Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Curso de Geometria Plana – Nível 2

Professores: Cleber Assis, Samuel Barbosa e Tiago Miranda

Aula 0

POTI 2015

Curso Básico

Geometria Plana

Este material compila os arquivos do projeto Portal da Matemática, disponível em

`http://matematica.obmep.org.br/`

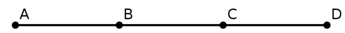
e serve como introdução aos tópicos iniciais de um curso de treinamento olímpico. Em geral, os assuntos são independentes e podem ser estudados em qualquer ordem. Neles, o leitor encontrará muitos exercícios escolares mesclados com problemas elementares de olimpíadas, todos com respostas e soluções. Além disso, no endereço do Portal da Matemática, existem vídeos que podem ser acessados gratuitamente cobrindo todo o conteúdo abaixo. Bons estudos!

Sumário

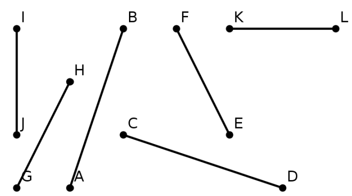
Versão: 798 (Data: 27 de abril de 2015.)

1 Conceitos Geométricos Básicos

Problema 1. Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, todos sobre uma mesma reta como indica a figura abaixo, determine o número de segmentos distintos que podem ser formados com vértices em tais pontos.



Problema 2. Usando o compasso, determine na figura abaixo quais segmentos são congruentes.



Problema 3. Determine o único item verdadeiro.

a) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares.

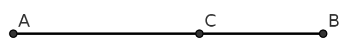
b) Se dois segmentos são adjacentes, então eles são consecutivos.

c) Se dois segmentos são congruentes, então eles são colineares.

d) Se dois segmentos são colineares, então eles são consecutivos.

e) Dois segmentos consecutivos e congruentes sempre são colineares.

Problema 4. Sabendo que o segmento AB mede $20cm$, determine o comprimento do segmento AC nos seguintes casos:

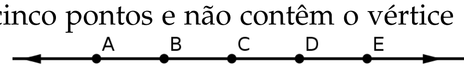


a) Quando $CB = 8cm$.

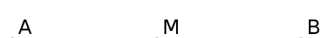
b) Quando $AC - CB = 1cm$.

c) Se $AC = 2x$ e $CB = x - 1$.

Problema 5. Abaixo estão representados cinco pontos distintos sobre uma mesma reta. Quantas semirretas possuem origem em algum desses cinco pontos e não contêm o vértice B?



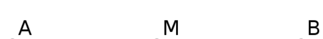
Problema 6. Seja M o ponto médio de AB. Se $AM = 2x - 5$ e $MB = x + 7$, encontre o valor de x.



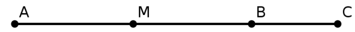
Problema 7. Os pontos A, B e P são distintos e estão sobre uma mesma reta com A situado à esquerda de B. Se $PA > AB$ e $PB < AB$, o que podemos dizer sobre a ordem dos três pontos na reta?

Problema 8. Existem quatro pontos consecutivos A, B, C e D sobre uma reta. Se $AD = 2BC$ e $AB + CD = 20$, determine o valor de AD.

Problema 9. Seja M o ponto médio de AB. Se $AM = 7x - 1$ e $MB = x + 11$, encontre o valor de x.



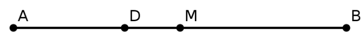
Problema 10. No desenho abaixo, M é o ponto médio de AB. Se $AM = x$, $BC = x - 1$ e $AC = 4x - 9$, determine o comprimento de AB



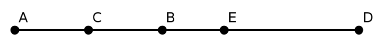
Problema 11. Os pontos A, B e C são colineares com $AB = 30cm$ e $BC = 10cm$. Determine os possíveis valores de AC.

Problema 12. Dados quatro pontos consecutivos A, B, C e D sobre uma mesma reta tais que $AB \cdot BD = AC \cdot CD$. Se $AB = 9cm$, encontre o valor de CD.

Problema 13. No desenho abaixo, M é o ponto médio do segmento AB. Se $DB - DA = 10cm$, determine o comprimento de DM.



Problema 14. No desenho abaixo, C é o ponto médio de AB e E é o ponto médio de CD. Sabendo que $AB + ED - AC = 30cm$, determine o comprimento de AE.



Problema 15. Em uma reta se encontram os quatro pontos consecutivos A, B, C e D com $AB = AC - 3$, $AB + CD = 4$ e que satisfazem a seguinte relação $3AB - BD - 2CD = 3$. Determine o valor de AD.

Problema 16. Os pontos A, B, C e D estão sobre uma mesma reta e são consecutivos. Sabendo que $BC = CD$ e que $AC \cdot BC = 40$, determine o valor de $AD^2 - AB^2$.

Problema 17. Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos segmentos AB e BC, contidos numa mesma reta de modo que $AB = BC$, com $A \neq C$. É sempre verdade que MN é congruente a AB? Justifique.

Problema 18. João deseja construir um circuito para o seu trem de brinquedo usando trilhos no formato de segmentos de reta de comprimento fixo. Na interseção de dois trilhos, ele precisa colocar uma peça para que o trem mude sua direção. É possível João construir um circuito fechado com exatamente 10 peças de mudança e de forma que cada trilho possua exatamente 4 tais peças?

Problema 19. a) São dados 3 pontos escolhidos sobre a reta surpote de AB, todos fora do segmento de reta AB. É possível que a soma das distâncias desses pontos ao vértice A seja igual à soma das distâncias desses pontos ao vértice B?

b) Se fossem 1001 pontos ao invés de três, seria possível que a soma das distâncias desses pontos ao vértice A fosse igual à soma das distâncias desses pontos ao vértice B?

Problema 20. Em um tabuleiro 5×5, João deve desenhar segmentos de reta ligando vértices opostos dos quadrados 1×1 de modo que quaisquer dois segmentos desenhados não possuam pontos em comum (incluindo seus vértices). Qual o número máximo de tais segmentos que podem ser desenhados por João?

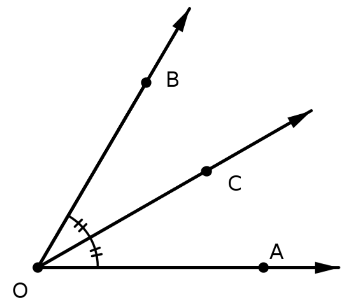
Problema 21. a) Em quantas partes distintas três retas dividem um plano se não existem duas delas paralelas e também não existem três coincidentes?

b) Em quantas partes distintas cinco retas dividem um plano se não existem duas delas paralelas e também não existem três coincidentes?

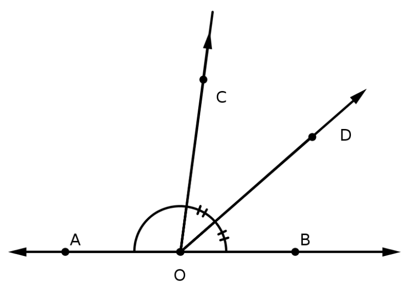
Você conseguiria estipular uma fórmula geral para o mesmo problema envolvendo n retas?

2 Ângulos

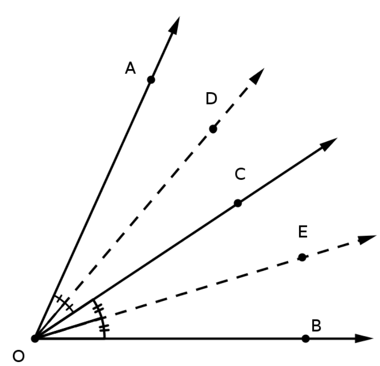
Problema 22. No desenho abaixo, OC é bissetriz do ângulo $\angle AOB$. Se $\angle AOC = 2x - 5^\circ$ e $\angle COB = x + 3^\circ$, quanto vale x?



Problema 23. No desenho abaixo, A, O e B são colinares e OD é bissetriz do ângulo $\angle BOC$. Além disso, $\angle BOD = x + 10^\circ$, $\angle DOC = y + 5^\circ$, $\angle COA = 3y$. Determine os valores de x e y.



Problema 24. No desenho abaixo, OE e OD são bissetrizes dos ângulos $\angle BOC$ e $\angle COA$, respectivamente. Se o ângulo $\angle AOB$ mede 70°, determine a medida do ângulo $\angle DOE$



Problema 25. Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Dois ângulos consecutivos são adjacentes.

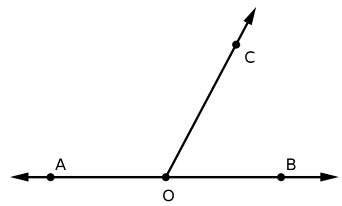
b) Dois ângulos opostos pelo vértice são adjacentes.

c) Dois ângulos suplementares são adjacentes.

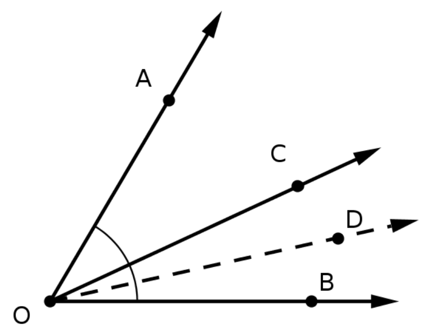
d) Dois ângulos adjacentes são sempre consecutivos.

e) Dois ângulos opostos pelo vértice não são consecutivos.

Problema 26. Na figura abaixo, temos $\angle BOC = 3x + 5°$ e $\angle AOC = 2x - 5°$. Sabendo que A, O e B são colineares, determine o valor do ângulo x.

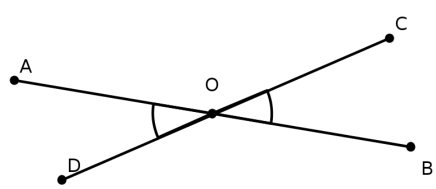


Problema 27. Na figura abaixo, $\angle AOC = 2\angle BOC$. Se $\angle AOB = 60°$, determine o valor do ângulo formado entre a bissetriz OD de $\angle BOC$ e a semirreta OA.

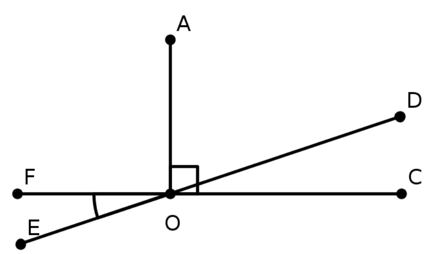


Problema 28. A soma de dois ângulos é 140°. Um deles é o quádruplo do outro subtraído de 40°. Determine os dois ângulos.

Problema 29. Duas retas se encontram em O como indica a figura abaixo. Se $\angle AOD = 2x + 10°$ e $\angle COB = 50°$, determine o valor de x.



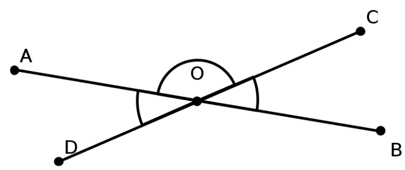
Problema 30. No desenho abaixo, $\angle AOD = 55°$. Determine o valor do ângulo $\angle EOF$.



Problema 31. Um ângulo reto foi dividido em três ângulos adjacentes cujas medidas são proporcionais aos números 2, 3 e 4. Determine os valores desses ângulos.

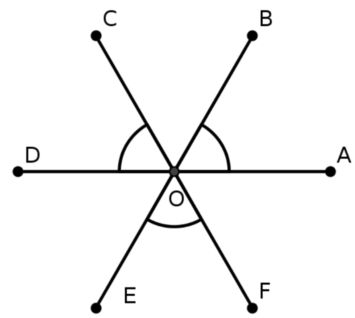
Problema 32. Os ângulos x e y são complementares e $x - y = 10°$. Qual o valor de x?

Problema 33. Na figura abaixo, $\angle AOD = 3x + 10°$ e $\angle COB = 2x + 20°$. Determine o ângulo $\angle AOC$,



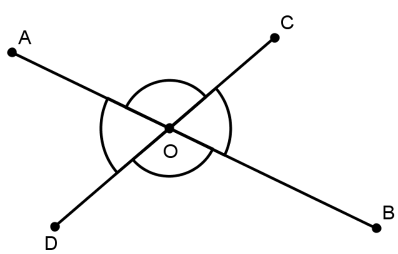
Problema 34. Determine a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes que somam 150°.

Problema 35. No desenho abaixo, $\angle AOB = \angle COD = \angle EOF = x$. Determine o valor de x.



Problema 36. Duas retas são concorrentes em um ponto O. Quantos ângulos distintos ficam determinados por elas no plano que as contém?

Problema 37. No desenho abaixo, os segmentos AB e CD determinam quatro ângulos. Determine os valores de x, y e z em cada um dos casos abaixo:



a) $\angle COB = 80°$, $\angle DOB = x + y$, $\angle CAO = y + z$ e $\angle DAO = x + z$.

b) $\angle COB = x + 40°$, $\angle DOB = 3x + 20°$ e $\angle AOC = z$.

Problema 38. Simplifique as seguintes medidas como no modelo:

$$\begin{aligned} 1°58'237'' &= 1°58'57'' + 180'' \\ &= 1°61'57'' \\ &= 1°01'57'' + 60' \\ &= 2°01'57''. \end{aligned}$$

a) $35°150'$.

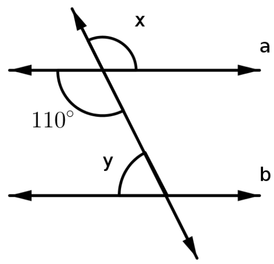
b) $50°130'$.

c) $75°20'137''$.

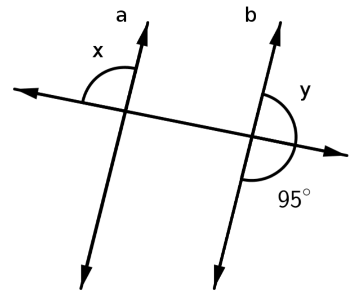
d) $58°58'260''$.

Problema 39. Nos desenhos abaixo, as retas a e b são paralelas. Determine os valores de x e y.

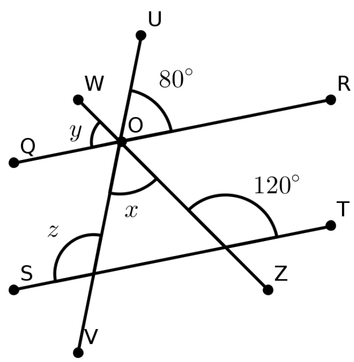
a)



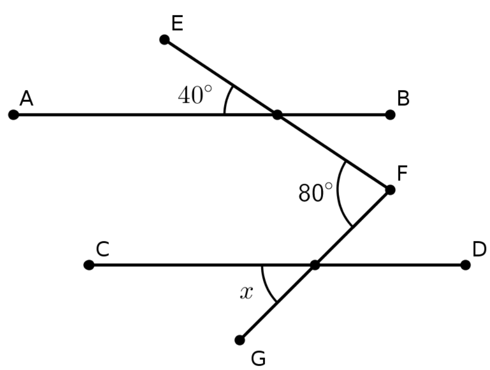
b)



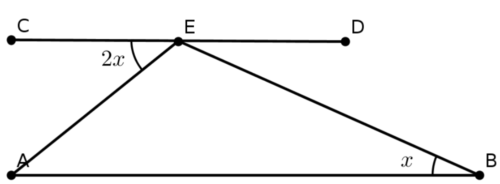
Problema 40. No desenho abaixo, os segmentos QR e ST são paralelos. Determine os valores dos ângulos x, y e z.



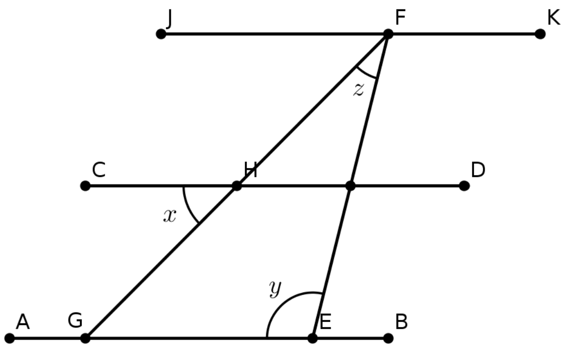
Problema 41. No desenho abaixo, os segmentos AB e CD são paralelos. Determine a medida do ângulo x.



Problema 42. No desenho abaixo, CD e AB são segmentos paralelos. Se $\angle AEB = 105°$, determine a medida do ângulo x.



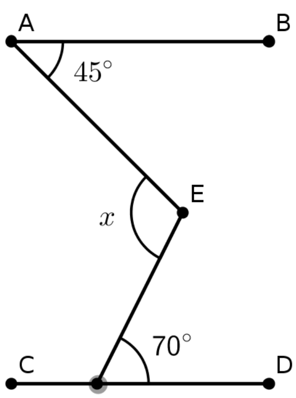
Problema 43. Na figura abaixo, JK, CD e AB são segmentos paralelos. Se $x + y = 150°$, determine o valor do ângulo z.

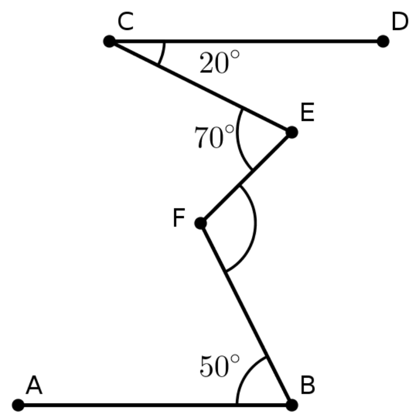


Problema 44. No desenho abaixo, AB e CD são paralelos.

a) Determine o valor do ângulo x.

b) Determine o valor do ângulo $\angle EFB$.





Problema 45. Efetue as operações indicadas:

a) $90° - 55°37'$.

b) $3 \times (7°13'23'')$.

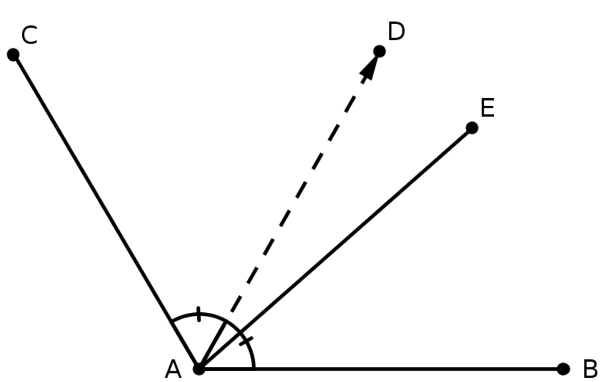
c) $(46°38'28'') \div 2$.

d) $87°27'12'' + 5°34'48''$.

Problema 46. Qual o ângulo formado entre as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares?

Problema 47. A diferença entre dois ângulos adjacentes mas não consecutivos é $100°$. Determine o ângulo formado por suas bissetrizes.

Problema 48. No desenho abaixo, DA é bissetriz do ângulo $\angle CAB$. Determine o valor do ângulo $\angle DAE$ sabendo que $\angle CAB + \angle EAB = 120°$ e $\angle CAB - \angle EAB = 80°$.



Problema 49. Os ângulos x e y são tais que sua diferença é $20°$. Encontre x sabendo que seu complementar somado com o suplementar de $2x$ é o dobro do complemento de y.

Problema 50. Encontre algum ângulo x tal que o seu quadrado excede em $50°$ o quíntuplo do seu complemento.

