MA141 Geometria Analítica

Prova 2

16 de maio 2024 - Turmas 21h-23h

Nome completo: RA: Turma:

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	3	2	2	3	
Nota					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

- Desligue o celular.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Essa prova terá inicio às 21:00h e **finalizará às 22:55h**. Você terá duas horas para resolvê-la.
- A prova contém **4 (quatro)** questões, uma por folha. Resolva cada questão **em sua respectiva folha**.
- Não retire o grampo da prova.
- **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

As questões da prova estão na próxima página; **aguarde a indicação da professora/do professor** para virar a folha.

Boa prova!

Questão 1 Considere as retas de equações:

$$r : \begin{cases} x &= 4+3t \\ y &= 2+t \\ z &= 2+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad s : \begin{cases} x &= -2+2p \\ y &= 0 \\ z &= -3+p \end{cases} \quad p \in \mathbb{R}.$$

1. [1 pt] Mostrar que r e s são reversas.

2. [1 pt] Encontrar a distância entre r e s.

3. [1 pt] Encontrar a equação paramétrica da reta que intersecta r e s e é perpendicular a r e a s.

Questão 2 [2 pt] Encontrar a equação paramétrica da reta r que passa pelo ponto $P(1, 0, 3)$ e é perpendicular ao plano $\pi\colon x + 2y - z = 1$.

Questão 3 [2 pt] Encontrar a equação do plano π qué é paralelo ao plano determinado pelos pontos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$ e $C(0,1,1)$ e passa pela origem.

Questão 4 Determinar se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.

1. [1 pt] Se U, V, W são três vetores no espaço $\mathbb{R}^3$ tais que $U \times V = U \times W$ então $V = W$.
2. [1 pt] Os pontos $O(0, 0, 0)$, $A(1, 5, -2)$, $B(4, 3, 0)$ e $C(6, 13, -4)$ são coplanares.
3. [1 pt] A projeção ortogonal do vetor $U = (2, 1)$ sobre o vetor $V = (1, 1)$ é $W = (2, 0)$.

1. O vetor diretor de r, $\vec{V_r} = (3,1,1)$ e de s é $\vec{V_s} = (2,0,1)$

Tomemos $\vec{n} = \vec{V_r} \times \vec{V_s} = \text{"}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\text{"} = \vec{i}(1) + \vec{j}(2-3) + \vec{k}(-2) = (1,-1,-2)$

Como $\vec{n} \neq 0$, r e s não são paralelas. Elas são concorrentes ou reversas. Tomemos um ponto arbitrário de r e um de s, P_r e P_s: $P_r = (4,2,2)$ e $P_s = (-2,0,-3)$. Logo, $\overrightarrow{P_rP_s} = P_r - P_s = (6,2,5)$

Se $\overrightarrow{P_rP_s}$ for coplanar com V_r e V_s, as retas são concorrent

Caso contrário, são reversas. Calculando $\overrightarrow{P_rP_s} \cdot \vec{n} = 6\cdot1 - 2\cdot1 - 5\cdot2$

$\overrightarrow{P_rP_s} \cdot \vec{n} \neq 0 \Rightarrow r$ e s não são coplanares $\Rightarrow r$ e s são reversas.

. Usando $\overrightarrow{P_rP_s}$ e $\vec{n}$ calculados no item 1., $d(r,s) = \|Proj_{\vec{n}} \overrightarrow{P_rP_s}\|$

$$\therefore d(r,s) = \left\| \frac{(\overrightarrow{P_rP_s} \cdot \vec{n})}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \left\| \frac{-6}{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \vec{n} \right\| = \left\| \frac{-6}{6}(1,-1,-2) \right\| = \|(1,-1,-2)\| =$$

. Esta reta tem $\vec{n}$ como vetor diretor e intersecta r e s.

Seja P_r^* o ponto onde a reta intersecta r.

Seja P_s^* o ponto onde a reta intersecta s.

