Gabarito P2 - MA141 - 2024

---

1. **Considere os pontos $A = (3, 0, 2)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (8, 1, -1)$.**

   (a) **Mostre que o triângulo de vértices ABC é um triângulo retângulo e determine em qual vértice está o ângulo reto.**

   (I) Vamos conferir se os pontos A, B e C conseguem formar um triângulo. Consideramos os vetores $A = (3, 0, 2)$, $AB = B - A = (1, 3, -2)$ e $AC = C - A = (5, 1, -3)$. Calculamos o determinante da matriz de colunas formadas por esses vetores:

$$det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} = (-27 + 2 + 0) - (30 + 0 - 6) = -25 - 24 = -49$$

   Como o determinante dessa matriz é não nula, podemos concluir que os vetores AB e BC não são paralelos, o que confirma a existência do triângulo ABC.

   (II) Considere o triângulo ABC, formado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$, que medem:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|(1, 3, -2)\| = \sqrt{14}$$
$$\|\overrightarrow{BC}\| = \|(-4, 2, 1)\| = \sqrt{21}$$
$$\|\overrightarrow{CA}\| = \|(-5, -1, 3)\| = \sqrt{35}$$

   Seja $\theta = A\hat{B}C$, calculamos $\cos(\theta)$:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|}$$
$$cos(\theta) = \frac{\langle (-1, -3, 2), (-4, 2, 1) \rangle}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}}$$
$$\cos\theta = \frac{4 - 6 + 2}{7\sqrt{6}}$$
$$\cos(\theta) = 0$$

   Assim, como θ é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ e seu cosseno é nulo, esse par de vetores são perpendiculares entre si, ou seja, $\theta = A\hat{B}C = 90^o$.

   Dessa forma, concluímos que ABC é um triângulo retângulo, com ângulo reto no vértice B.

(b) **Encontre a equação geral do plano que contém o triângulo ABC.**

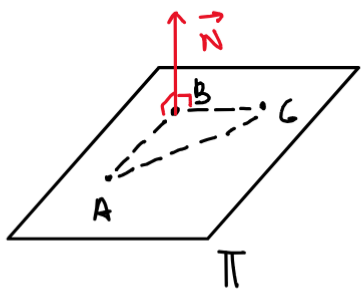
Seja $\overrightarrow{N}$ o vetor normal a $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, então podemos tomar que:

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (-1, -3, 2) \times (-4, 2, 1) = (-7, -7, -14)$$

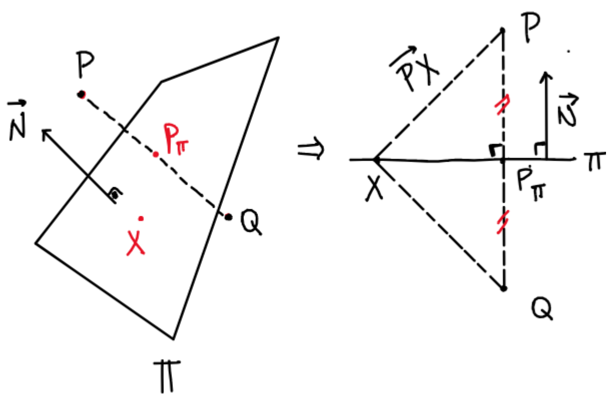
Assim, a equação do plano π, que contém ABC, é do tipo $-7x - 7y - 14z = d$. Como $A \in \pi$, então $A(3, 0, 2)$ satisfaz a equação do plano:

$$-7(3) - 7(0) - 14(2) = d$$
$$-21 + 0 - 28 = d$$
$$d = -49$$

Portanto, a equação do plano que contém o triângulo ABC é $-7x - 7y - 14z = -49$.



2. **Seja $P(-1, 0, -1)$ um ponto no espaço e seja π o plano com equação $-x+y-z+1 = 0$.Encontre as coordenadas do ponto Q que é simétrico a P em relação ao plano π.**



Seja $\overrightarrow{N}$ o vetor normal ao plano π, então $\overrightarrow{N} = (-1, 1, -1)$. Consideramos um ponto qualquer $X \in \pi$ e escolhemos $X = (1, 0, 0)$. Se P_π é o ponto P projetado em π, o vetor $\overrightarrow{PP_\pi}$ é perpendicular a π, então $\overrightarrow{PP_\pi}$ é paralelo a $\overrightarrow{N}$.