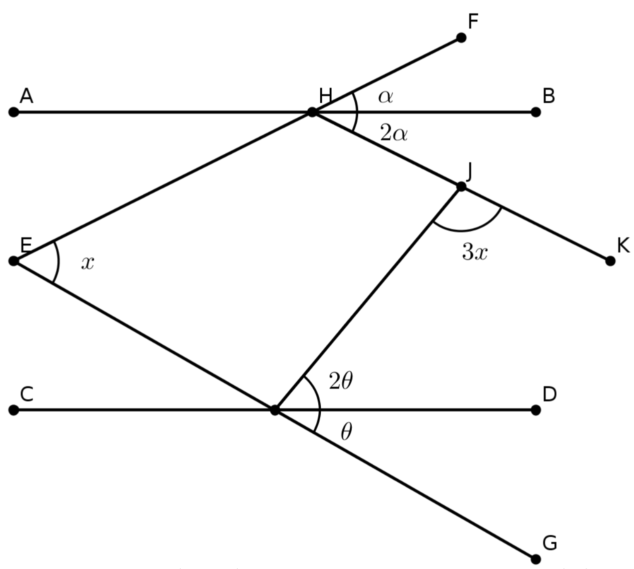
Problema 51. A soma dos complementos de x e y é igual $\frac{1}{10}$ da soma de seus suplementares. Se um deles é o quádruplo do outro, determine o menor deles.

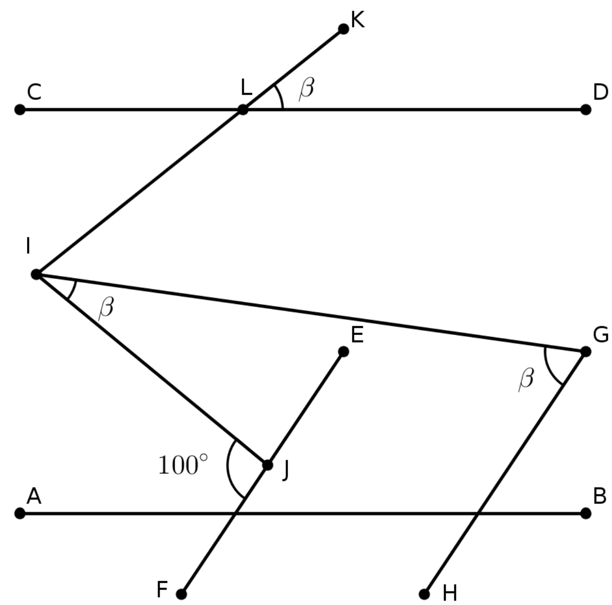
Problema 52. A que horas pela primeira vez após o meio-dia, os ponteiros de um relógio formam $110°$?
a) 12h18′ b)12h20′ c)13h22′ d)13h23′ e) 15h

Problema 53. Dois ângulos suplementares medem $3x - 40°$ e $2x + 60°$. Qual o valor do maior desses ângulos?
a) $56°$ b) $108°$ c) $124°$ d) $132°$ e) $137°$

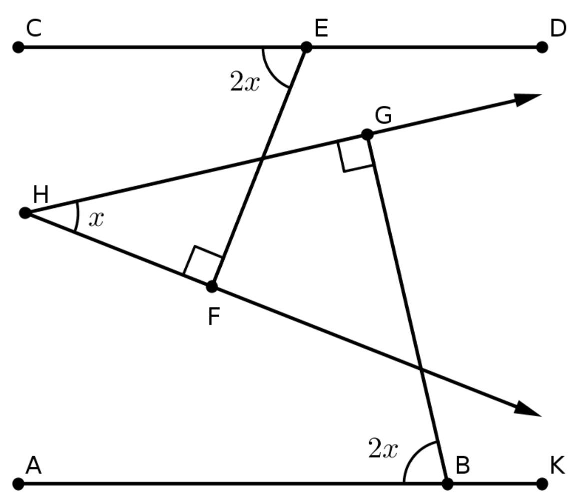
Problema 54. Efetuando $55°15'37'' - 20°42'30''$, temos:
a) $34°28'7''$ b)$34°33'7''$ c) $33°28'7''$ d) $33°33'7''$ e) $35°28'7''$

Problema 55. Nas figuras abaixo temos que AB é paralelo a CD.
a) Determine a medida do ângulo x. b) Sendo $GH \parallel EF$, determine a medida do ângulo β.

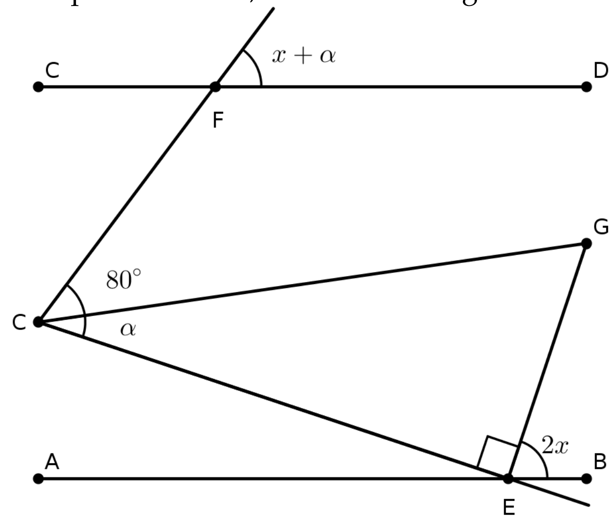




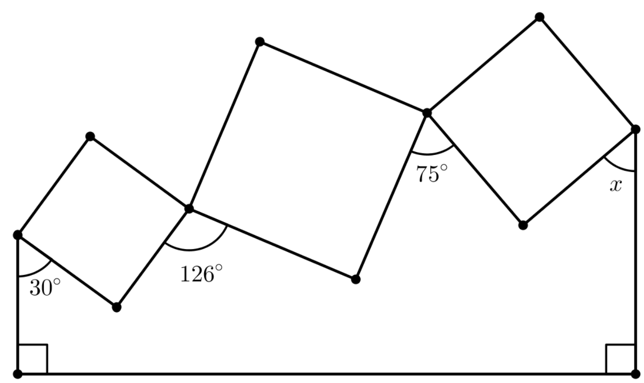
Problema 56. Sabendo que CD e AK são paralelos, determine o valor de x.



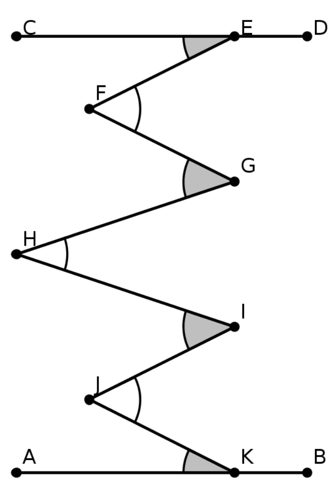
Problema 57. Sabendo que CD é paralelo a AB, determine o ângulo x.



Problema 58. Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura. Determine a medida do ângulo x.



Problema 59. No desenho abaixo, mostre que a soma dos ângulos ângulos brancos é igual à soma dos ângulos cinzas. Tal resultado vale para qualquer quantidade de "bicos" no desenho e o chamamos popularmente como Teorema dos Bicos.



3 Condição de Alinhamentos de Três Pontos e a Desigualdade Triangular

Problema 60. Em cada um dos itens abaixo, determine o número de pontos de interseção dos círculos de raios r_A e r_B centrados nos pontos A e B, respectivamente.

a) $AB = 5cm$, $r_A = 3cm$ e $r_B = 2cm$.

b) $AB = 5cm$, $r_A = 2cm$ e $r_B = 2cm$.

c) $AB = 5cm$, $r_A = 3cm$ e $r_B = 4cm$.

Problema 61. A desigualdade triangular afirma que qualquer lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois. É possível demonstrar a partir desta propriedade que se o maior dentre três segmentos é menor que a soma dos outros dois então existe um triângulo formado por tais segmentos. Nos itens abaixo, decida se existe um triângulo com as medidas dadas. Justifique sua resposta.

a) $4cm$, $5cm$ e $6cm$.

b) $7cm$, $3cm$ e $3cm$.

c) $4cm$, $4cm$ e $8cm$.

d) $3cm$, $3cm$ e $4cm$.

e) $6cm$, $6cm$ e $6cm$.

Comentário: Decorre da desigualdade triangular que um lado de um triângulo sempre deve ser maior que o valor absoluto da diferença dos outros dois lados. Para ver isso, considere as seguintes desigualdades envolvendo os lados de comprimentos a, b e c de um triângulo qualquer:

$$\begin{aligned} a+b > \quad c \Rightarrow &\quad a > c-b \\ a+c > \quad b \Rightarrow &\quad a > b-c. \end{aligned}$$

Como a deve ser maior que qualquer uma das diferenças possíveis dos outros dois lados, temos $a > |b-c|$.

Problema 62. Dois lados de um triângulo medem $3cm$ e $4cm$. Quais as possíveis medidas do terceiro lado?

Problema 63. O maior lado de um triângulo mede $5cm$ e o menor $2cm$. Quais as possíveis medidas do terceiro lado?

Problema 64. Um triângulo isósceles possui base de comprimento $4cm$. Quais as possíveis medidas dos lados iguais?

Problema 65. Usando uma régua milimetrada e compasso, construa um triângulo de lados 4, 6 e 7 .

Problema 66. Nos itens abaixo, decida se existe um triângulo com as medidas dadas. Justifique sua resposta.

a) $10cm$, $15cm$ e $25cm$.

b) $31cm$, $33cm$ e $30cm$.

c) $40cm$, $40cm$ e $45cm$.

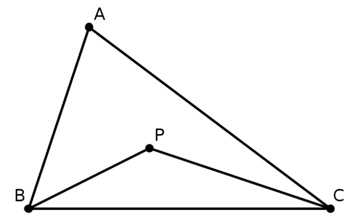
Problema 67. Um triângulo possui dois lados de medidas $10cm$ e $17cm$. Determine os possíveis valores do terceiro lado sabendo que ele é o quadrado de um inteiro.

Problema 68. Dois lados de um triângulo medem $7cm$ e $13cm$. Determine os possíveis valores do outro lado sabendo que ele é divisível por 5.

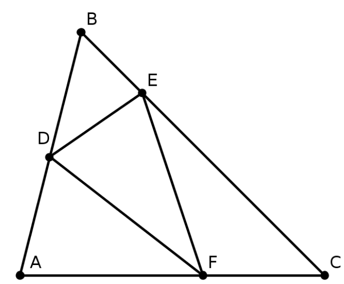
Problema 69. O lado AC do triângulo ABC tem comprimento $3,8cm$ e o lado AB tem comprimento $0,6cm$. Se o comprimento do lado BC é um inteiro, qual é o seu comprimento?

Problema 70. Prove que se é possível construirmos um triângulo com lados a, b e c, também é possível construirmos um triângulo com lados de comprimentos $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a+c}$ e $\dfrac{1}{b+c}$.

Problema 71. Seja P um ponto interno ao triângulo $\triangle ABC$, verifique que $AB + AC > BP + PC$.



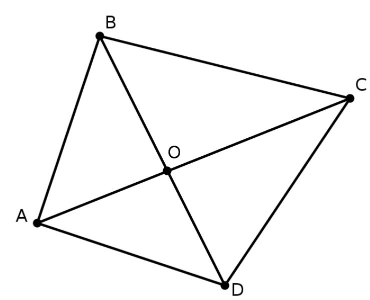
Problema 72. Mostre que o perímetro do triângulo $\triangle DEF$ da figura abaixo é menor que o perímetro do triângulo $\triangle ABC$.



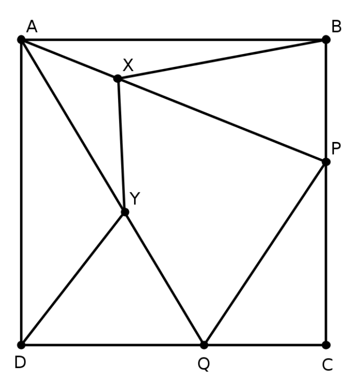
Problema 73. Na figura ao lado, verifique que:

a) $\dfrac{AB + BC + CD + DA}{2} < BD + AC$.

b) $BD + AC < AB + BC + CD + DA$.



Problema 74. (Desafio) No quadrado $ABCD$, sejam P e Q pontos pertencentes aos lados BC e CD respectivamente, distintos dos extremos, tais que $BP = CQ$. Consideram-se pontos X e Y, $X \neq Y$, pertencentes aos segmentos AP e AQ respectivamente. Demonstre que, quaisquer que sejam X e Y, existe um triângulo cujos lados têm os comprimentos dos segmentos BX, XY e DY.



Problema 75. Prove que a distância entre quaisquer dois pontos dentro de um triângulo não é maior que que metade do perímetro do triangulo.

4 Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis.

Problema 76. Determine a razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sendo

a) $AB = 4$ e $CD = 2$.

b) $AB = 7$ e $CD = 3$.

c) $AB = 1/2$ e $CD = 1/3$.

d) $AB = 3\sqrt{2}$ e $CD = \sqrt{2}$.

e) $AB = \sqrt{5}$ e $CD = 2$.

f) $AB = 2$ e $CD = \sqrt{2}$.

g) $ABCD$ um paralelogramo.

Problema 77. No exercício anterior, determine em quais ítens os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensurávies.

Problema 78. A razão entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é $7/4$. Se $AB = 28$cm, determine CD.

Problema 79. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos, onde a razão entre suas medidas é $1/2$. Se $AB = 8$cm é o segmento de maior medida, determine CD.

Problema 80. A razão entre as medidas da diagonal e do lado de um quadrado, qualquer que seja o quadrado, é $\sqrt{2}$, ou seja, são segmentos incomensuráveis. Detemine o lado de um quadrado cuja diagonal mede 8cm.

Problema 81. Sabe-se que razão entre a medida da altura e a medida do lado de um triângulo equilátero qualquer é $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Determine o comprimento do lado de um triângulo equilátero de altura medindo 6cm.

Problema 82. A razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida do seu diâmetro é um número irracional, representado pela letra grega π. Determine a medida do raio de uma circunferência, cujo comprimento é 8πcm.

Problema 83. Se os três lados de um triângulo ABC são comensuráveis dois a dois, mostre que um segmento $\overline{EF}$, cuja medida é igual à medida do perímetro do triângulo ABC, e qualquer um dos lados deste triângulo são comensuráveis.

Problema 84. Mostre que a diagonal de um quadrado e seu lado são segmentos incomensuráveis.

5 Teorema de Tales

Problema 85. Determine x nas figuras abaixo, com $r//s//t$, sabendo que:

a)

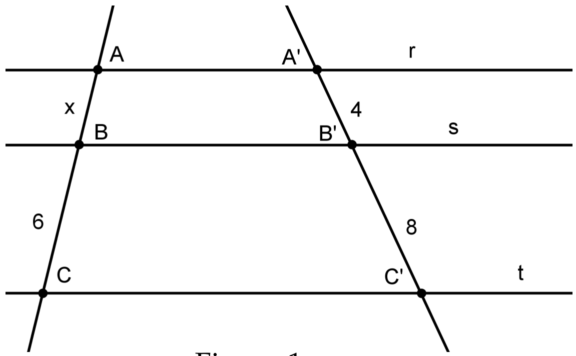


Figura 1

b)

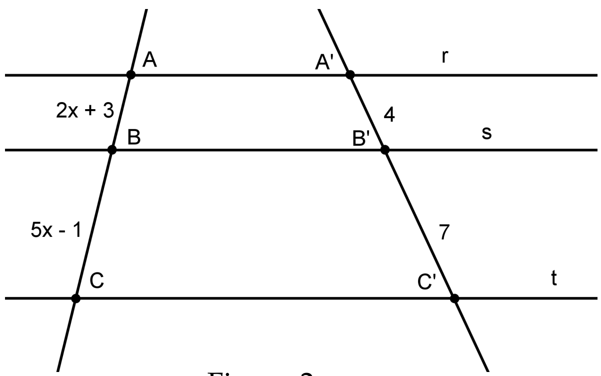


Figura 2

c)

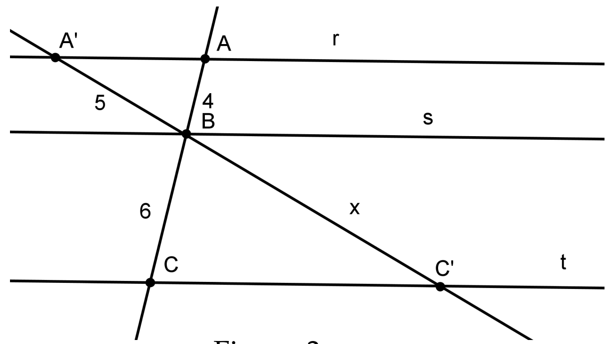


Figura 3

d)

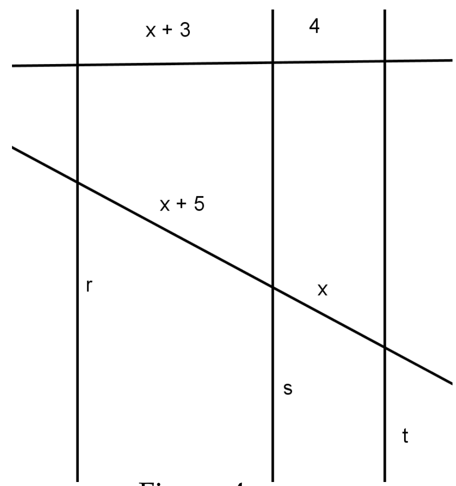


Figura 4

Problema 86. Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo à base $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$.

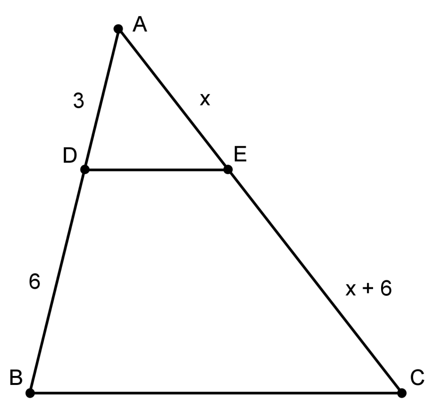


Figura 5

Problema 87. Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz do $\triangle ABC$.

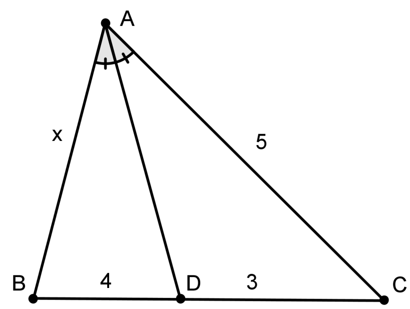


Figura 6

Problema 88. Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz externa do $\triangle ABC$.

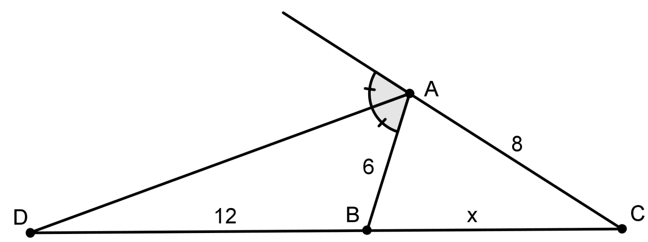


Figura 7

Problema 89. No $\triangle ABC$ abaixo, determine x, sabendo que seu perímetro mede 75cm e que $\overline{AS}$ é bissetriz.

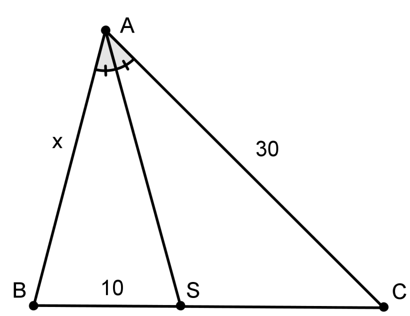


Figura 8

Problema 90. Na figura abaixo, determine as medidas de x e y, sabendo que $\overline{AR}$ é bissetriz do $\triangle ABC$ e $BC = 15$.