$P_r^* \in r \Rightarrow P_r^* = (4+3t, 2+t, 2+t)$; $P_s^* \in s \Rightarrow P_s^* = (-2+2p, 0, -3+p)$

E, por construção, $P_r^* - P_s^* = \alpha \vec{n}$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\therefore (4+3t, 2+t, 2+t) - (2p-2, 0, p-3) = \alpha(1,-1,-2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6+3t-2p \\ -\alpha = 2+t \\ -2\alpha = 5+t-p \end{cases}$$

$\therefore$ Precisamos resolver o sistema linear para achar (t,p,α)

$\therefore \alpha = -1$, $t = -1$ e $p = 2 \Rightarrow P_s^* = (2,0,-1)$

$\therefore$ A reta procurada é descrita por $P_s^* + \beta\vec{n} = (x,y,z)$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 + \beta \\ y = -\beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$$

é a equação paramétrica da reta que é perpendicular a r e s e intersecta ambas

Questão 2:

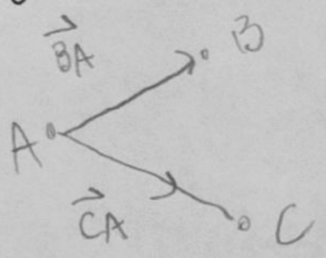
Percebe-se que o vetor $\vec{n} = (1, 2, -1)$ é normal ao plano π.

Logo, ele deve ser o vetor diretor da reta procurada

$\therefore$ a reta é descrita por $P + t\vec{n} = (x, y, z)$

$$\therefore (x, y, z) = (1, 0, 3) = t(1, 2, -1) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Questão 3:



Tomemos $\vec{BA} = B - A$ e $\vec{CA} = C - A$

$\vec{BA} = (1, 0, -2)$ e $\vec{CA} = (0, 1, 0)$

Como $\vec{BA}$ e $\vec{CA}$ pertencem ao plano π procurado,

$\vec{n} = \vec{BA} \times \vec{CA}$ será perpendicular ao plano

$$\therefore \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2i + k = (2, 0, 1) \Rightarrow \pi: 2x + 0y + z + d = 0$$

Precisamos encontrar d. Como $(0,0,0) \in \pi \Rightarrow 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + d = 0$

Portanto $d = 0 \Rightarrow$ A equação do plano é $\pi: 2x + z = 0$

Questão 4:

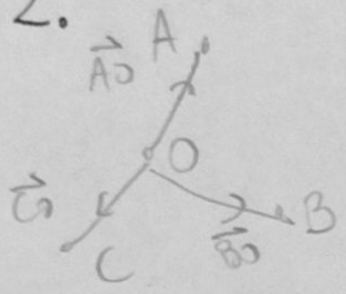
1. Falsa, segue contra-exemplo:

$U = (0,0,0)$; $V = (1,0,0)$ e $W = (0,1,0)$

Temos $U \times V = 0$ e $U \times W = 0 \Rightarrow U \times V = U \times W$

Mas $V \neq W$. Ou seja, ela é falsa

2.



Tomemos $\vec{AO}$, $\vec{BO}$ e $\vec{CO}$:

$\vec{AO} = A - O = (1,5,-2)$

$\vec{BO} = B - O = (4,3,0)$

$\vec{CO} = C - O = (6,13,-4)$

O, A, B e C são coplanares $\Leftrightarrow \vec{AO} \cdot (\vec{BO} \times \vec{CO}) = 0$

$$\vec{AO} \cdot (\vec{BO} \times \vec{CO}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 13 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 104 - (-36 - 80) = 0$$

Ou seja, O, A, B e C são coplanares $\Rightarrow$ Verdadeira

3. $$\text{Proj}_{\vec{V}} \vec{U} = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{V}\|^2} \vec{V} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{1^2 + 1^2} (1,1) = \frac{3}{2}(1,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Como $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \neq (2,0)$, a afirmação é falsa