MS512 – Análise Numérica 1S/2025

Prof. Lúcio Santos [IMECC, Sala 131]

Ementa

Matrizes. Sistemas Lineares. Fatoração LU. Fatoração de Choleski. Normas. Condicionamento. Fatorações Ortogonais. Métodos Iterativos. Quadrados Mínimos Lineares. Autovalores e Autovetores. Valores Singulares. Sistemas Não Lineares.

Aulas

Segundas e quartas-feiras, das 10h às 12h na sala PB14.

Avaliação

Prova 1 $\|P_1\|$ **30/04**	Prova 2 $\|P_2\|$ **25/06**	Exame $\|E_X\|$ **14/07**

Seja $M_P = \dfrac{P_1 + P_2}{2}$. Se $M_P \geq 5,0$ então $M_F = M_P$; senão $M_F =$ Máximo$\left\{ M_P, \dfrac{M_P + 2E_X}{3} \right\}$.

Referências

D.S. Watkins, **Fundamentals of Matrix Computations**.

B. Noble & J.W. Daniel, **Applied Linear Algebra**.

A. Greenbaum & T.P. Chartier, **Numerical Methods**.

G. Strang, **Linear Algebra and Its Applications**.

G.H. Golub & C.F. Van Loan, **Matrix Computations**.

L.N. Trefethen e D. Bau, **Numerical Linear Algebra**.

Matrizes

1. Indique quais das seguintes afirmações são equivalentes a afirmação "Se beber, não dirija.":
   (a) Se não dirigir, beba.
   (b) Não beba nem dirija.
   (c) Não beba ou não dirija.
   (d) Beba e não dirija.
   (e) Se não beber, dirija.
   (f) Se dirigir, não beba.
   (g) Beba somente se não dirigir.
   (h) Dirija somente se não beber.
   (i) É suficiente não dirigir para beber.
   (j) É suficiente beber para não dirigir.
   (k) É necessário não dirigir ao beber.
   (l) É necessário beber para não dirigir.

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e considere $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ e $\mathcal{I}(A) = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, denominados **Núcleo** e **Imagem** de A, respectivamente. Prove que:
   (a) $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
   (b) $\mathcal{I}(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.
   (c) $\mathcal{N}(A)$ é ortogonal a $\mathcal{I}(A^T)$.
   (d) $\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{I}(A^T)$.

3. Prove que toda matriz quadrada pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

4. Sejam A e B matrizes quadradas. Sob que condições $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$? Prove que traço$(AB - BA) = 0$.

5. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ não nulos e $A = uv^T$. Prove que posto$(A) = 1$.

6. Prove que toda matriz de posto $p \geq 1$ é a soma de p matrizes de posto 1.

7. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e posto$(A) = n$. Prove que A^TA é não singular.

8. Sejam A e B matrizes invertíveis. Determine a matriz X tal que:
   (a) $AX = B$.
   (b) $AXB = I$.
   (c) $ABX = B^T$.
   (d) $ABA^{-1}X = A^T$.

9. Sejam A e B matrizes não singulares. Prove que:
   (a)$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \equiv A^{-T}$.
   (b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   (c) $B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1}$.

10. Seja A uma matriz triangular inferior (superior) invertível. Prove que A^{-1} é uma matriz triangular inferior (superior).

11. Seja $A \in R^{n\times n}$. Prove que $I + A$ é não singular se:
    (a) $x^TAx \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
    (b) A é anti-simétrica, isto é, $A^T = -A$.

12. Sejam $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular, $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$. Sob que condições a matriz $A = \begin{pmatrix} B & u \\ v^T & a \end{pmatrix}$ é não singular? Assumindo a condição estabelecida, determine A^{-1}.

13. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in R^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$ tais que $Ac = b$. Prove que $Ax = b$ se e somente se existe $u \in \mathcal{N}(A)$ tal que $x = u + c$.

Fatorações

1. Seja A uma matriz triangular inferior (superior) invertível. Prove que A^{-1} é uma matriz triangular inferior (superior).

2. Invente um sistema linear com 6 equações e 4 variáveis em cada um dos seguintes casos, justificando a sua escolha: sem solução; com solução única; com infinitas soluções.

3. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 10 & 30 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ e $c = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$.
   (a) Determine a decomposição $PA = LU$.
   (b) Resolva os sistemas lineares $Ax = b$ e $Ay = c$.
   (c) Determine A^{-1}.

4. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $c = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$. Usando a fatoração LU de A, mostre que $Ax = b$ não tem solução e que $Ax = c$ tem infinitas soluções.

5. Determine a fatoração LU, com e sem pivoteamento parcial, das matrizes abaixo, usando duas casas decimais de precisão:
   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 0.001 & 1 \\ 1 & 0.01 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Seja $u \in \mathbb{R}^n$ e considere a matriz $A = I + uu^T$. Prove que A é simétrica definida positiva.

7. Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida positiva.
   (a) Prove que $ac > b^2$.
   (b) Use o item (a) para provar que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica e definida positiva, então $|a_{ij}| < \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

8. Encontre a fatoração de Choleski das matrizes:
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 27 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Normas

1. Sejam $u = [3, 4, 5]^T$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determine $\|u\|_1$, $\|u\|_2$, $\|u\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ e $\|A\|_F$.

2. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que:
   (a) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$.
   (b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$.
   (c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.
   (d) $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1 . \|x\|_\infty$.

3. Sejam $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Prove que se posto$(A) = n$ então $\|x\|_A = \|Ax\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Analise o caso particular $m = 1$.

4. Seja $v \in \mathbb{R}^n$. Prove que $\|v^T\|_1 = \|v\|_\infty$, $\|v^T\|_2 = \|v\|_2$ e $\|v^T\|_\infty = \|v\|_1$.

5. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\|\cdot\|$ uma norma de matriz induzida tais que $\|A\| < 1$. Prove que $I + A$ é invertível.

6. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertíveis. Prove que:
   (a) $\kappa(I) = 1$.
   (b) $\kappa(A) \geq 1$.
   (c) $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$.
   (d) $\kappa(rA) = \kappa(A)$, $r \in \mathbb{R} - \{0\}$.
   (e) $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\,\kappa(B)$.
   (f) $\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A^T)$.
   (g) $\kappa(A) = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \;/\; \min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Ortogonalidade

1. Prove que uma matriz triangular ortogonal é diagonal.

2. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Q_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $Q_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonais, e $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que:
   (a) $\|Q_n x\|_2 = \|x\|_2$.
   (b) $\|Q_n\|_2 = 1$.
   (c) $\kappa_2(Q_n) = 1$.
   (d) $\|Q_m A\|_2 = \|AQ_n\|_2 = \|A\|_2$.
   (e) $\|Q_m A\|_F = \|AQ_n\|_F = \|A\|_F$.

3. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $A^T = A$. Prove que:
   (a) Se $x^T A x = x^T x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então $A = I$.
   (b) Se $\|Bx\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então B é ortogonal.

4. Analise a fatoração QR de uma matriz ortogonal.

5. Usando os métodos de Householder e de Givens, determine a fatoração QR da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 19 & 34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}.$$

6. Para cada uma das matrizes abaixo determine uma fatoração QR reduzida usando os métodos de Householder e de Givens:
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Quadrados Mínimos Lineares

1. Seja $b = (1, 2, 3, 4)^T$. Para cada uma das seguintes matrizes A encontre as soluções de quadrados mínimos de $Ax = b$, interpretando geometricamente. Em caso de mais de uma solução, determine a de norma 2 mínima.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sejam dados $d_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i < j \leq n$, e considere o problema de encontrar $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_1 = 0$ e $a_i - a_j \approx d_{ij}$. Formule esse problema como um problema de quadrados mínimos e encontre a sua solução.

3. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com posto n, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade, $b \in \mathbb{R}^m$ e considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Prove que esse sistema tem solução única $\bar{x}$ e $\bar{r}$ e interprete esse resultado.

4. Use a fatoração QR para encontrar a solução de quadrados mínimos do sistema linear $Ax =$ onde A é a matriz do exercício 6(b) da lista anterior e $b = (1, 2, 3)^T$.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com posto n e defina $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$, denominada pseudo-inversa de A. Interprete A^+ geometricamente e prove que:
   (a) $(AA^+)^T = AA^+$.
   (b) $(A^+A)^T = A^+A$.
   (c) $AA^+A = A$.
   (d) $A^+AA^+ = A^+$.

6. Sejam $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u, c \in \mathbb{R}^n$, $v, d \in \mathbb{R}^m$, $A = \begin{pmatrix} B & u \\ 0 & v \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Prove que se A tem posto completo, então $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} \|Ax - b\|_2 = \|d\| \operatorname{sen} \theta$, onde θ é o ângulo agudo entre v e d.

Métodos Iterativos

1. Considere o sistema linear $Ax = b$ onde
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Exiba o esquema de iterações para os métodos de Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel e Kaczmarz e analise a convergência em cada caso.

2. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$. Determine os valores de a para os quais os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel convergem a partir de qualquer aproximação inicial.

3. Sejam $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz identidade e considere $A = \begin{pmatrix} I & S \\ -S^T & I \end{pmatrix}$. Sob que condições sobre S os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel convergem a partir de qualquer aproximação inicial?

Autovalores e Autovetores

1. Para cada uma das matrizes abaixo encontre todos os autovalores e autovetores associados:
(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Explique porque a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tem pelo menos dois autovalores reais.