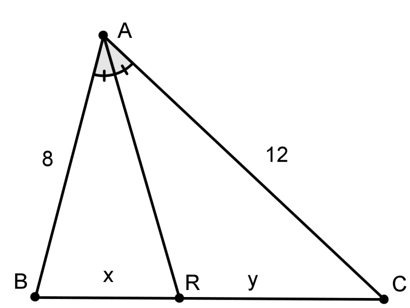


Figura 9

Problema 91. Sabendo que $\overline{BC}//\overline{DE}$ na figura abaixo, determine a medida do perímetro do $\triangle ABC$.

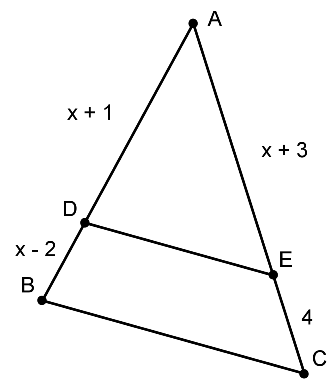


Figura 10

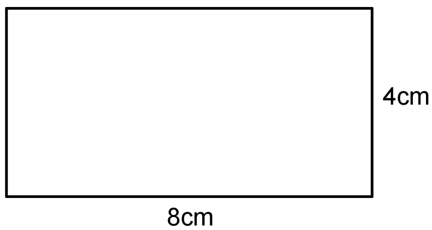
Problema 92. Seja um triângulo $\triangle ABC$, no qual $AB = 10$, $AC = 12$ e $BC = 14$. A bissetriz interna que passa por B, intercepta $\overline{AC}$ em K. A bissetriz interna que passa por C, intercepta $\overline{BK}$ em J. Determine se os segmentos $\overline{BJ}$ e $\overline{JK}$ são comensuráveis.

Problema 93. O $\triangle ABC$ é retângulo em A. Se sua hipotenusa mede 15cm e um dos catetos é 3cm maior que outro, sendo que uma das bissetrizes internas intercepta o maior cateto ($\overline{AC}$) no ponto D, determine a medida do segmento $\overline{BD}$.

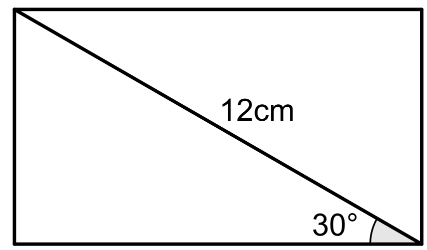
6 Área de Figuras Planas: Resultados Básicos

Problema 94. Determine a área dos retângulos abaixo:

a)



b)



Problema 95. Determine a área de um quadrado

a) cujo lado mede $8cm$.

b) cujo lado mede $7,1cm$.

c) cujo lado mede $\sqrt{3}cm$.

d) cuja diagonal mede $6cm$.

Problema 96. Determine a medida do lado de um quadrado cuja área é

a) $25cm^2$.

b) $12cm^2$.

Problema 97. Determine a área de um losango

a) cujas diagonais medem $5cm$ e $8cm$.

b) cujo lado mede $5cm$ e a diagonal menor mede $6cm$.

c) cujo lado mede $8cm$ e um dos ângulos internos mede 120^o.

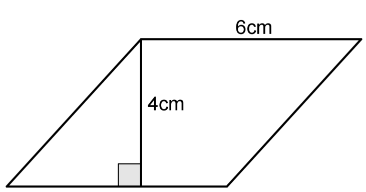
Problema 98. Determine a área de um trapézio de bases medindo $5cm$ e $7cm$ e altura medindo $4cm$.

Problema 99. Determine a área de um quadrado cujo perímetro é $72cm$.

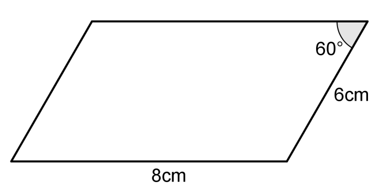
Problema 100. Determine a área de um trapézio isósceles cujos bases têm $6cm$ e $12cm$ de medida e os outros lados, $5cm$.

Problema 101. Calcule a área dos paralelogramos abaixo

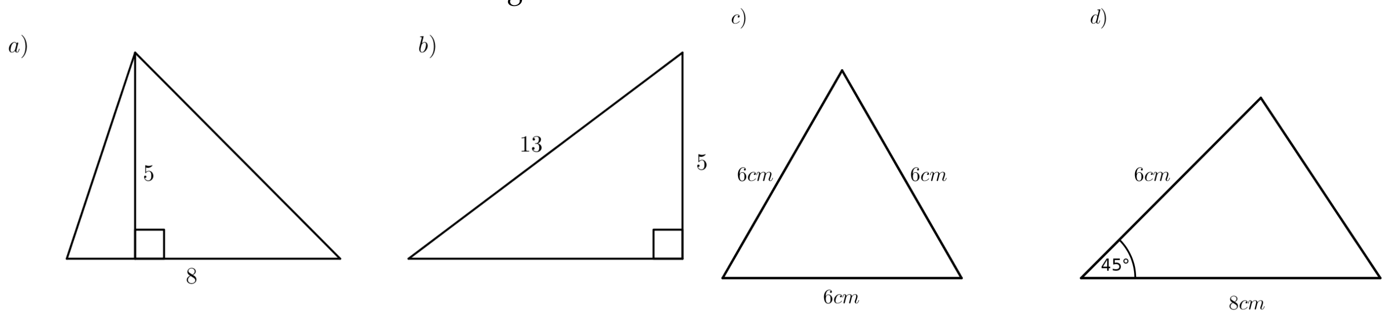
a)



b)



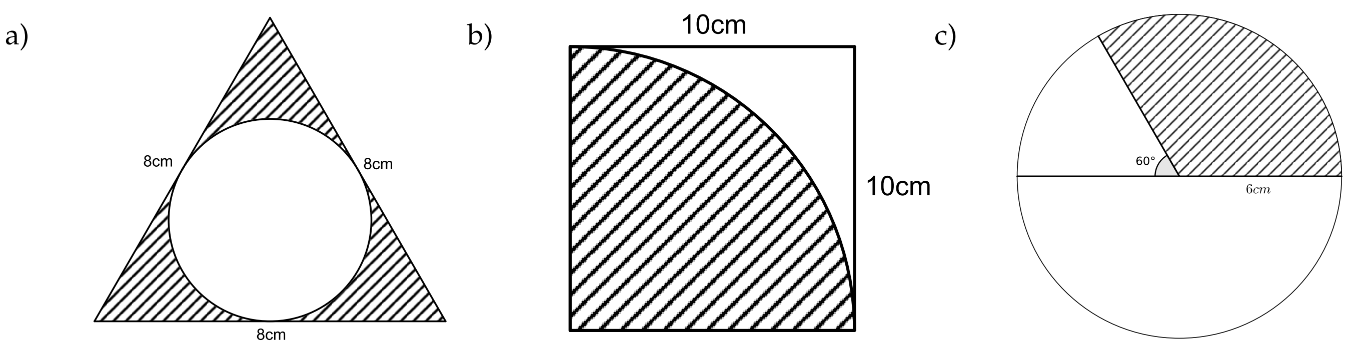
Problema 102. Calcule a área dos triângulos abaixo.



Problema 103. A altura de um retângulo é a metade de sua base. Se sua área é $450m^2$, determine suas dimensões.

Problema 104. Aumentando em 10% o comprimento de um retângulo e diminuindo em 10% sua largura, determine sua nova área, sabendo que a área inicial era $100cm^2$.

Problema 105. Determine a área hachurada nas figuras abaixo.

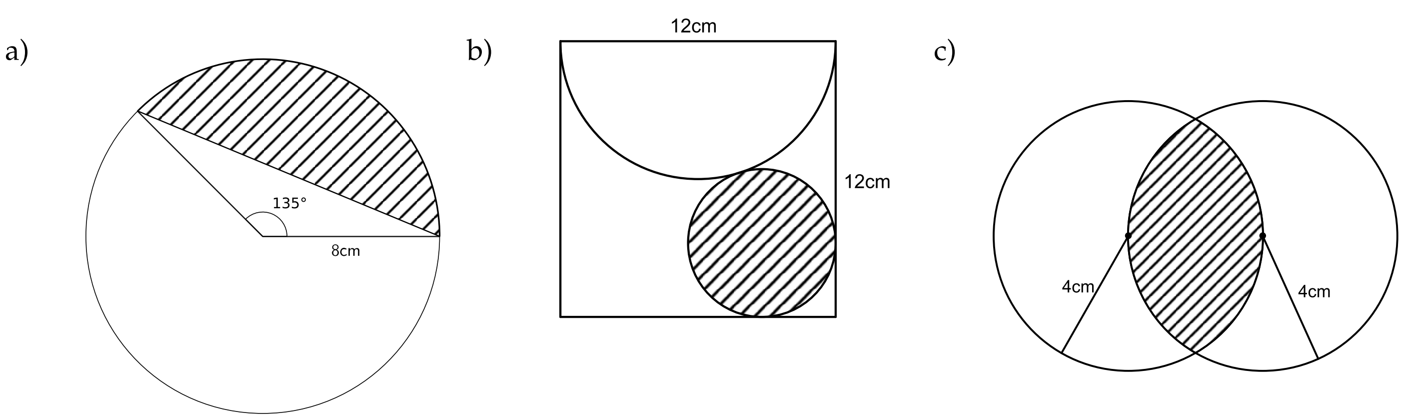


Problema 106. A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça. (Disponível em: `www.arq.ufsc.br`. Acesso em: 3 mar 2012).

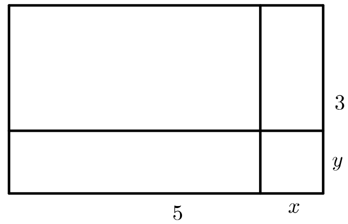
Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam $30cm$ e $15cm$. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em

a) 4% b) 20% c) 36% d) 64% e) 96%.

Problema 107. Determine a área hachurada nas figuras abaixo.

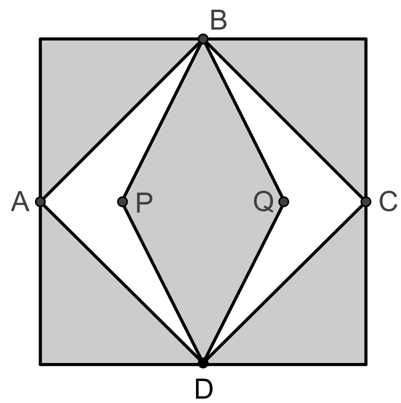


Problema 108. Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento x no comprimento e y na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5–x)(3–y)$.



Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por
a) $2x$ b) $15 - 3x$ c) $15 - 5x$ d) $-5y - 3x$ e) $5y + 3x - xy$.

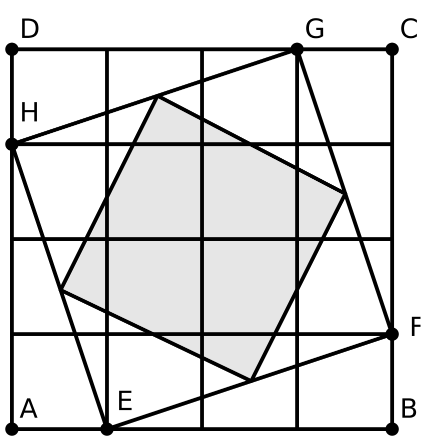
Problema 109. Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo $1m$, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado de área $1m$ e os segmentos AP e QC medem $1/4$. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa $R\$30,00$ o m^2 e outro para a parte mais clara (regiões $ABPDA$ e $BCDQB$), que custa $R\$50,00$ o m^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?
a) $R\$22,50$ b) $R\$35,00$ c) $R\$40,00$ d) $R\$42,50$ e) $R\$45,00$.

Problema 110. Considere um quadrado $ABCD$ de lado 1. Externamente ao quadrado, são formados os triângulos equiláteros ABE, BCF, CDG e DAH. Qual a área do quadrilátero $EFGH$?
a) 2 b) $2\sqrt{3}$ c) $2 + \sqrt{3}$ d) 3 e) 6.

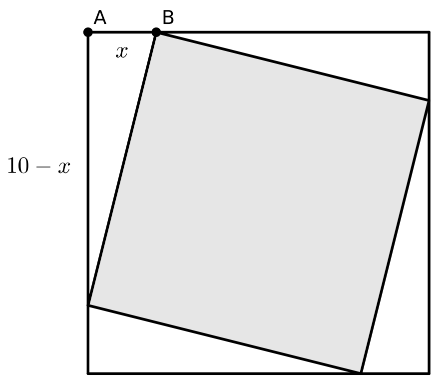
Problema 111. O quadrado $ABCD$ da figura abaixo está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado $EFGH$.



a) A área do quadrado $EFGH$ corresponde a que fração da área do quadrado $ABCD$?

b) Se o quadrado $ABCD$ tem $80cm^2$ de área, qual é o lado do quadrado sombreado?

Problema 112. Um prefeito quer construir uma praça quadrada de $10m$ de lado, que terá canteiros triangulares iguais de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, por isso o comprimento deste segmento AB está indicado por x na figura.

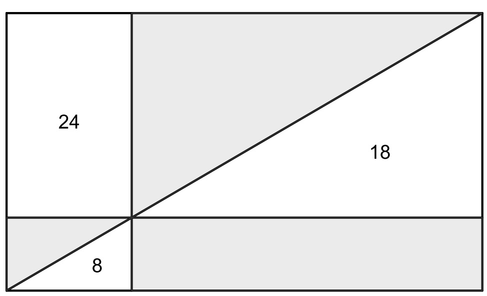


a) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.

b) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x.

c) Sabe-se que o canteiro de grama custa $R\$4,00$ por metro quadrado e os canteiros de pedra custam $R\$3,00$ por metro quadrado. Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

Problema 113. O retângulo da figura foi repartido por meio de três segmentos em várias regiões, algumas retangulares e outras triangulares. A linha não paralela aos lados é uma diagonal e os números indicam as áreas em m^2 das regiões brancas em que se encontram. Qual é a do retângulo original?

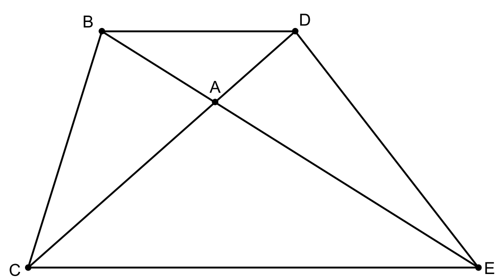


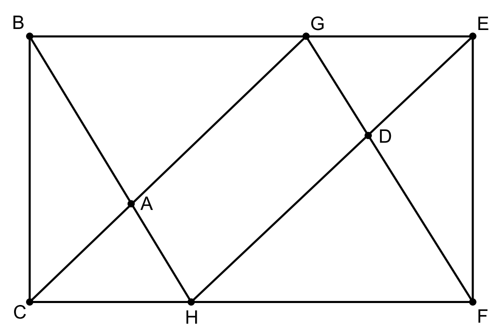
a) $60cm^2$
b) $80cm^2$
c) $90cm^2$
d) $100cm^2$
e) Impossível saber.

Problema 114.

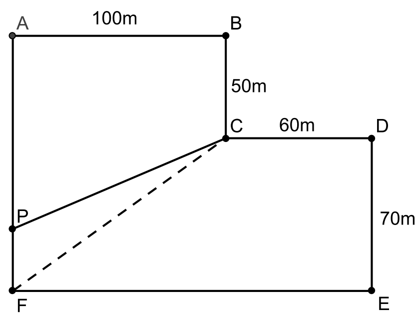
a) Temos abaixo um trapézio e suas diagonais. Mostre que a área do triângulo ABC é igual à área do triângulo ADE.

b) Na figura a seguir, $BCFE$ é um retângulo, o triângulo ABC tem área $5cm^2$ e o triângulo DEF tem átea $4cm^2$. Calcule a área do quadrilátero $AGDH$.





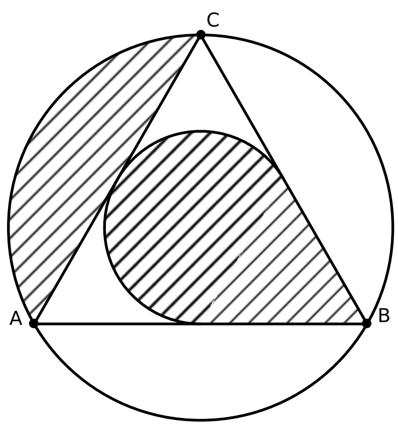
Problema 115. João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono $ABCDEF$. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P. Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, dequantos metros foi o deslocamento FP?



a) 5
b) 8
c) 10
d) 12
e) 20.

Problema 116. Seja $ABCD$ um retângulo tal que $AD = 6$ e $DC = 8$. Construa um triângulo equilátero CED tal que E, A e B estão no mesmo semi-plano determinado pela reta CD. Determine a área do triângulo AEC.

Problema 117. Considere o triângulo ABC inscrito em uma circunferência em que os menores arcos AB, BC e AC são congruentes.



Se a circunferência menor, inscrita ao triângulo ABC, tem raio igual a $1cm$, então o número que representa a área hachurada, em cm^2, é igual ao número que representa

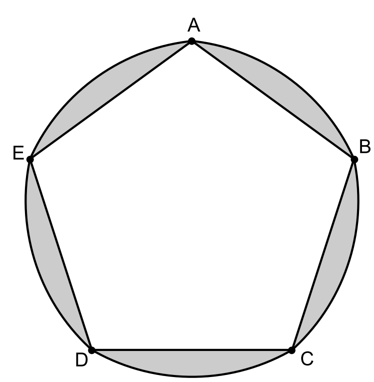
a) o comprimento do círculo menor, em cm.

b) a área do círculo maior em cm^2.

c) o comprimento do círculo maior, em cm.

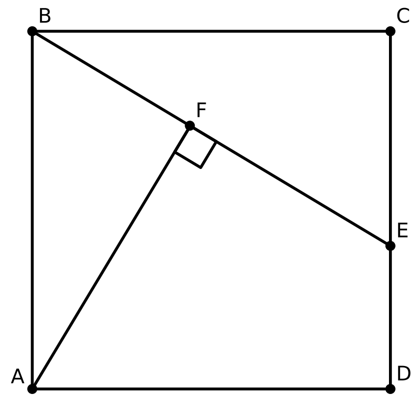
d) o dobro da área do triângulo ABC, em cm^2.

Problema 118. Na figura abaixo, $ABCDE$ é um pentágono regular de lado a e os arcos AB, BC, CD, DE e EA são congruentes e arcos de circunferência cujo raio mede a.

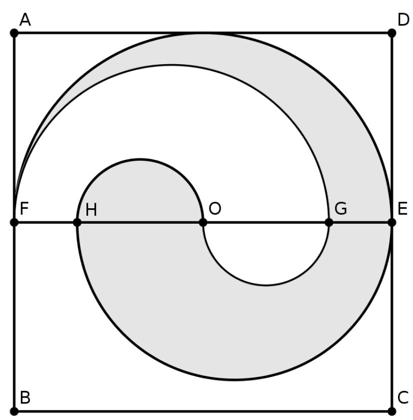


Assim, determine a área hachurada nessa figura, em função de "a".

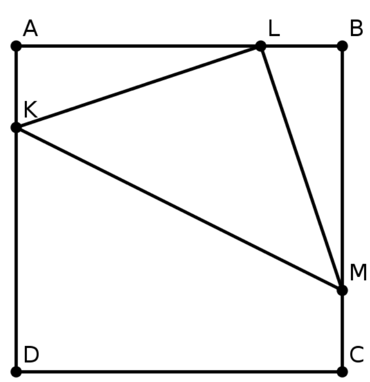
Problema 119. Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 12 e BE é um segmento de comprimento 9. Determine o comprimento do segmento AF.



Problema 120. Dado o quadrado $ABCD$ de lado 2. Sejam O o centro do quadrado e E e F os pontos médios dos lados AB e CD. Se os segmentos FH e GE são iguais e os arcos FE, EH, GO, OG, FG são semicircunferências, encontre a área sombreada.



