t \end{cases}$$

Da primeira equação, temos que $u = t + 2$. Substituindo na segunda equação, temos que $1 + 2t + 4 = 2 + 3t$, logo $t = 3$ e $u = 5$. Porém, ao substituirmos esses valores na terceira equação, temos que $-2 + 3 \cdot 5 = -2 + 15 = 13 \neq 4 \cdot 3$, ou seja, não satisfaz a terceira equação. Portanto esse sistema não tem solução, ou seja, as retas não se intersectam. E portanto, são reversas.

Questão 4 Determinar se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.

1. [1 pt] Os pontos $(0,1,1),(1,1,1),(3,-3,1),(-5,2,4)$ são coplanares.
2. [1 pt] Se $|U|=1$ então $U\cdot(U\times V)\neq 0$ para todo vetor $V\in\mathbb{R}^3$, $V\neq 0$.
3. [1 pt] A projeção ortogonal do vetor $U=(-2,1)$ sobre o vetor $V=(1,-1)$ é $W=(2,1)$.

Solução:

4.1 Para determinar se os 4 pontos são coplanares, vamos criar os seguintes vetores:

$$\begin{cases} \vec{u}=(1,1,1)-(0,1,1)=(1,0,0), \\ \vec{v}=(3,-3,1)-(0,1,1)=(3,-4,0), \\ \vec{w}=(-5,2,4)-(0,1,1)=(-5,1,3). \end{cases}$$

Para que os 4 pontos sejam coplanares, os vetores acima precisam ser coplanares, e sabemos que eles só são coplanares se seu produto misto (determinante) é nulo.

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1((-4)\cdot(3)-1\cdot 0)=1\cdot(-12)=-12\neq 0$$

Logo os pontos não são coplanares. Falso.

4.2 Tome $U=V=(1,0,0)$. Temos que $|U|=1$ e $V\neq 0$, mas

$$U\times V=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0,0,0),$$

logo $U\cdot(U\times V)=0$, contrariando o enunciado. Então é falso.

4.3 A projeção ortogonal de U sobre o vetor V tem que ser paralelo ao vetor V, então ambos têm que ser múltiplos um do outro. Logo

$$\lambda V=W$$

$$(\lambda, -\lambda) = (2, 1)$$

Logo $\lambda = 2$ e $\lambda = -1$, impossível. Portanto não é verdade que W é a projeção do vetor U sobre o vetor V.