3. Sejam A uma matriz, λ um autovalor de A, $c \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$. Prove que:
(a) λ é um autovalor de A^T. (b) $c\lambda$ é um autovalor de cA.
(c) λ^r é um autovalor de A^r. (d) $\lambda + c$ é um autovalor de $A + cI$.
(e) Se A é não singular então $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1}.

4. Sejam A uma matriz quadrada e $\alpha \in \mathbb{C}$. Prove que v é um autovetor de A se e somente se v é um autovetor de $A - \alpha I$.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com elementos $a_{ii} = n$ e $a_{ij} = 1$ para $i \neq j$. Prove que A não tem autovalores nulos e, portanto, é não singular.

6. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e defina $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Prove que $\Lambda(T) = \Lambda(A) \cup \Lambda(C)$.

7. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica e defina $r(x) = \dfrac{x^T A x}{x^T x}$ para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Prove que $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} r(x) = \max\ \Lambda(A)$ e $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} r(x) = \min\ \Lambda(A)$.

8. Prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: A tem todos os seus autovalores iguais se e somente se A é uma matriz escalar, isto é, $A = aI$ para algum $a \in \mathbb{C}$.

9. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizável. Prove que $\rho(A) < 1$ se e somente se $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$.

10. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $x^0 = (1, 0)^T$.
(a) Determine os autovalores/autovetores de A.
(b) Aplique o Método das Potências.
(c) Aplique o Método das Potências Inverso.
(d) Aplique o Método de Rayleigh.
(e) Analise os resultados obtidos.

SVD

1. Seja $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz hermitiana, isto é, $C^H = C$. Prove que:
   (a) Se $C = A + iB$ com $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ então A é simétrica e B é antissimétrica.
   (b) $C \pm iI$ é invertível.
   (c) $(C \pm iI)^{-1}(C \mp iI)$ é unitária.

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ normal.
   (a) Prove que $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = -a_{21}$.
   (b) Encontre os autovalores de A.
   (c) Sob que condições A é ortogonal?

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com posto$(A) = p$ e SVD dada por $A = U\Sigma V^T$, onde $U = [u_1, \ldots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_q) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $q = \min\{m, n\}$. Prove que:
   (a) $Av_i = \sigma_i u_i$, $i = 1, \ldots, q$.
   (b) $A^T u_i = \sigma_i v_i$, $i = 1, \ldots, q$.
   (c) $A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i$, $i = 1, \ldots, q$.
   (d) $AA^T u_i = \sigma_i^2 u_i$, $i = 1, \ldots, q$.
   (e) p é igual ao número de valores singulares positivos.
   (f) $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \sigma_i u_i v_i^T$.
   (g) $\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{\max \Lambda(A^T A)} = \sqrt{\max \Lambda(AA^T)}$.
   (h) $\|A\|_F^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2$.
   (i) Se $m = n$ então $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$.
   (j) $u_1, \ldots, u_p$ é uma base ortonormal de $\mathcal{R}(A)$.
   (k) $v_{p+1}, \ldots, v_n$ é uma base ortonormal de $\mathcal{N}(A)$.

4. Seja $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a pseudoinversa de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Prove que:
   (a) $(A^+)^+ = A$.
   (b) $0^+ = 0^T$.
   (c) $(A^T)^+ = (A^+)^T$.
   (d) $(\alpha A)^+ = \alpha^{-1}A^+$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.
   (e) $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $(A^+A)^T = A^+A$ e $(AA^+)^T = AA^+$
   (e) Se posto$(A) = n$ então $A^+ = (A^T A)^{-1}A^T$.
   (f) Se posto$(A) = m$ então $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$.
   (g) $\|AA^+\|_2 = \|A^+A\|_2 = 1$.

5. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine a matriz de posto um mais próxima de A na norma 2 e na norma de Frobenius.

6. Determine a SVD das seguintes matrizes:

   (a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (f) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (g) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

7. O que você pode dizer sobre a SVD de uma matriz simétrica? E de uma matriz ortogonal?

8. Determine os autovalores, o determinante e os valores singulares de uma matriz de Householder de ordem n.

9. Sejam $0 \neq u \in \mathbb{R}^m$ e $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. Encontre a SVD e a pseudoinversa da matriz $A = uv^T$.

Sistemas Não Lineares

1. Seaja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ x_2 - x_1^3 + 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Através de um gráfico identifique toda as soluções de $F(x) = 0$.
   (b) Aplique o Método de Newton para encontrar aproximações das soluções.
   (c) O que acontece se tomamos $x^0 = (\varepsilon, 0)^T$ com $|\varepsilon| \ll 1$?

2. No método de Newton Estacionário o Jacobiano do ponto inicial é usado em cada iteração, isto é, para $k = 0, 1, \ldots$ temos que $x^{k+1} = x^k + s^k$ onde $F'(x^0)s^k = -F(x^k)$. Use esse método para estimar as soluções do sistema do exercício anterior e analise os resultados obtidos.