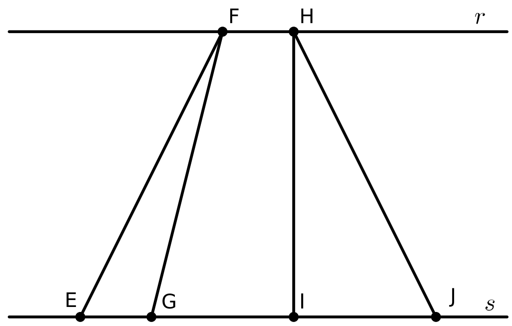
Problema 121. Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 4, K pertence ao lado AD, L pertence ao lado AB, M pertence ao lado BC e KLM é um triângulo retângulo isósceles, sendo L o ângulo reto. Então a área do quadrilátero $CDKM$ é igual a



a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

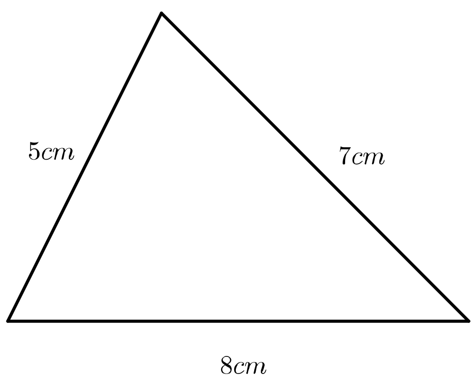
7 Áreas de Figuras Planas: Mais Alguns Resultados

Problema 122. No desenho abaixo, as retas r e s são paralelas. Se o segmento IJ é o dobro do segmento EG, determine a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle FEG$ e $\triangle HIJ$.

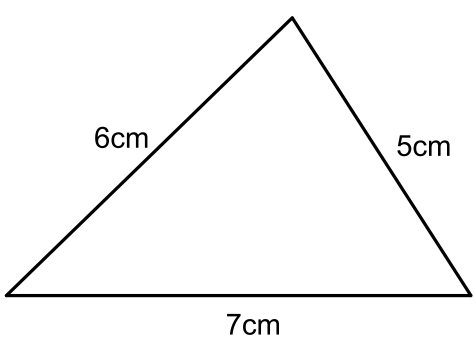


Problema 123. A fórmula de Heron afirma que a área de um triângulo de lados a, b e c é dada por $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Calcule a área dos triângulos abaixo.

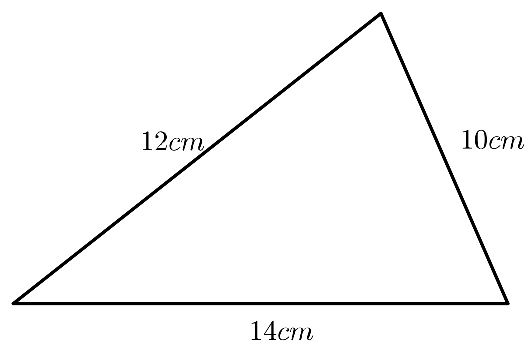
a)



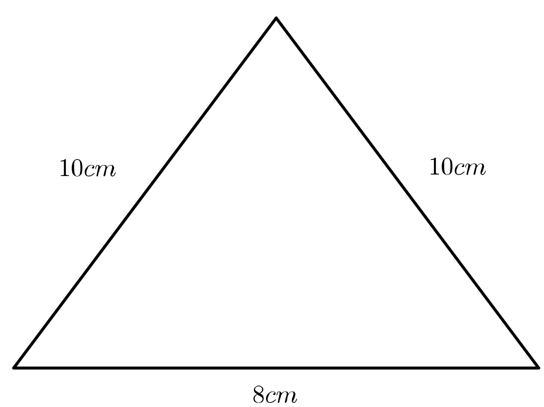
b)



c)



d)

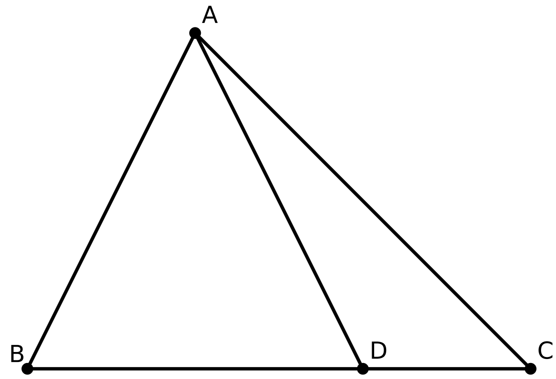


Problema 124. Calcule a área de um triângulo cujos lados medem $13cm$, $14cm$ e $15cm$.

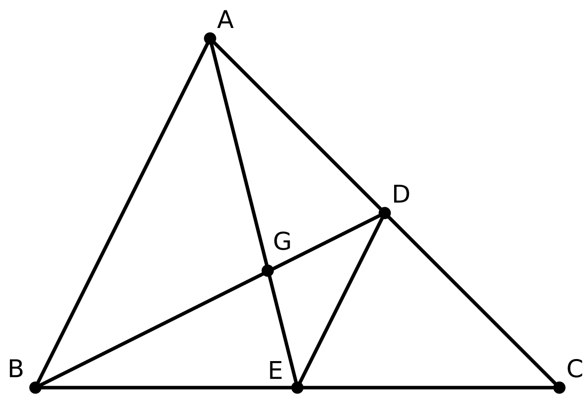
Problema 125. No triângulo ABC, $AC = 5$ e $AB = 6$. Seja P um ponto sobre a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$. Se a área de APB é $3/2$, a área de APC é:

a) $5/4$ b) $9/5$ c) $\sqrt{3}/4$ d) $\sqrt{5}/4$ e) $4/5$

Problema 126. No desenho abaixo, a área do triângulo $\triangle ABD$ é $30m^2$ e a área do triângulo $\triangle ADC$ é $10m^2$. Determine a razão entre os segmentos BD e DC.



Problema 127. No desenho abaixo, E e D são os pontos médios dos lados BC e AC do triângulo $\triangle ABC$.

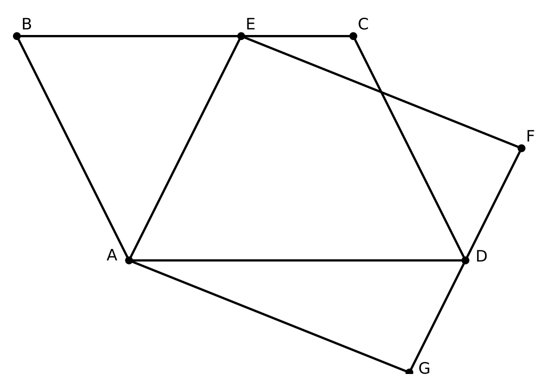


a) Encontre a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BED$.

b) Encontre a razão entre os segmentos AG e GE.

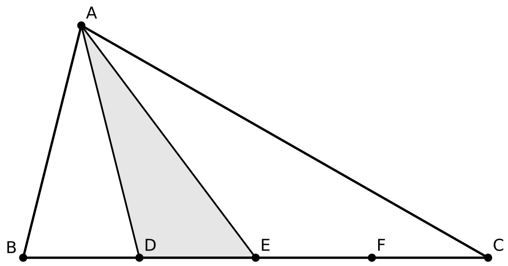
Observação: O ponto G é chamado de Baricentro do Triângulo ABC. Como consequência deste exercício, podemos concluir que o Baricentro divide cada mediana em dois segmentos na razão 2 : 1.

Problema 128. No desenho abaixo, $ABCD$ e $AEFG$ são paralelogramos. Se a área de $ABCD$ é $20cm^2$, determine a área do paralelogramo $EFGA$.

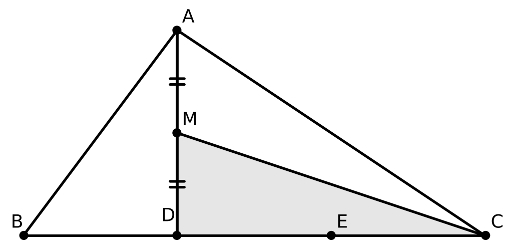


Problema 129. Em cada um dos itens abaixo, a área do triângulo ABC vale $36m^2$. Determine a área de cada região sombreada sabendo que os pontos marcados nos lados o dividem em partes iguais.

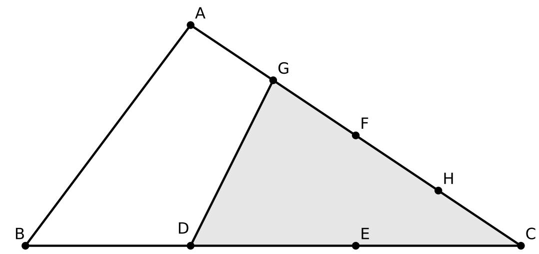
a)



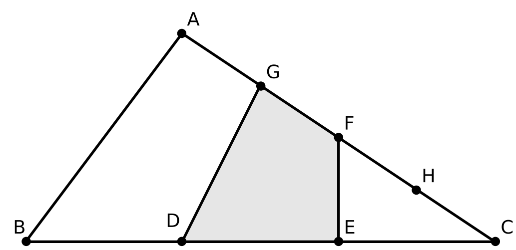
b)



c)

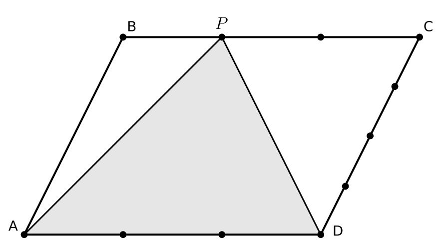


d)

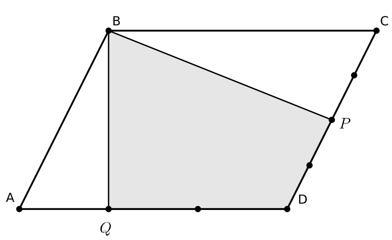


Problema 130. Nos desenhos abaixo, o paralelogramo $ABCD$ possui área $24cm^2$ e os pontos marcados nos lados o dividem em partes iguais. Determine a área das regiões sombreadas.

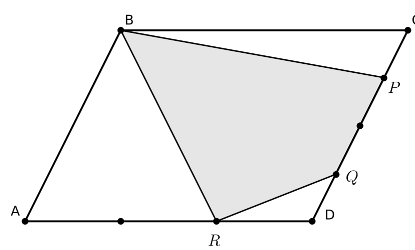
a)



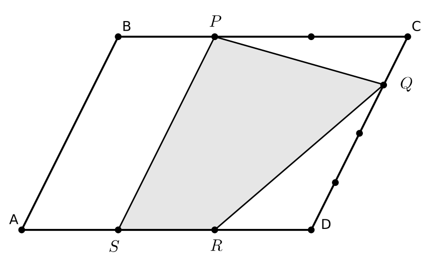
b)



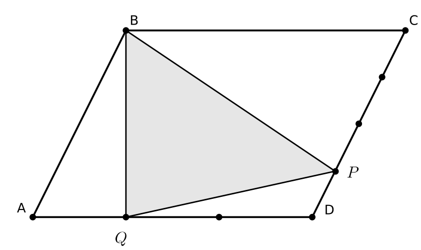
c)



d)

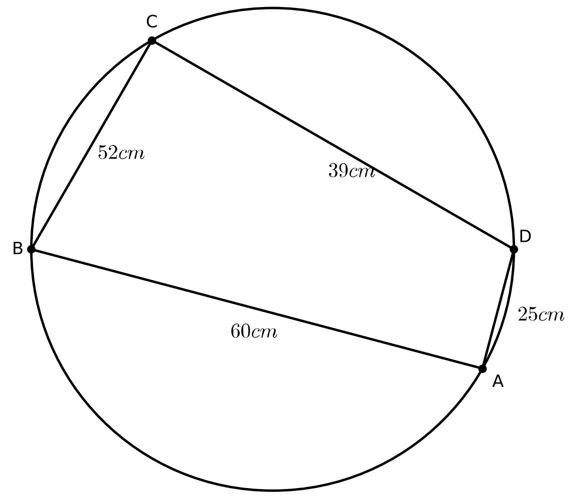


e)

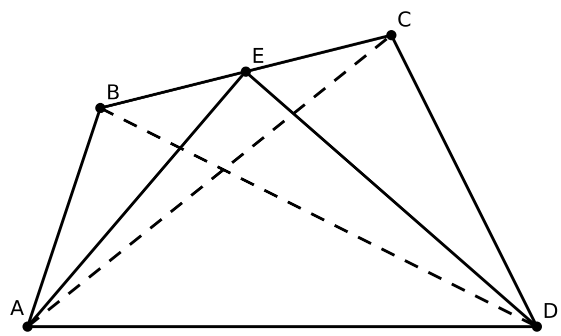


Problema 131. Seja $ABCD$ um trapézio de bases $AB = 10$ e $CD = 6$. A altura mede 4. Sejam P o ponto médio do lado AD e Q o ponto médio do lado PB. Encontre a área do triângulo PQC.

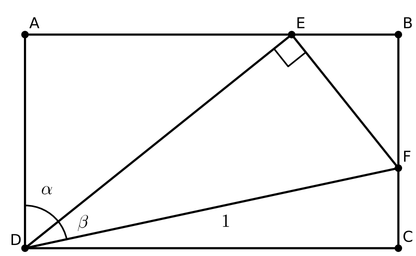
Problema 132. A área de um quadrilátero inscritível em um círculo e que possui lados a, b, c e d é $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ onde $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$. No quadrilátero do desenho abaixo, determine a sua área.



Problema 133. No desenho abaixo, E é o ponto médio do lado BC. Se as áreas dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$ são 20 e 30, determine a área do triângulo $\triangle AED$.



Problema 134. Na figura abaixo, $\triangle DEF$ é um triângulo retângulo com $\angle DEF = 90°$ e $DF = 1$. Se $\angle FDE = \beta$ e $\angle ADE = \alpha$:



a) Encontre as medidas dos segmentos AE, EB e DC;

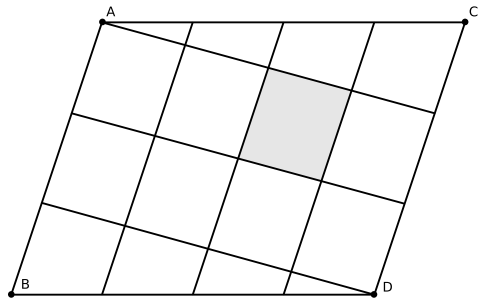
b) Mostre que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Problema 135. Seja $\triangle ABC$ um triângulo com lados de medidas a, b e c. Se h_a é o comprimento da altura relativa ao vértice A e $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, verifique que:

a) $h_a = \sqrt{p(p-a)} \cdot \dfrac{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}$.

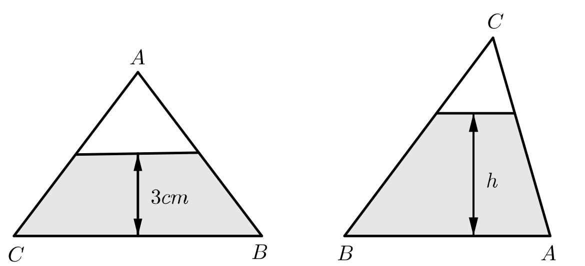
b) $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$

Problema 136. Os lados AC e BD do paralelogramo $ABCD$ foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados AB e CD foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de $ABCD$ é 84, determine a área sombreada.



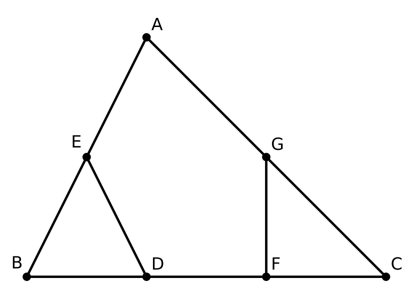
a) 1
b) 3
c) 4
d) 7
e) 12

Problema 137. Um peso de papel tem a forma de um triângulo de lados $BC = 6$ cm e $AB = AC = 5$ cm e está parcialmente preenchido com água. Quando o peso de papel se apoia sobre o lado BC, a água tem uma altura de 3 cm. Qual é a altura da água, em cm, quando o peso de papel se apoia sobre o lado AB?



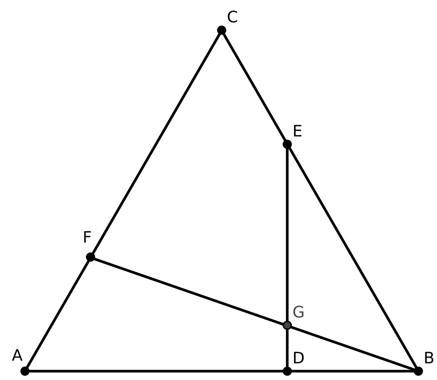
a) $\frac{4}{3}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{8}{5}$
d) $\frac{18}{5}$
e) $\frac{24}{5}$

Problema 138. Na figura ao lado, E é o ponto médio de AB, G é o ponto médio de AC e $BD = DF = FC$. Se a área do triângulo ABC é 252, qual é a área do pentágono $AEDFG$?



a) 168
b) 189
c) 200
d) 210
e) 220

Problema 139. No desenho abaixo, o $\triangle ABC$ é equilátero e $BD = CE = AF = \dfrac{AB}{3}$. Determine a razão $\dfrac{EG}{GD}$.



8 Triângulos

Problema 140. Classifique cada sentença como verdadeira (V) ou falsa (F):

a) Todo triângulo retângulo é isósceles.

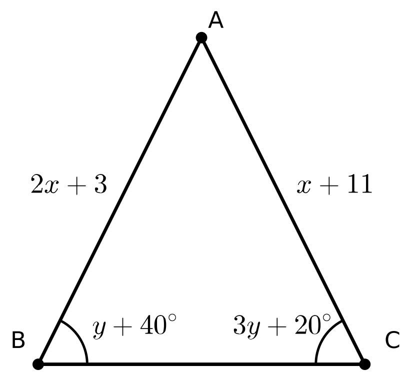
b) Os três ângulos de um triângulo equilátero são congruentes.

c) Um triângulo é isósceles se possui os três lados congruentes.

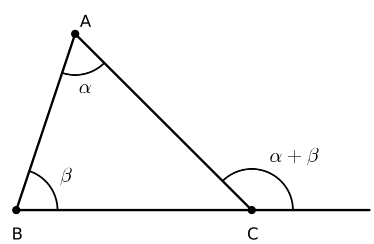
d) Não existe triângulo que seja simultaneamente retângulo e equilátero.

e) Não existe triângulo que seja simultaneamente retângulo e isósceles.

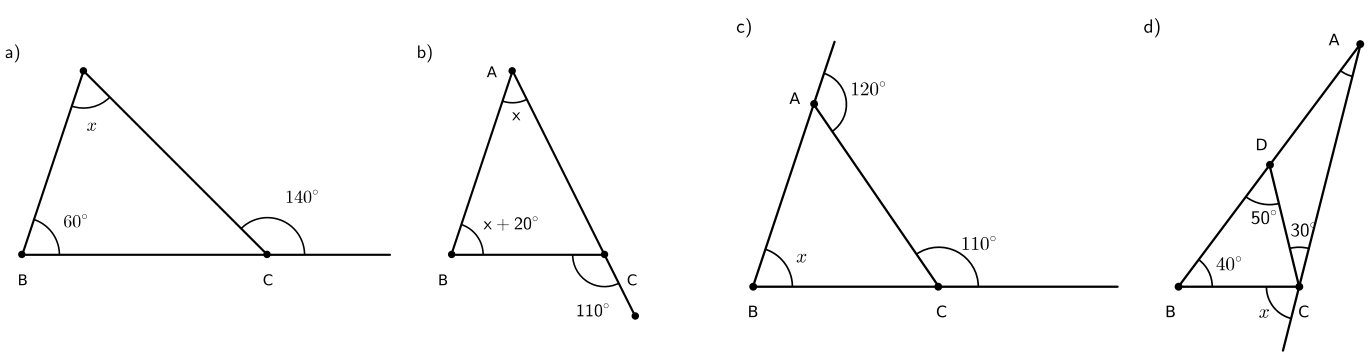
Problema 141. No desenho abaixo, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles com base BC. Determine os valores de x e y.



