MA141 Geometria Analítica

Lista de Revisão

Junho 2024

Questão 1 Considere a cônica definida por

$$C:\ 5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + (6\sqrt{3}-2)x - (2\sqrt{3}+6)y + 7 = 0.$$

Fazendo sucessivas mudanças de coordenadas, reescreva-a na forma padrão das cônicas não-degeneradas e classifique a mesma.

Questão 2 Considere a seguinte equação de uma cônica em coordenadas polares:

$$r = \frac{3}{2-\sin\theta}.$$

1. Identifique a cônica e determine uma reta diretriz da mesma.
2. Escreva a equação da cônica em coordenadas cartesianas.

Questão 3 Considere a superfície com equação

$$S:\ y^2 + x^2 - z^3 - 1 = 0.$$

Mostre que esta superfície é de revolução, exibindo uma curva plana geratriz e o eixo de rotação.

Questão 4 Determinar se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.

1. Se o ponto no espaço $P = (1,1,2)$ tem representação (r,θ,φ) em coordenadas esféricas, então $\tan^2\theta + \tan^2\varphi = \frac{3}{2}$
2. A equação
$$xy = 1$$
representa uma hipérbole no plano.
3. A equação da circunferência $r = 4\cos(\theta)$, em coordenadas cartesianas, é $x^2 - 4x + y^2 = 0$.
4. A equação dada em coordenadas cilíndricas por
$$r^2 = z^2$$
representa um cone.

Formulário

Coordenadas Cilíndricas

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

Coordenadas Esféricas

$x = \rho\sin\phi\cos\theta$

$y = \rho\sin\phi\sin\theta$

$z = \rho\cos\phi$

Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

Hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

Parábola

$$y^2 = 4px$$

$$c = a$$

$$e = 1$$

Diretrizes e Focos

$$\ell_{\text{dir.}} :\ x = \pm\frac{a}{e}, \quad \ell_{\text{dir.}} :\ x = -p$$

$$F = (\pm c, 0), \quad F = (p, 0)$$

$$\ell_{\text{ass. hip.}} :\ y = \pm\frac{b}{a}x$$

Rotação de Curva Plana em Relação ao Eixo x

$$f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$$

Equação do Cilindro com $v = (a, b, 1)$

$$f(x - az, y - bz) = 0$$

Cônicas na Forma Polar

$$r = \frac{de}{1 \pm e\cos\theta} \quad \text{ou} \quad r = \frac{de}{1 \pm e\sin\theta}$$

$$\ell_{\text{dir.}} :\ x = \pm d \quad \text{ou} \quad \ell_{\text{dir.}} :\ y = \pm d$$

$$F = (0, 0)$$

Matriz Associada à Rotação de Cônica

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

Polinômio Característico e Autovetores

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} a - \lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0$$

Matriz de Rotação a partir de Autovetor

$$\frac{v}{||v||} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Novos Termos Lineares após Rotação

$$d' = d\cos\theta - e\sin\theta$$

$$e' = d\sin\theta + e\cos\theta$$

Equação no Sistema Rotacionado

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d'x + e'y + f = 0$$

Quádricas da forma $\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$	Quádricas da forma $\frac{z}{c} = \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{x^2}{a^2}$	Quádricas da forma $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
$3+$: Elipsoide	$*$	$*$
$2+$: Hiperboloide de 1 folha	Paraboloide Elíptico	Cone
$1+$: Hiperboloide de 2 folhas	Paraboloide Hiperbólico	$*$