Podemos escrever o vetor $\overrightarrow{PP_\pi}$ como a projeção de $\overrightarrow{PX}$ sobre $\overrightarrow{N}$:

$$\overrightarrow{PP_\pi} = Proj_{\overrightarrow{N}}\overrightarrow{PX} = \frac{\langle \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{N} \rangle}{\|\overrightarrow{N}\|^2} \cdot \overrightarrow{N}$$

$$\overrightarrow{PP_\pi} = \frac{\langle (2,0,1), (-1,1,-1) \rangle}{(-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2} \cdot \overrightarrow{N}$$

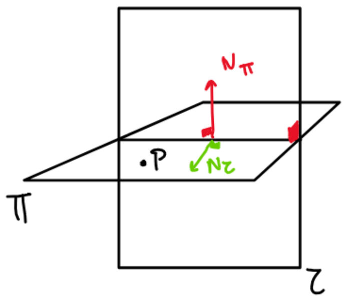
$$\overrightarrow{PP_\pi} = \frac{-3}{3} \cdot \overrightarrow{N} = -\overrightarrow{N}$$

Como $\overrightarrow{PP_\pi} = \overrightarrow{P_\pi Q}$, podemos escrever que $P + 2 \cdot \overrightarrow{PP_\pi} = Q \implies P - 2 \cdot \overrightarrow{N} = Q$. Assim, temos:

$$P - 2\overrightarrow{N} = Q \implies Q = (-1,0,-1) - 2 \cdot (-1,1,-1) = (1,-2,1)$$

Portanto, o ponto Q, simétrico a P por π, é $(1,-2,1)$.

3. **Encontre a equação do plano** π **que é perpendicular ao plano** $\tau : 2x - y + z - 2 = 0$ **e passa pelo ponto** $(0,1,1)$**.**



Se π é perpendicular a τ, então o vetor normal a τ, $\overrightarrow{N_\tau}$, está contido em π e o vetor normal a π, $\overrightarrow{N_\pi}$, está contido em τ. Dessa forma, tomando dois pontos $A, B \in \tau$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ será paralelo ao vetor $\overrightarrow{N_\pi}$, então podemos dizer que, sendo $A(1,0,0)$ e $B(0,0,2)$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{N_\pi} = B - A = (-1,0,2)$$

Assim, com $\overrightarrow{N_\pi} = (-1,0,2)$, o plano π é descrito da forma $-x + 0y + 2z = -x + 2z = d$. Como $P \in \pi$, então as coordenadas de $P(0,1,1)$ satisfazem a equação do plano:

$$-(0) + 2(1) = 2 = d$$

Portanto, o plano π, perpendicular a τ e que contém P, tem equação geral $-x + 2z = 2$.

4. **Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.**

   (a) **A reta que passa pelos pontos** $A = (1, 0, 1)$ **e** $B = (-2, -2, 2)$ **é ortogonal à reta** r **dada pelas equações:** $r)\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 11 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

   FALSO

   A reta que passa por A e B tem direção $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, -2, 1)$; já a reta r, se escrita na forma paramétrica:

$$r : (x, y, z)_r = (-2 - 3t, 11 - 2t, 1 + t) = (-2, 11, 1) + t(-3, -2, 1)$$

   revela que também tem vetor diretor $(-3, -2, 1)$. Assim, como ambas as retas possuem o mesmo vetor diretor, essas são retas iguais ou paralelas.

   (b) **Se** U**,**V **são dois vetores no espaço tais que** $U \times V = 0$ **, então** $U = 0$ **ou** $V = 0$**.**

   FALSO

   Tomemos $U = (1, 0, 0)$ e $V = (2, 0, 0)$, então $U \times V = (0 - 0, -(0 - 0), 0 - 0) = (0, 0, 0)$. Assim, encontramos U e V não nulos que satisfazem $U \times V = 0$.

   (c) **A projeção ortogonal do vetor** $U = (2, 1)$ **sobre o vetor** $V = (1, -2)$ **é** $W = (0, 0)$**.**

   VERDADEIRO

   A projeção de U em V é dada por:

$$Proj_{\overrightarrow{V}}\overrightarrow{U} = \frac{\langle \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V} \rangle}{\|\overrightarrow{V}\|^2} \cdot \overrightarrow{V} = \left(\frac{2 \cdot (1) + 1 \cdot (-2)}{(1)^2 + (-2)^2} \right) \cdot \overrightarrow{V} = \frac{0}{5}\overrightarrow{V} = (0, 0) = \overrightarrow{W}$$