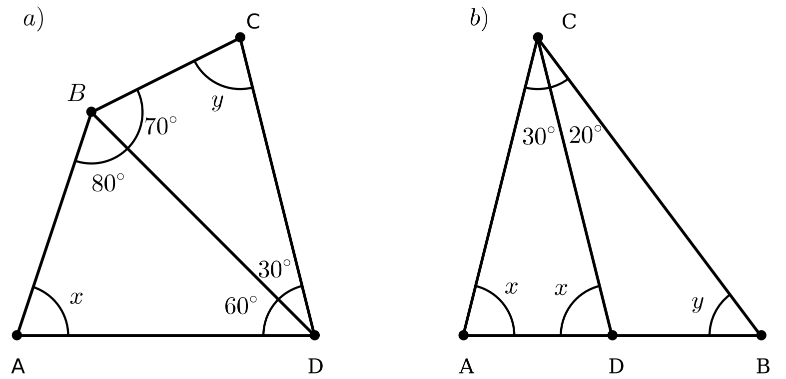
Problema 142. O teorema do ângulo externo afirma que a medida de um ângulo externo de triângulo é a soma das medidas dos outros dois ângulos internos não adjacentes a ele. Podemos verificar tal afirmação lembrando que a soma dos ângulos de um triângulo sempre é 180°. Assim, no desenho abaixo, o ângulo $\angle BCA$ mede $180^\circ - \alpha - \beta$ e o ângulo externo correspondente é o seu suplementar, ou seja, vale $\alpha + \beta$.



Em cada um dos itens abaixo, determine o valor do ângulo x.



Problema 143. Determine os valores de x e y nos itens abaixo:



Problema 144. Dizemos que um triângulo é acutângulo quando todos os seus ângulos são menores que um ângulo reto. Dizemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos for igual a um ângulo reto. Por fim, dizemos que um triângulo é obtusângulo quando um dos seus ângulos for maior que um ângulo reto. Sabendo que a soma dos ângulos de um triângulo é sempre 180°, determine em cada um dos itens abaixo se o triângulo é acutângulo, obtusângulo ou retângulo conhecendo apenas dois de seus ângulos.

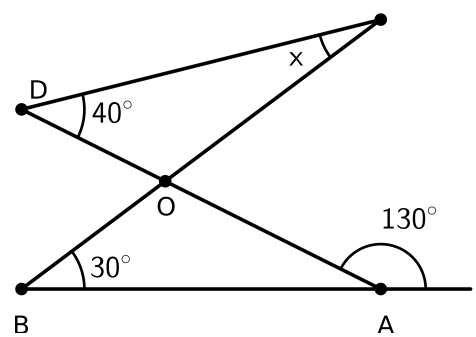
a) $\angle ABC = 70^\circ$ e $\angle BCA = 10^\circ$.

b) $\angle ABC = 80^\circ$ e $\angle BCA = 15^\circ$.

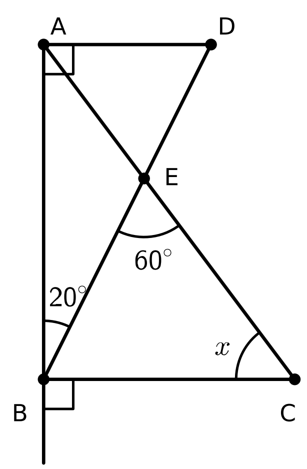
c) $\angle ABC = 30^\circ$ e $\angle BCA = 60^\circ$.

d) $\angle ABC = 60^\circ$ e $\angle BCA = 60^\circ$.

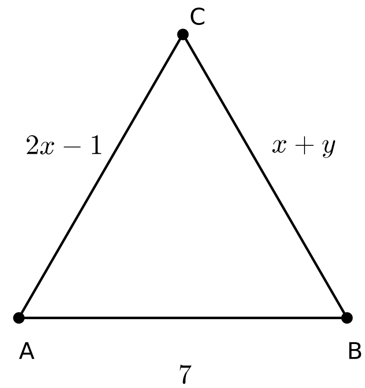
Problema 145. Determine o valor de x no desenho abaixo.



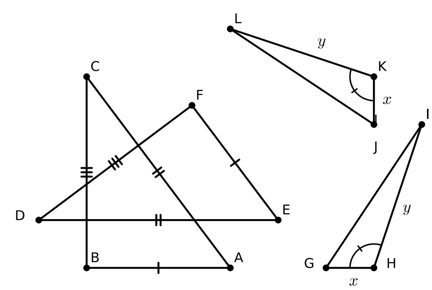
Problema 146. Determine o valor de x no desenho abaixo.



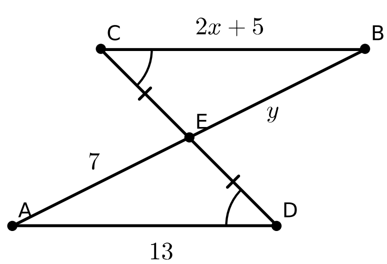
Problema 147. Na figura abaixo, o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero. Determine os valores de x e y.



Problema 148. No desenho abaixo, existem dois pares de triângulos congruentes. A partir do desenho, determine que pares são esses e justifique em quais casos de congruências eles se enquadram.



Problema 149. No desenho abaixo, os triângulos $\triangle AED$ e $\triangle CEB$ são congruentes com $CE = ED$ e $\angle ECB = \angle EDA$. Determine os valores de x e y.



Problema 150. Diga o nome de cada um dos seguintes pontos notáveis de um triângulo:

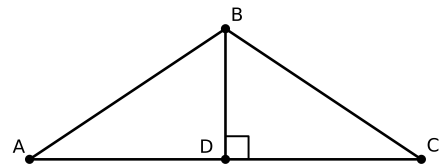
a) Ponto de encontro das bissetrizes.

b) Ponto de encontro das retas suportes das alturas.

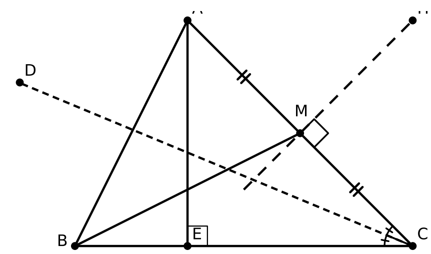
c) Ponto de encontro das medianas.

d) Ponto de encontro das mediatrizes dos lados.

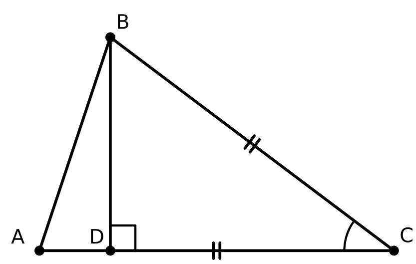
Problema 151. No desenho abaixo, O triângulo $\triangle ABD$ é congruente ao triângulo $\triangle BDC$ com $AD = DC$. Se $AC = x + y$, $DC = 4x$, $AB = 5x$ e $BC = 3x + 2$, determine os valores de x e y.



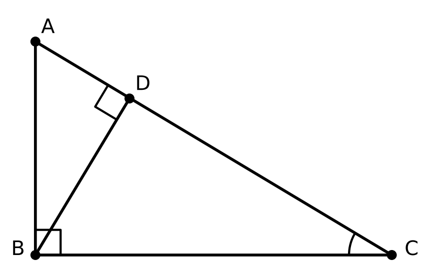
Problema 152. Determine no desenho abaixo os seguintes objetos geométricos: uma mediana, uma altura, uma bissetriz e uma mediatriz.



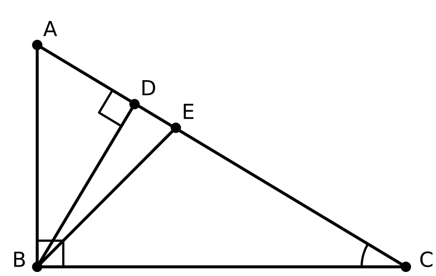
Problema 153. No desenho abaixo, BD é uma altura relativa ao lado AC e $BC = AC$. Se $\angle ACB = 40°$, determine o valor do ângulo $\angle ABD$.



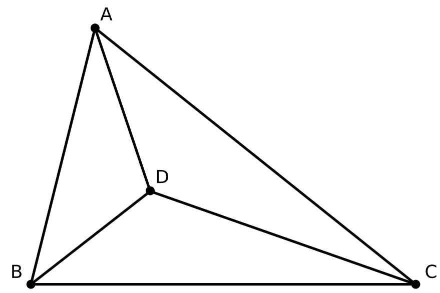
Problema 154. No desenho abaixo, sabendo que $\angle BCA = 30°$, encontre o valor de $\angle ABD$.



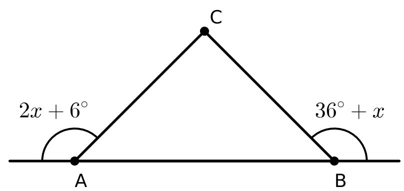
Problema 155. No desenho abaixo, BE é bissetriz de $\angle ABC$. Se $\angle ACB = 30°$, determine o ângulo $\angle DBE$.



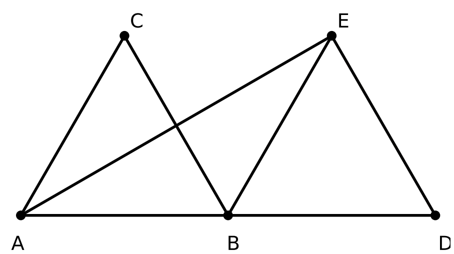
Problema 156. No desenho abaixo, o ponto D é o incentro do triângulo $\triangle ABC$. Sabendo que $\angle ADB = 110°$, $\angle ADC = 130°$ e $\angle BDC = 120°$, determine os ângulos do triângulo.



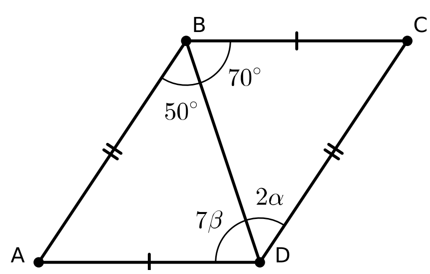
Problema 157. O triângulo abaixo é isósceles de base AB. Determine o valor do ângulo x.



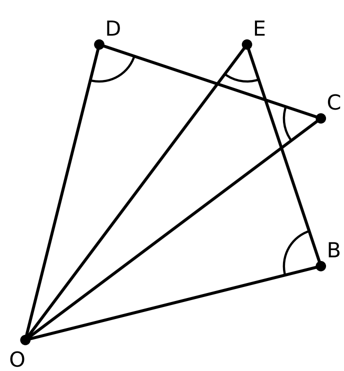
Problema 158. No desenho abaixo, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BED$ são equiláteros de mesmo lado. Determine o ângulo $\angle AEB$.



Problema 159. No desenho abaixo, os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BDC$ são congruentes. Determine as medidas de α e β.



Problema 160. Na figura abaixo, $\angle ODC = \angle OBE$ e $\angle OEB = \angle DCO$. Se $DC = EB$, $\angle DOB = 60°$ e $OB = 5cm$, determine o comprimento de BD.

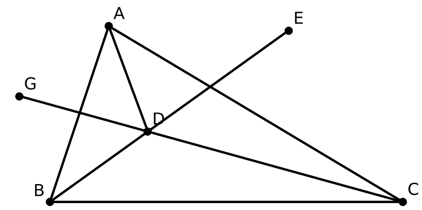


Problema 161. No desenho abaixo, GC e BE são as bissetrizes dos ângulos $\angle ACB$ e $\angle ABC$, respectivamente. Se $\angle BAC = 60°$ e $\angle ABC = 80°$, determine:

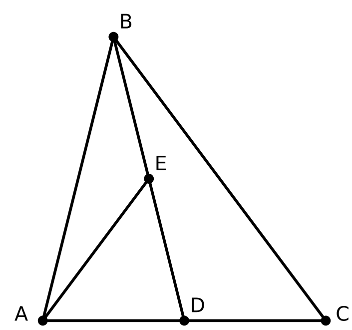
a) o ângulo $\angle ACB$;

b) os ângulos $\angle DCB$ e $\angle DBC$;

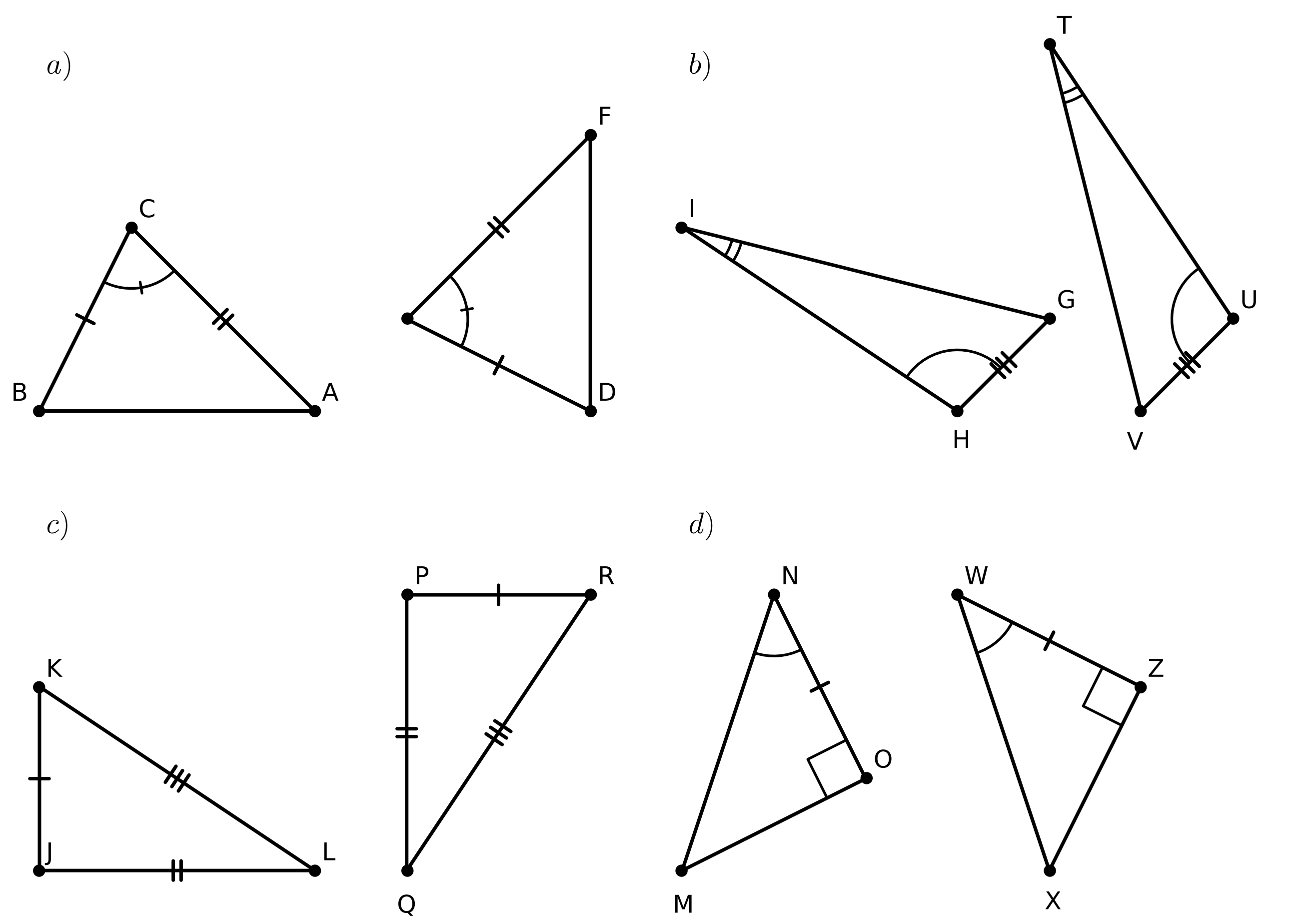
c) o ângulo $\angle BDC$.



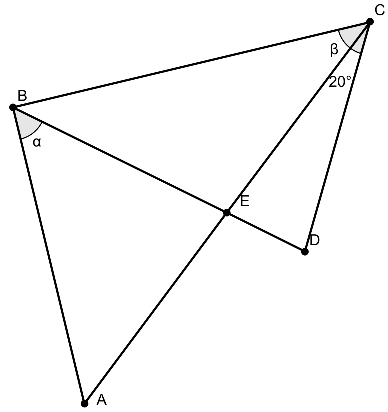
Problema 162. No desenho abaixo, BD é uma mediana do triângulo $\triangle ABC$ e AE uma mediana do triângulo $\triangle BAD$. Além disso, $AD = DE$. Se $DC = 8cm$, determine a medida do segmento BE.



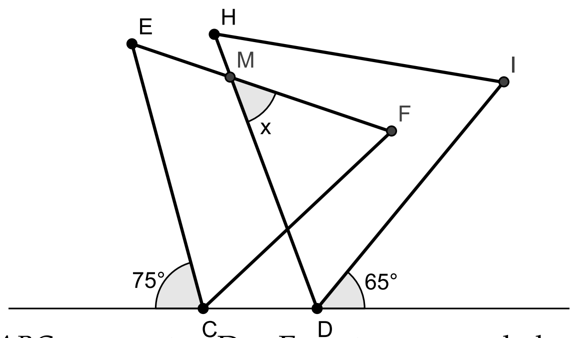
Problema 163. Indique para cada par de triângulos dos itens abaixo qual caso de congruência pode ser aplicado.



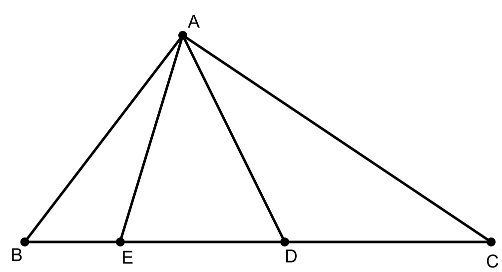
Problema 164. Na figura, temos $AE = BE = CE = CD$. Além disso, α e β são medidas de ângulos. Determine o valor da razão $\frac{\alpha}{\beta}$.



Problema 165. Na figura, os dois triângulos são equiláteros e os ângulos dados em graus. Determine o valor de x.

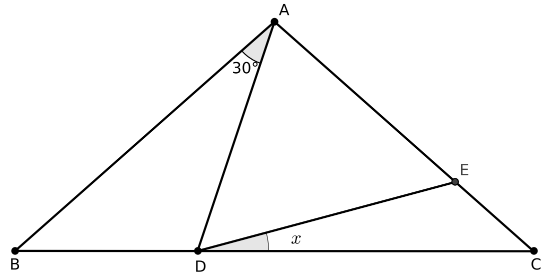


Problema 166. No triângulo ABC, os pontos D e E pertencem ao lado BC e são tais que $BD = BA$ e $CE = CA$. Dado que $\angle DAE = 40°$, determine a medida do ângulo $\angle BAC$.



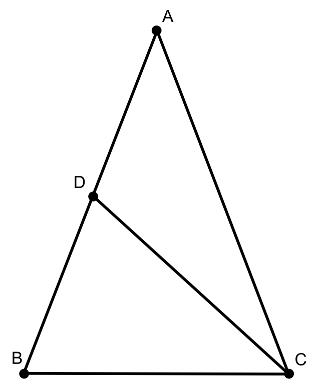
Problema 167. Em um triângulo ABC, $\angle BAC = 20°$ e $\angle ABC = 110°$. Se I é o incentro (centro da circunferência inscrita) e O o circuncentro (centro da circunferência circunscrita) do triângulo $\triangle ABC$, determine a medida do ângulo $\angle IAO$.

Problema 168. Na figura, $AB = AC$, $AE = AD$ e o ângulo $\angle BAD$ mede 30°. Determine a medida do ângulo x.

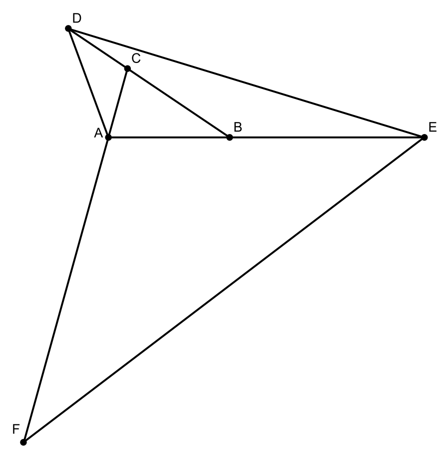


Problema 169. No triângulo ABC, $AC = 5$ e $AB = 6$. Seja P um ponto sobre a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$. Se a área do $\triangle APB$ é $\frac{3}{2}$, determine a área do $\triangle APC$.

Problema 170. Na figura, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de base BC e o ângulo $\angle BAC$ mede $30°$. O triângulo $\triangle BCD$ é isósceles de base BD. Determine a medida do ângulo $\angle DCA$.



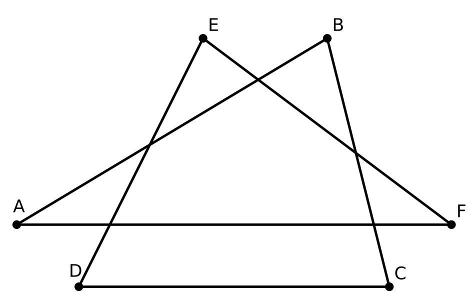
Problema 171. Na figura abaixo, o ângulo $\angle ADC$ mede $48°$ e os triângulos $\triangle ACD$, $\triangle DBE$ e $\triangle EAF$ são isósceles de bases AD, DE e EF, respectivamente. Determine a medida do ângulo $\angle DEF$.



Problema 172. Em um triângulo $\triangle ABC$, com $\angle ABC - \angle BAC = 50°$, a bissetriz do ângulo $\angle ACB$ intersecta o lado AB em D. Seja E o ponto do lado AC tal que $\angle CDE = 90°$. Determine a medida do ângulo $\angle ADE$.

Problema 173. Os pontos M e N são escolhidos na hipotenusa AB do triângulo retângulo $\triangle ABC$ de modo que $BC = BM$ e $AC = AN$. Prove que o ângulo $\angle MCN$ mede $45°$.

Problema 174. Se a soma das medidas em graus dos ângulos A, B, C, D, E e F da figura abaixo é $90n$, qual o valor de n?



Problema 175. A altura CH e a mediana BK são desenhadas em um triângulo acutângulo $\triangle ABC$. Sabemos que $BK = CH$ e que $\angle KBC = \angle HCB$. Prove que o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.

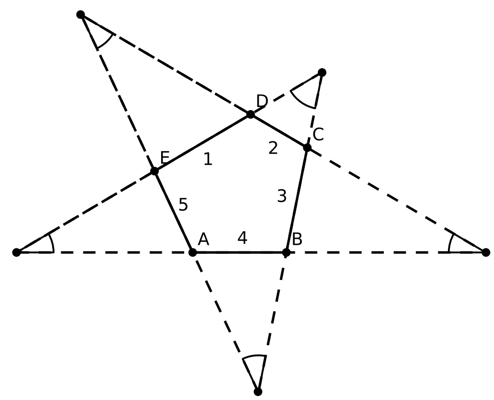
Problema 176. Demonstre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Problema 177. A mediana BM, a altura AH e a bissetriz CK de um triângulo $\triangle ABC$ são desenhadas. Sabemos que AH intersecta BM em L, AH intersecta CK em N e BM intersecta CK em P. Os pontos L, N e P são distintos. Prove que o triângulo LNP não pode ser equilátero.

Problema 178. No triângulo $\triangle ABC$ com $\angle BAC = 30^\circ$, BB_1 e CC_1 são alturas. Sejam B_2 e C_2 os pontos médios de AC e AB, respectivamente. Prove que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.

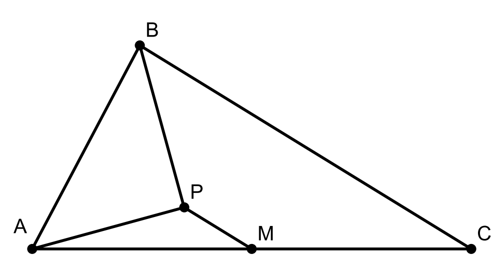
Problema 179. Os pontos D, E e F são os pontos médios dos lados BC, CA e AB, respectivamente. Se um dentre os segmentos DE, EF e FD é maior que um dentre os segmentos AD, BE e CF, prove que o $\triangle ABC$ é obtusângulo.

Problema 180. Uma estrela de "n pontas" é formada como segue. Começamos numerando os lados de um polígono convexo de n lados com $1, 2, \ldots, n$ de forma consecutiva. As pontas das estrelas são formadas pelas interseções das retas que passam por lados que diferem por duas unidades. Nessa ordem, estamos considerando que os lados n e $n-1$ vão formar pontas com os lados 2 e 1, respectivamente. A figura abaixo mostra um exemplo com $n = 5$. Determine o valor da soma dos ângulos interiores das n pontas da estrela.



Problema 181. Pinóquio afirma que é possível formar um retângulo usando alguns triângulos, sem sobreposição, todos com os mesmos ângulos e nenhum dos quais possuindo um ângulo reto. Isso é realmente possível ou Pinóquio está mentindo?

Problema 182. No triângulo $\triangle ABC$ abaixo, BP é bissetriz do ângulo B, M é o ponto médio do lado AC e AP é perpendicular a BP. Se $AB = 6$ e $BC = 10$, determine PM.



Problema 183. Em um triângulo $\triangle ABC$, $AB = AC$ e $\angle BAC = 30^\circ$, marca-se um ponto Q sobre o lado AB e um ponto P na mediana AD, de modo que $PC = PQ (Q \neq B)$. Determine $\angle PQC$.

9 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Problema 184. Determine a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo se seus catetos medem:

a) 3cm e 4cm. b) 5cm e 12cm. c) 1cm e 1cm. d) 1/2cm e 3/2cm. e) $\sqrt{3}$cm e $\sqrt{5}$cm.

Problema 185. Determine x e y no triângulo da figura abaixo, sendo $x + y = 5$.

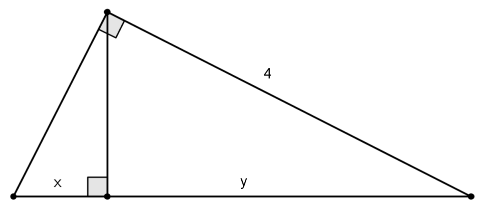


Figura 13

Problema 186. Determine o valor de k na figura abaixo.

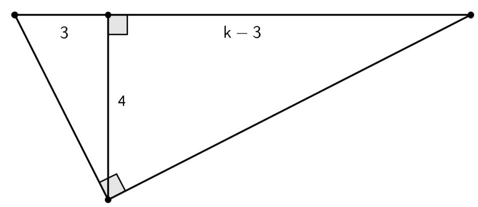


Figura 14

Problema 187. Determine os valores de x, y, z, no triângulo abaixo.

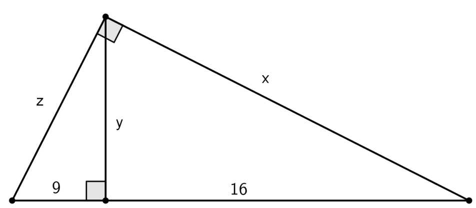


Figura 15

Problema 188. Determine a altura de um triângulo equilátero de lado medindo l.

Problema 189. Determine o comprimento da diagonal d de um quadrado de lado l.

Problema 190. Na figura, temos duas circunferências tangentes externamente de raios 3cm e 2cm, além de uma reta tangente às circunferências nos pontos A e B. Determine AB.

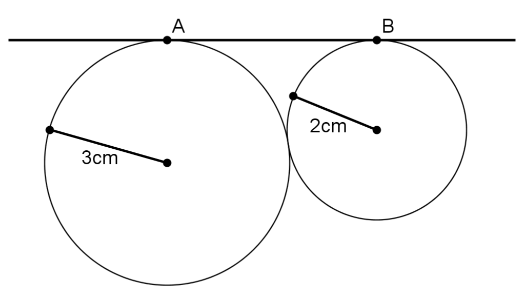


Figura 16

Problema 191. Determine o perímetro do $\triangle ABC$ abaixo, sabendo que $AB = 7\sqrt{2}$.

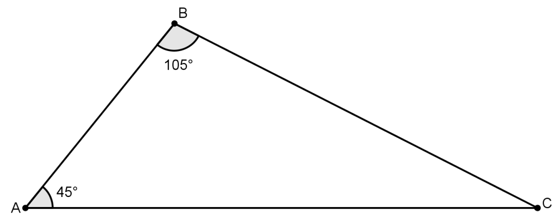


Figura 18

Problema 192. Na figura abaixo, temos duas semicircunferências de centros O e O'. Um segmento perpendicular a $\overline{AB}$ intercepta as semicircunferências em D e E. Determine AE, sabendo que $AD = 7\sqrt{2}$.

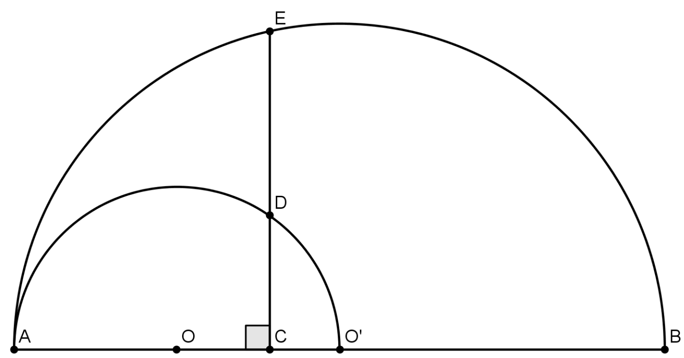


Figura 20

Problema 193. Na figura abaixo temos três semicircunferências de centros em B, C e D, além de uma circunferência de centro O e tangente às semicircunferências. Sabendo que $AB = 4$cm, determine o raio x da circunferência.

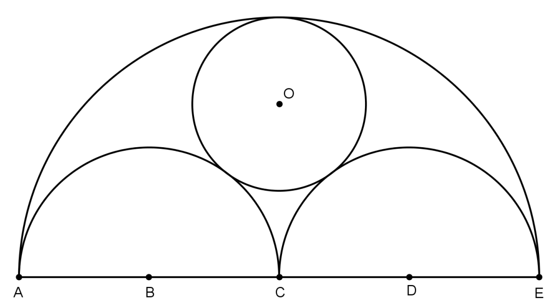


Figura 22

Problema 194. Na figura abaixo, os pontos A, C e F estão alinhados, $FC = CA = (1 + 2\sqrt{3})$, $EDCF$ é um quadrado e ABC é um triângulo equilátero. Determine CG.

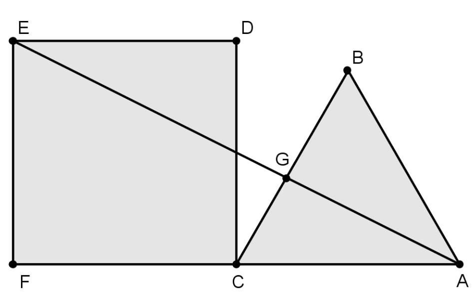


Figura 23

Problema 195. No triângulo retângulo abaixo, $BC = 30$cm, $AC - AB = 6$cm e $\angle ABD \equiv \angle CBD$. Determine BD.

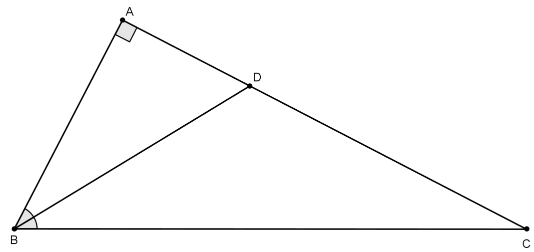


Figura 25

Problema 196. Duas circunferências são tangentes internamente, como na figura. Os segmentos AB e CD são perpendiculares e o ponto O é o centro da circunferência maior. Os segmentos AP e CQ medem, respectivamente, 4 e 3 centímetros. Qual é a medida do raio do círculo menor?

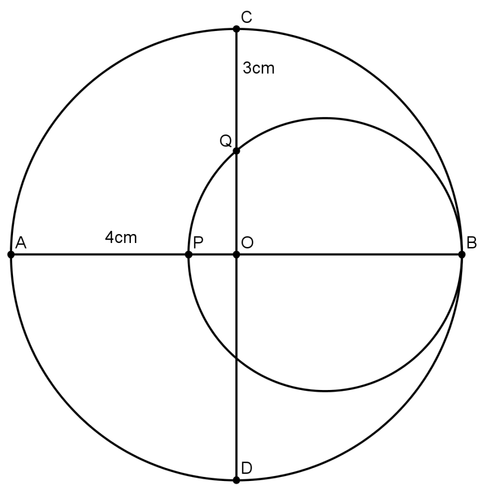


Figura 26

a) $2,25$cm. b) $2,5$cm. c) $2,75$cm. d) 3cm. e) $3,5$cm.

Problema 197. A figura mostra quatro círculos de raio 1cm dentro de um triângulo. Os pontos marcados são os pontos de tangência. Qual é o comprimento do menor lado desse triângulo?

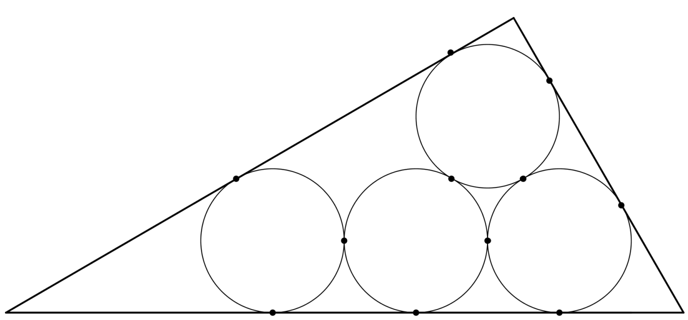


Figura 28

a) 4cm.

b) $3 + \sqrt{3}$cm.

c) 5cm.

d) $3\sqrt{3}$cm.

e) $2 + 2\sqrt{3}$cm.

Problema 198. Seja ABC um triângulo retângulo em A. Seja D o ponto médio de $\overline{AC}$. Sabendo que $BD = 3DC$ e que $AC = 2$, a hipotenusa do triângulo é:

a) $\sqrt{7}$. b) $2\sqrt{2}$. c) 3. d) $\sqrt{10}$. e) $2\sqrt{3}$.

Problema 199. No triângulo ABC, o comprimento dos lados AB, BC e CA, nessa ordem, são números inteiros e consecutivos. A altura relativa a BC divide este lado em dois segmentos de comprimentos m e n, como indicado. Quanto vale $m - n$?

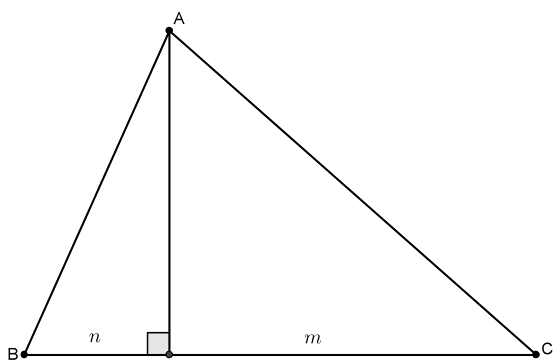


Figura 31

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 6.

Problema 200. O grande artilheiro Tornado está prestes a fazer o gol mais bonito de sua carreira. Ele está de frente para o gol e apenas o goleiro está entre ele e a trave. Ele está a x metros do goleiro que, por sua vez, se encontra a 2 metros da linha do gol, onde Tornado deseja que a bola caia após passar por cima do goleiro. Em um gol dessa magnitude, a trajetória da bola deve ser uma semicircunferência. Tornado sabe que a bola deve passar a exatamente 3 metros de altura do solo quando ela estiver acima do goleiro. Qual a distância de Tornado até o goleiro, ou seja, x, em metros?

a) 3. b) $3,5$. c) 4. d) $4,5$. e) 5.

Problema 201. Na figura abaixo temos um semicírculo de raio 1 inscrito em um quadrado de modo que seu centro passe por uma das diagonais do quadrado. Qual é a área do quadrado?

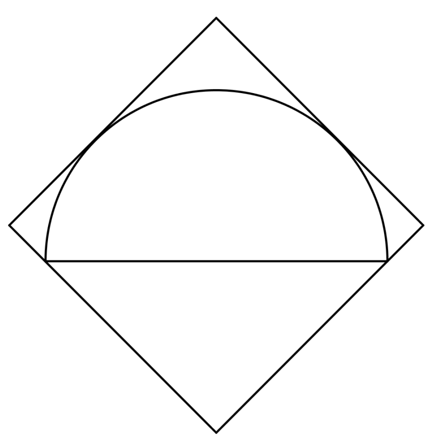


Figura 34

a) $3/2 + \sqrt{2}$. b) $1 + 2\sqrt{2}$. c) $5 + \sqrt{2}/2$. d) 4. e) $2/3 + \sqrt{2}$.

10 Semelhanças entre Figuras e Polígonos

Problema 202. Observe as figuras abaixo e responda:

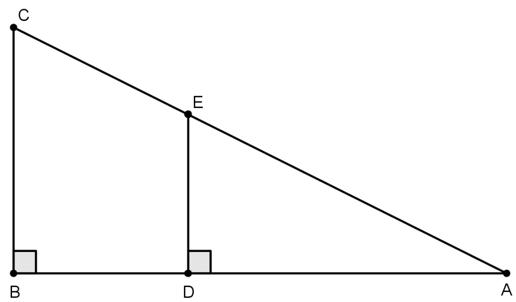


Figura 36

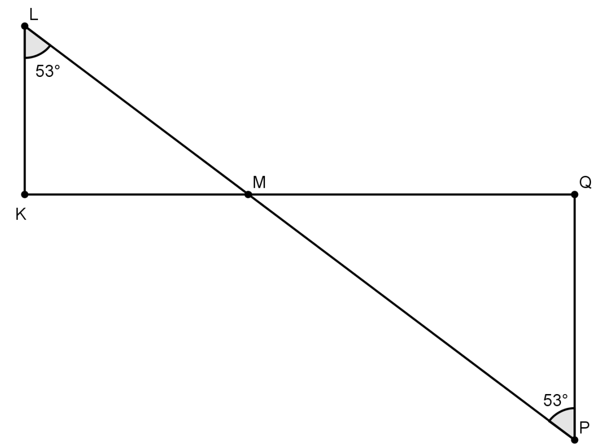


Figura 37

a) os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são semelhantes?

b) caso sejam semelhantes, quais são os lados homólogos?

c) os triângulos $\triangle KLM$ e $\triangle MPQ$ são semelhantes?

Problema 203. Qual a razão de semelhança dos triângulos abaixo?

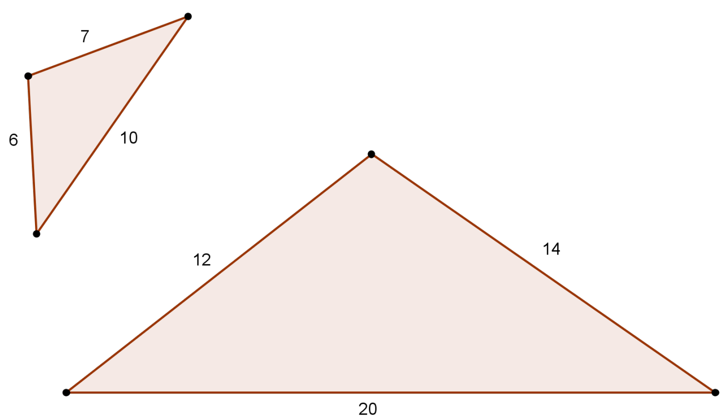


Figura 38

Problema 204. Como João pode medir a altura de um poste, conhecendo sua altura, $1,60$m, o comprimento de sua sombra, 2m, o comprimento da sombra do poste no mesmo instante que mediu sua sombra, 7m?

Problema 205. Na figura abaixo, $BC = 12$cm e $AH = 8$cm, sendo $\overline{AH}$ altura do $\triangle ABC$. Determine o lado do quadrado $MNPQ$.

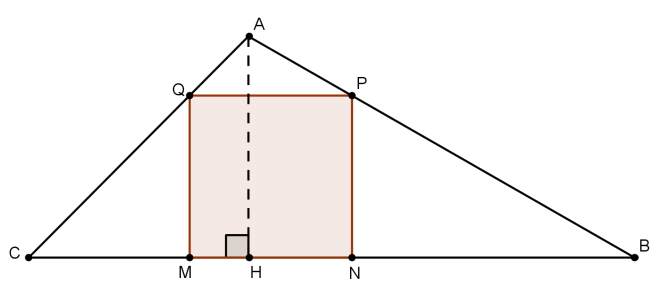


Figura 39

Problema 206. Na figura abaixo, temos uma reta que passa pelos pontos A, B e C e outra que passa por A e é tangente às circunferências de centros B e C e raios 3cm e 5cm. Se $AB = 7$cm, determine BC.

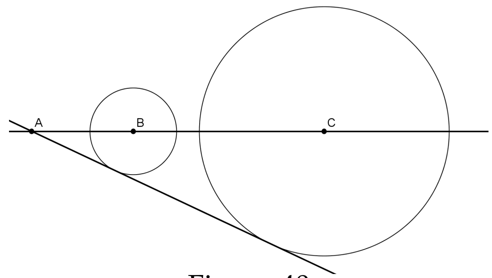


Figura 40

Problema 207. Sabendo que $AB = 15$, $BC = 20$, $AD = 10$ e $DC = 15$, determine a medida de $\overline{DE}$ na figura abaixo.

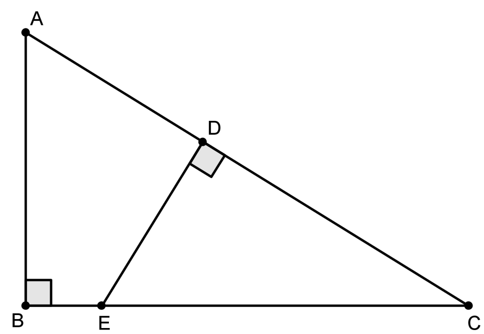


Figura 42

Problema 208. Na figura abaixo, temos $AC = 4$ e $AB = 6$. Determine o perímetro do quadrado $AEDF$.

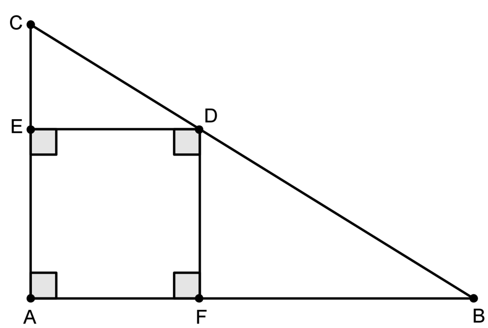


Figura 43

Problema 209. No retângulo da figura abaixo temos que $AB = 20$, $BC = 12$ e $AM = MB$. Determine a medida de $\overline{EF}$.

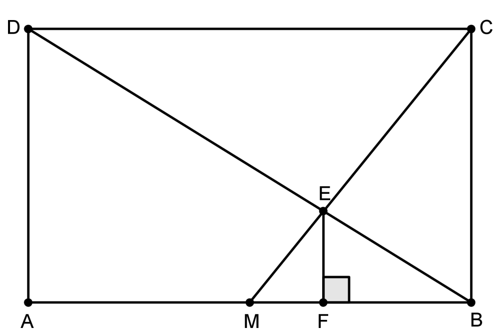


Figura 44

Problema 210. Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.

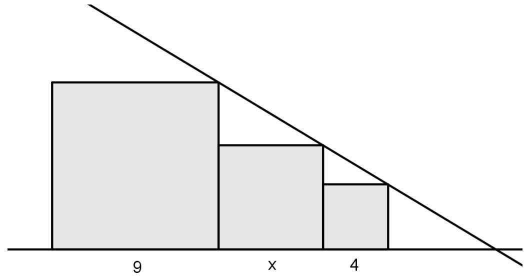


Figura 45

Problema 211. Na figura abaixo, temos um triângulo inscrito. Se $AB = 10$, $AC = 12$ e $AH = 4$, determine o raio da circunferência.

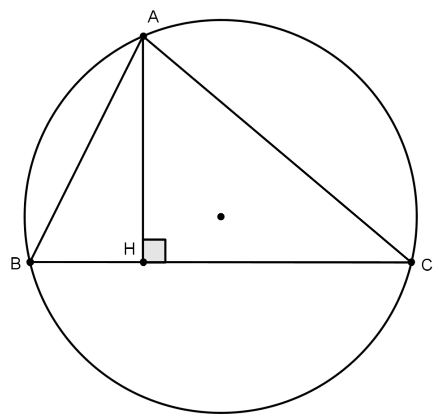


Figura 47

Problema 212. Na figura abaixo, temos $AC = CB = 10$cm, $AB = 6$cm e $AM = MB$. Além disso, o segmento BH tangencia a semicircunferência com centro em M. Determine o raio dessa semicircunferência.

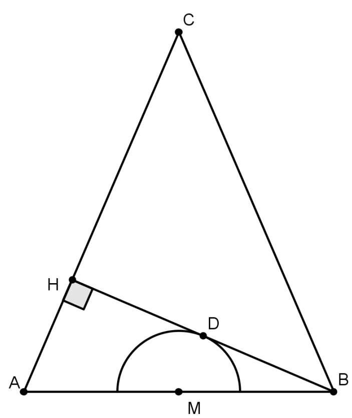


Figura 49

Problema 213. Na figura abaixo, temos duas semicircunferências. Se $AD = 36$ e $BC = CD$, determine CD.

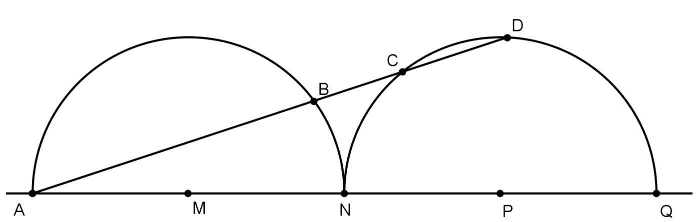


Figura 50

Problema 214. Na figura abaixo, $\overline{DE}//\overline{AC}$, $\angle ACD \equiv \angle BCD$, $BC = m$ e $AC = n$. Determine a medida de $\overline{DE}$ em função de m e n.

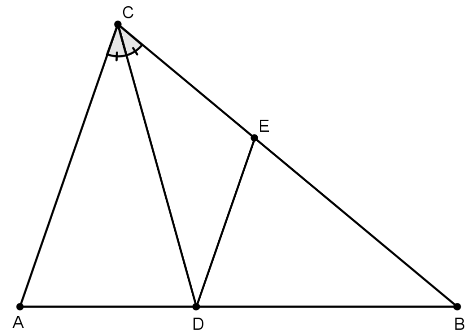


Figura 52

Problema 215. No desenho abaixo, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = AB/3$. Determine a razão EG/GD.

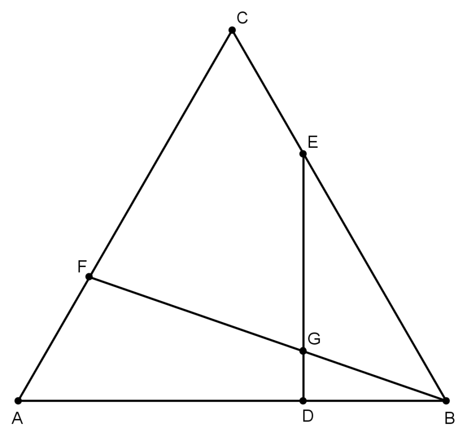


Figura 53

Problema 216. O quadrado $ABCD$ está inscrito em um círculo cujo raio mede 30. A corda $\overline{AM}$ intercepta a diagonal $\overline{BD}$ no ponto P. Se o segmento $\overline{AM}$ mede 50, determine a medida do segmento $\overline{AP}$.

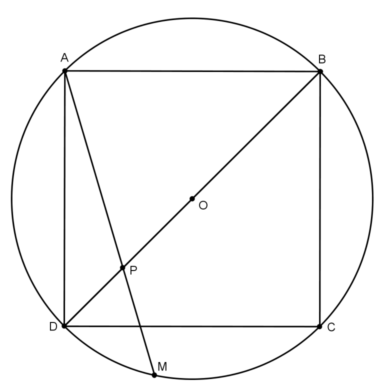


Figura 54

Respostas e Soluções.

1. Existem 6 segmentos de reta com vértices nesses 4 pontos: AB, AC, AD, BC, BD e CD. Veja que a resposta não seria diferente se os pontos não fossem colineares.

2. Temos $IJ = KL$, $GH = FE$ e $AB = CD$.

3. Resposta B.

4.

a) Como $AC + CB = 20cm$, se $CB = 8cm$ temos $AC = 12cm$.

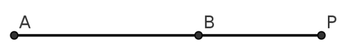
b) Somando $AC + CB = 20cm$ com $AC - CB = 1cm$, temos $2AC = 21cm$. Portanto, $AC = \dfrac{21}{2}$.

c) Temos $20 = AC + CB = 2x + (x - 1)$. Portanto, $x = 7$ e $AC = 2x = 14$.

5. Com a exceção do ponto B, por qualquer um dos outros pontos, existe exatamente uma semirreta que satisfaz a condição do enunciado. Portanto, existem 4 semirretas.

6. Como $AM = MB$, temos $2x - 5 = x + 7$, ou seja, $x = 2x - x = 7 + 5 = 12$.

7. Se o ponto P se encontra à esquerda de A, o segmento PB é a soma de PA e AB e consequentemente maior que AB. Se o ponto P se encontra entre A e B, o comprimento de PA é estritamente menor que o comprimento de AB. Consequentemente, a única possibilidade é P estar situado à direita de B. O exemplo abaixo mostra que tal configuração é admissível.



8. Sejam $AB = x$ e $CD = y$. Como

$$2BC = AD = AB + BC + CD = 20 + BC,$$

temos $BC = 20$ e consequentemente $AD = 40$.

9. Como $AM = MB$, temos $7x - 1 = x + 11$, ou seja, $6x = 12$ e consequentemente $x = 2$.

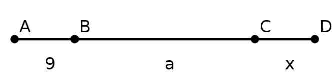
10. Como $AM = MB$, temos $AB = 2x$. Consequentemente:

$$4x - 9 = AC = AB + BC = 2x + x - 1.$$

Isso produz: $x = 9 - 1 = 8$. Portanto, $AB = 2x = 16$.

11. Não podemos ter o vértice A entre B e C pois $BC < AB$. Assim, A está situado à esquerda ou à direita do segmento BC. Quando A está mais próximo de C, o segmento AC mede $AB - BC = 20cm$. Quando A está mais próximo de B, o segmento AC mede $AB + BC = 40cm$.

12. Considere o desenho abaixo:



Sejam $BC = a$ e $CD = x$. Assim,

$$\begin{aligned} AB \cdot BD &= AC \cdot CD \\ 9(a + x) &= (9 + a)x \\ 9a + 9x &= 9x + ax \\ 9a &= ax \\ 9 &= x. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de CD é $9cm$.

13. Sejam $AM = MB = x$ e $DM = y$. Temos:

$$\begin{aligned} 10 &= DB - DA \\ &= (x+y) - (x-y) \\ &= 2y. \end{aligned}$$

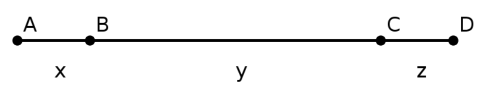
Portanto, $y = 5cm$.

14. Sejam $AC = CB = x$ e $AE = y$. Então $CE = ED = y - x$ e

$$\begin{aligned} 30 &= AB + ED - AC \\ &= (2x) + (y-x) - (x) \\ &= y \end{aligned}$$

Portanto, $AE = 30cm$.

15. Considere o desenho abaixo:



Sejam $AB = x$, $BC = y$ e $CD = z$. Temos $y = AC - AB = 3$. Além disso,

$$\begin{aligned} 3 &= 3AB - BD - 2CD \\ &= 3x - (3+z) - 2z \\ &= 3x - 3z - 3 \Rightarrow \\ 6 &= 3x - 3z. \end{aligned}$$

Também temos $12 = 3AB + 3CD = 3x + 3z$. Somando com a última equação, obtemos $18 = 6x$. Portanto, $x = 3$ e $z = 4 - 3 = 1$. Finalmente, $AD = AB + BC + CD = 3 + 3 + 1 = 7$.

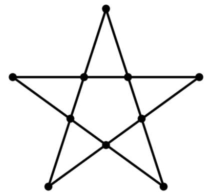
16. Sejam $AB = x$ e $BC = CD = y$. Assim,

$$\begin{aligned} AD^2 - AB^2 &= (AD - AB)(AD + AB) \\ &= (2y)(2x + 2y) \\ &= 4y(x+y) \\ &= 4BC \cdot AC \\ &= 160. \end{aligned}$$

17. Sim. Veja que:

$$\begin{aligned} MN &= MB + NB \\ &= \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} \\ &= \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} \\ &= AB. \end{aligned}$$

18. Sim, é possível. No exemplo abaixo, os pontos pretos simbolizam as estações e os segmentos, os trilhos.



19.

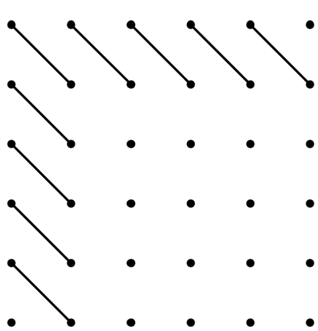
a) Se todos os três pontos estão ambos à esquerda de A ou ambos à direita de B, a soma das distâncias dos três pontos a um desses vértices é estritamente maior do que a soma das distâncias ao outro vértice. Precisamos realmente estudar o caso em que existem dois deles de um lado e um do outro como indica a figura. Calculemos a diferença entre a soma das distâncias ao vértice A e a soma das distâncias ao vértice B.

$$\begin{aligned}(XA+YA+ZA)-(XB+YB+ZB) &= \\ (XA-XB)+(YA-YB)+(ZA-ZB) &= \\ (-AB)+(-AB)+(AB) &= \\ -AB &\neq 0.\end{aligned}$$

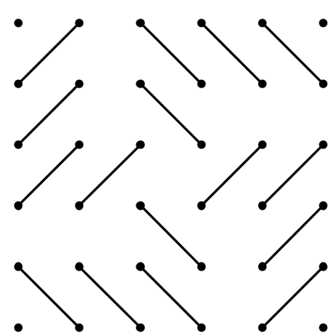
b) Sejam S_A e S_B as somas das distâncias de todos os pontos ao vértice A e ao vértice B, respectivamente. Analisemos a contribuição de um ponto X na diferença $S_A - S_B$. Quando X está à esquerda de A, a contribuição é $XA - XB = -AB$ e quando X está à direita de B a contribuição é $XA - XB = AB$. Ou seja, alguns pontos vão contribuir com o valor $+AB$ e outros com o valor $-AB$. Para que a diferença seja zero, a quantidade de parcelas com o sinal "$+$" deve ser igual à quantidade de parcelas com o sinal "$-$". Como 1001 é um número ímpar, tal igualdade não pode ocorrer.

20. (Extraído do Torneio das Cidades)

Os 25 quadradinhos determinam $6 \times 6 = 36$ vértices. Como cada segmento deve usar dois deles, podemos concluir inicialmente que João não pode desenhar mais que $\frac{36}{2} = 18$ segmentos. Analisando um lado qualquer do quadrado maior, não é possível que os 6 vértices sejam usados. Assim, eliminando-se um vértice do lado superior e um vértice do lado inferior, teremos apenas 34 vértices utilizáveis e consequentemente não mais que $\frac{34}{2} = 17$ segmentos. Essa ainda não é a melhor estimativa. Para que apenas dois vértices dos lados mencionados anteriormente não sejam usados, deve ocorrer a configuração exibida na próxima figura:

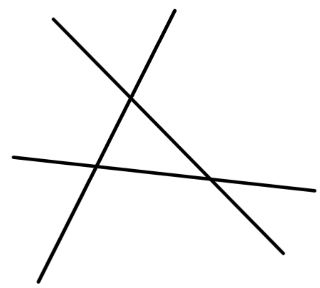


Note que não é possível desenhar segmentos usando os vértices do lado inferior sem deixar de usar pelo menos mais um vértice de tal lado. Logo, não poderemos usar pelo menos 3 vértices. Como o número de vértices usados deve ser um número par, no máximo utilizaremos 32 deles e assim teremos não mais que $\frac{32}{2} = 16$ segmentos desenhados. O exemplo abaixo mostra que tal número é realizável.

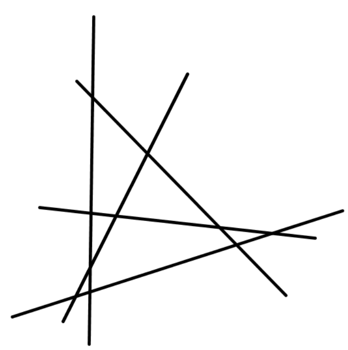


21.

a) Para três retas, temos 7 regiões como indica a próxima figura.



b) Para cinco retas, temos 16 regiões. Analisando a configuração com três retas, podemos notar que a quarta reta cria 4 novas regiões ao intersectar as retas que já estavam traçadas. A quinta reta gera mais 5 regiões ao intersectar as outras quatro.



Como não existem duas retas paralelas e nem três concorrentes, se já estão traçadas k retas, uma nova reta acrescentaria mais $k+1$ regiões porque ela dividirá em duas $k+1$ regiões que já existiam. Assim, $n+1$ retas obedecendo as condições do enunciado dividem o plano em:

$$1 + (1 + 2 + \ldots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

22. Como OC é bissetriz, $2x - 5 = x + 3$ e daí $x = 8^\circ$.

23. Temos:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle AOC + \angle COD + \angle DOB \\ &= \angle AOC + 2\angle COD \\ &= 3y + (2y + 10) \\ &= 5y + 10. \end{aligned}$$

Portanto, $y = 34^\circ$. Como

$$39^\circ = \angle COD = \angle DOB = x + 10^\circ,$$

temos $x = 29^\circ$.

24. Sejam $\angle AOC = 2x$ e $\angle COB = 2y$. Temos:

$$\angle DOE = x + y = \frac{2x + 2y}{2} = \frac{\angle AOB}{2} = 35^\circ.$$

25. Apenas D e E são verdadeiras.

26. Como $180^\circ = \angle BOC + \angle AOC = 5x$, segue que $x = 36^\circ$.

27. Seja $\angle BOC = 2x$, então $\angle AOC = 2\angle BOC = 4x$. Como $60^\circ = \angle AOC + \angle BOC = 6x$, segue que $x = 10^\circ$. Portanto, $\angle DOA = \angle DOC + \angle COA = x + 4x = 50^\circ$.

28. Os ângulos são x e $4x - 40^\circ$. Assim, $140^\circ = 5x - 40^\circ$ e $x = 36^\circ$. Os ângulos são 36° e 104°.

29. Temos $2x + 10^\circ = \angle AOD = \angle COB = 50^\circ$ pois eles são opostos pelo vértice. Consequentemente, $x = 20^\circ$.

30. Temos $\angle AOD + \angle DOC = 90^\circ$ e consequentemente $\angle DOC = 35^\circ$. Como $\angle FOE$ e $\angle DOC$ são opostos pelo vértice, temos $\angle FOE = 35^\circ$.

31. A divisão determina os ângulos $2x$, $3x$ e $4x$. Somando-os, temos $90^\circ = 9x$. Portanto, $x = 10^\circ$ e os ângulos são 20°, 30° e 40°.

32. Como $x + y = 90^\circ$ e $x - y = 10^\circ$, somando e subtraindo as duas equações, temos $x = \dfrac{90^\circ + 10^\circ}{2} = 50^\circ$ e $y = \dfrac{90^\circ - 10^\circ}{2} = 40^\circ$.

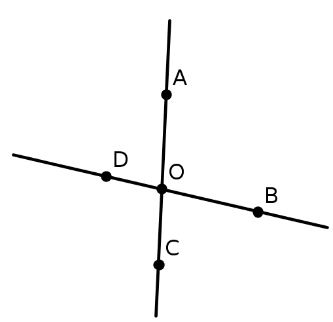
33. Como os ângulos $\angle AOD$ e $\angle COB$ são opostos pelo vértice, temos $3x + 10^\circ = 2x + 20^\circ$, ou seja, $x = 10^\circ$. Como $\angle AOC$ e $\angle COB$ são suplementares, obtemos $\angle AOC = 180^\circ - (2x + 20^\circ) = 140^\circ$.

34. Sejam $2x$ e $2y$ as medidas dos ângulos adjacentes. O ângulo entre as bissetrizes é

$$x + y = \frac{2x + 2y}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ.$$

35. Como os ângulo $\angle BOC$, $\angle DOE$ e $\angle AOF$ são opostos pelo vértice aos ângulos $\angle EOF$, $\angle AOB$, $\angle COD$, respectivamente, temos $360^\circ = 6x$ e consequentemente $x = 60^\circ$.

36. As duas retas determinam quatro semirretas: OA, OB, OC e OD. Todos os ângulos são determinados pelas combinações de duas delas. Como existem 6 maneiras de escolhermos duas delas - (OA, OB), (OA, OC), (OA, OD), (OB, OC), (OB, OD) e (OC, OD) - ficam determinados 6 ângulos.



37.

a) Como $\angle COB = 80^\circ$, temos $x + y = \angle DOB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Além disso, como ângulos opostos pelo vértice possuem mesma medida, temos $x + z = 80^\circ$ e $y + z = \angle DOB = 100^\circ$. Resolvendo o sistema produzido por essas três equações, encontramos $x = 40^\circ$, $y = 60^\circ$ e $z = 40^\circ$.

b) Temos $(3x + 20^\circ) + (x + 40^\circ) = \angle DOB + \angle BOC = 180^\circ$. Assim, $x = 30^\circ$. Além disso, $z = \angle AOC = \angle DOB = 3x + 20^\circ = 110^\circ$.

38.

a) $37°30'$.

b) $52°10'$.

c) $75°22'17''$.

d) $59°02'20''$.

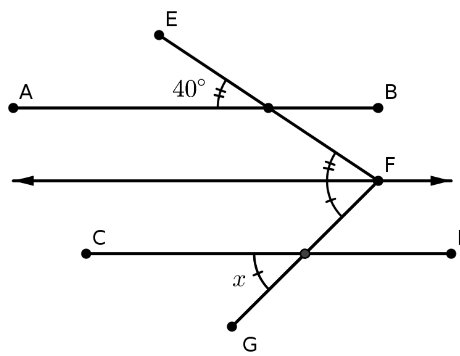
39.

a) Temos $x = 110°$ pois ângulos opostos pelo vértice possuem igual medida. Como os ângulos de medidas $110°$ e y são colaterais internos, temos $y = 180° - 110° = 70°$.

b) Temos $x = 95°$ pois os ângulos com tais medidas são alternos externos. Além disso, $y = 180° - 95° = 85°$.

40. Como ângulos correspondentes são iguais, temos $y = 180° - 120° = 60°$ e $z = 180° - 80° = 100°$. Analisando agora os três ângulos marcados no vértice O que formam um ângulo raso, temos $x + y + 80° = 180°$, ou seja, $x = 40°$.

41. Trace pelo ponto F uma reta paralela ao segmento AB. Os pares de ângulos marcados com os mesmos símbolos são iguais pois são correspondentes. Portanto, $80° = x + 40°$ e consequentemente $x = 40°$.

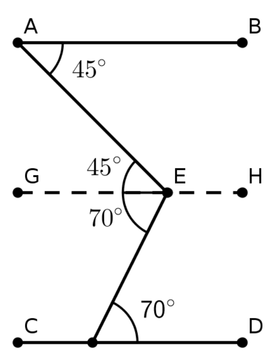


42. Segue do paralelismo que $\angle BED = \angle EBA = x$. Somando agora os ângulos marcados no vértice E que formam um ângulo raso, temos: $2x + 105° + x = 180°$. Assim, $x = 25°$.

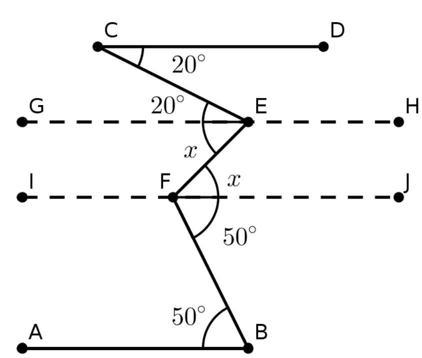
43. Do paralelismo segue que $\angle JFH = \angle CHG = x$ e $\angle KFE = \angle FEA = y$. Portanto, $180° = x + y + z = 150° + z$. Daí, $z = 30°$.

44.

a) Pelo ponto E, trace uma paralela a AB. O ângulo x será então formado por dois ângulos que são alternos internos aos ângulos que medem $45°$ e $70°$. Portanto, $x = 115°$.



b) Repitamos o procedimento do exercício anterior traçando retas paralelas a AB pelos pontos E e F como indica a figura abaixo.



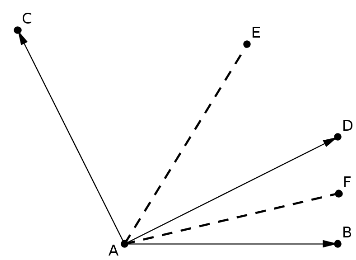
Teremos inicialmente $70° = x + 50°$, ou seja, $x = 20°$. Além disso, $\angle EFB = x + 50° = 100°$.

45.

a) $34°23'$.   b) $21°40'09''$.   c) $23°19'14''$.   d) $93°02'$

46. O ângulo entre as bissetrizes corresponde a soma da medade de cada um dos ângulos originais, ou seja, $\dfrac{180°}{2} = 90°$.

47.



Sejam $\angle BAD = 2x$ e $\angle BAC = 2y$ os ângulos adjacentes. O ângulo entre as bissetrizes é

$$y - x = \frac{\angle BAC - \angle BAD}{2} = \frac{100°}{2} = 50°.$$

48. Sejam $x = \angle CAD = \angle DAB$ e $y = \angle EAB$. Então $2x + y = 120°$ e $2x - y = 80°$. Portanto,

$$\angle DAE = x - y = 50° - 20° = 30°.$$

49. Temos $x - y = 20°$. Além disso, $(90° - x) + (180° - 2x) = 2(90° - y)$, ou seja, $3x - 2y = 90°$. Resolvendo o sistema produzido pelas duas últimas equações, obtemos $x = 50°$ e $y = 30°$.

50. Devemos encontrar x tal que:

$$\begin{aligned} x^2 - 50° &= 5(90° - x) \\ x^2 + 5x &= 500 \\ x(x + 5°) &= 20 \cdot 25°. \end{aligned}$$

Uma solução seria $x = 20°$.

51. Suponhamos que $y = 4x$. Assim,

$$\begin{aligned} (90° - x) + (90° - 4x) &= \frac{(180° - x) + (180° - 4x)}{10} \\ 1800° - 50x &= 360° - 5x \\ 1440° &= 45x \\ 32° &= x. \end{aligned}$$

52. Letra **B**.

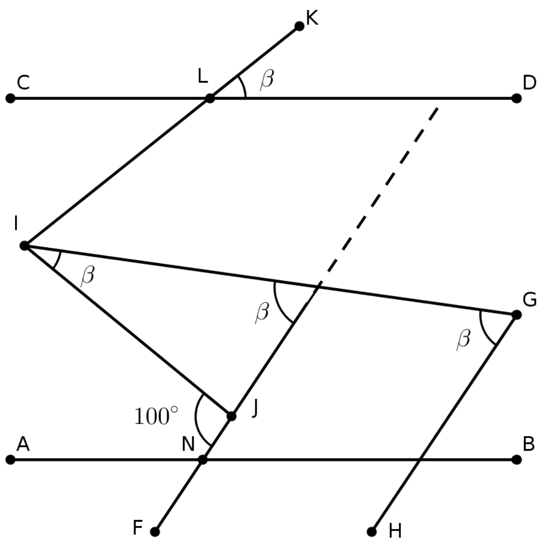
53. Como $180° = (3x - 40°) + (2x + 60°) = 5x + 20°$, segue que $x = 32°$ e o maior dos ângulos vale $124°$.

54. Resposta B.

55.

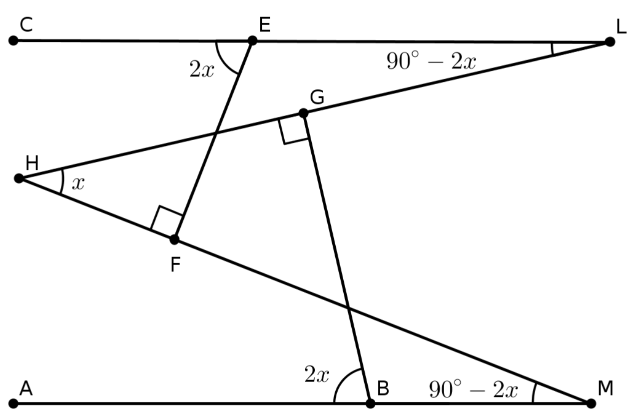
(a) Pelo Teorema dos Bicos(veja o último exercício) aplicado à linha poligonal que passa por E, temos $x = \alpha + \theta$. Aplicando-o novamente, agora à linha poligonal que passa por J, temos $180° - 3x = 2\alpha + 2\theta$. Assim, $180° - 3x = 2x$, ou seja, $x = 36°$.

(b) Prolongue a reta JE. Do paralelismo obtemos um outro ângulo β como indica a figura abaixo.



Pelo Teorema do ângulo externo, temos que $2\beta = 100°$, ou seja, $\beta = 50°$.

56. Prolongue HG e HF até encontrarem CD e AB. Pelo Teorema dos Bicos aplicado à poligonal que passa pelos vértices F e G, podemos concluir que tais prolongamentos formam ângulos de $90° - 2x$ com esses segmentos. Aplicado agora o Teorema dos Bicos à linha poligonal que passa por H, podemos concluir que $x = (90° - 2x) + (90° - 2x)$. Assim, $x = 36°$.



57. Apliquemos o Teorema dos Bicos à linha poligonal que passa pelo vértice C. Os ângulos incidentes em F e E valem $x + \alpha$ e $90° - 2x$. Portanto,

$$80° + \alpha = (x + \alpha) + (90° - 2x).$$

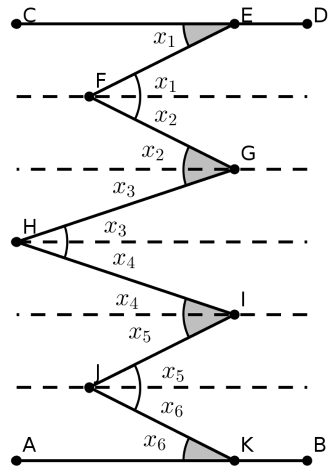
Consequentemente $x = 10°$.

58. (Extraído da OBM − 2006)
Como os dois bastões verticais são paralelos, podemos aplicar o Teorema dos Bicos(veja último exercício) no caminho poligonal formado pelos lados dos quadrados que contém os ângulos marcados obtendo:

$$30° + 126° + 75° + x = 90° + 90° + 90°.$$

Assim, $x = 39°$.

59. Por cada um dos vértices dos "bicos", trace uma paralela ao segmento AB. Vários pares de ângulos alternos internos serão formados como indica a figura abaixo:



Cada um dos ângulos marcados possui exatamente um representante entre os ângulos brancos e pretos. Assim, cada uma dessas somas de ângulos vale $x_1 + x_2 + \ldots + x_6$.

60. Temos 1, 0 e 2 para os itens $a)$, $b)$ e $c)$, respectivamente.

61.

a) Sim, pois $6 < 4 + 5$.

b) Não, pois $7 > 3 + 3$.

c) Não, pois $8 = 4 + 4$.

d) Sim, pois $4 < 3 + 3$.

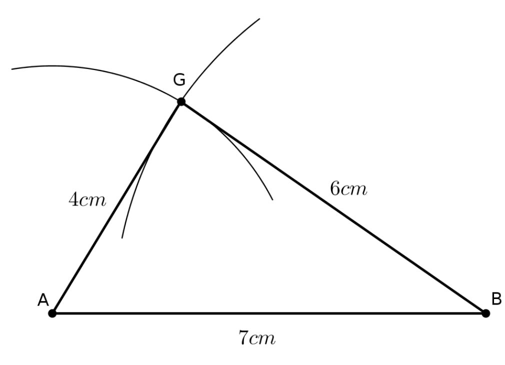
e) Sim, pois $6 < 6 + 6$.

62. O comprimento do terceiro lado deve estar entre $4 - 3 = 1$ e $3 + 4 = 7$.

63. O terceiro lado deve ser maior que $5 - 2 = 3$ e menor ou igual a 5.

64. Se x é a medida dos lados iguais, devemos ter $x + x > 4$, ou seja, $x > 2$.

65. Construa um segmento AB de comprimento $7cm$ e outros dois de comprimentos $4cm$ e $6cm$. Em seguida, usando o compasso com centro em A e abertura igual ao segmento de comprimento $4cm$, desenhe um círculo. Faça o mesmo com o compasso centrado em B e usando como abertura o segmento de comprimento $6cm$. Seja G um dos pontos de interseção desses dois círculos. O triângulo $\triangle ABG$ possui lados de comprimentos $4cm$, $6cm$ e $7cm$.



66.

a) Não, pois o maior deles não é menor que a soma dos outros dois.

b) Sim, pois o maior deles é menor que a soma dos outros dois.

c) Sim, pois o maior deles é menor que a soma dos outros dois.

67. A princípio, o terceiro lado poderia assumir qualquer valor maior que $17 - 10 = 7cm$ e menor que $10 + 17 = 27cm$. Nesse intervalo, apenas 9, 16 e 25 são quadrados de inteiros. Logo, o terceiro lado só pode assumir um desses três valores.

68. A princípio, o terceiro lado poderia assumir qualquer valor menor que $13 + 7 = 20cm$ e maior que $13 - 7 = 6cm$. Como entre tais números, apenas 10 e 15 são múltiplos de 5, esses dois números constituem os possíveis valores do terceiro lado.

69. O comprimento do lado BC deve ser menor que $3,8 + 0,6 = 4,4cm$ e maior que $3,8 - 0,6 = 3,2cm$. O lado BC corresponde ao único inteiro entre tais números, ou seja, $BC = 4cm$.

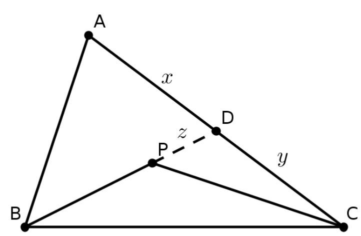
70. (Extraído da Olimpíada Russa)
Como todos as frações são positivas, basta mostrarmos que a maior delas é menor que a soma das outras duas. Suponha sem perda de generalidade que $\dfrac{1}{a+b}$ é a maior das três frações. Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo de lados a, b e c, temos: $c < a + b$. Consequentemente:

$$\begin{aligned} a + c < & \quad 2a + b & < 2(a + b); \\ b + c < & \quad a + 2b & < 2(a + b). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{2(a+b)} + \frac{1}{2(a+b)} = \frac{1}{a+b}.$$

71. Prolongue o segmento BP até ele intersectar o lado AC em D.



Aplicando a desigualdade triangular nos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle PDC$, obtemos:

$$\begin{aligned} AB + x = & \quad AB + AD & > BD = BP + z \\ z + y = & \quad PD + DC & > PC \end{aligned}$$

Somando as duas desigualdades resultantes, temos:

$$\begin{aligned} AB + (x + y) + \cancel{z} & > \cancel{z} + BP + PC \\ AB + AC & > BP + PC. \end{aligned}$$

72. Pela desigualdade triangular aplicada aos triângulos $\triangle BDE$, $\triangle DAF$ e $\triangle EFC$, temos:

$$\begin{aligned} DE & < BD + BE \\ EF & < EC + CF \\ DF & < DA + AF. \end{aligned}$$

Somando as três desigualdades, obtemos:

$$\begin{aligned} DE + EF + DF & < (BD + DA) + (AF + FC) \\ & \quad +(BE + EC) \\ & = AB + AC + BC. \end{aligned}$$

73. Aplicando a desigualdade triangular nos triângulos $\triangle ABO$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$ e $\triangle AOD$, temos:

$$\begin{aligned} AB &< AO + OB; \\ BC &< BO + OC; \\ CD &< OC + OD; \\ AD &< AO + OD. \end{aligned}$$

Somando as quatro desigualdades, temos

$$\begin{aligned} AB + BC + CD + DA &< 2(AO + BO + CO + DO) \\ &= 2(BD + AC). \end{aligned}$$

Para verificar o segundo item, basta aplicar a desigualdade triangular nos triângulos $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$ para obtermos:

$$\begin{aligned} BD &< BC + CD; \\ AC &< AD + DC; \\ BD &< AD + AB; \\ AC &< AB + BC. \end{aligned}$$

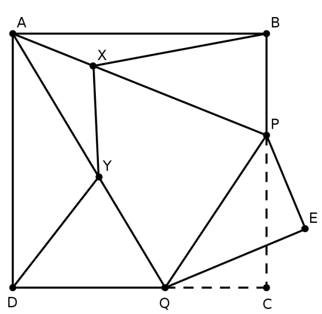
Somando as quatro desigualdades, podemos concluir que:

$$2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA).$$

Basta agora dividirmos as duas desigualdades resultantes para obtermos o enunciado.

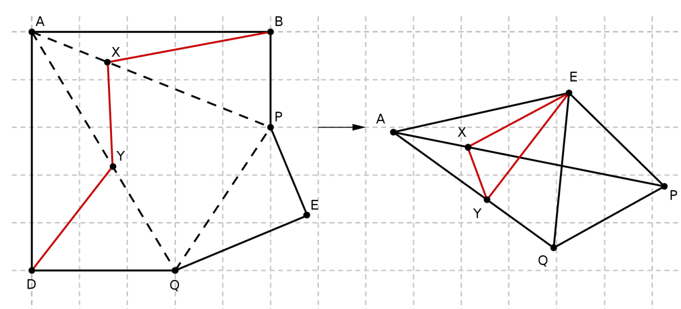
74. (Extraído da Olimpíada Iberoamericana)

Recorte o triângulo $\triangle PQC$ e coloque-o virado formando o triângulo $\triangle PEQ$ de modo que $PE = QC$ e $QE = PC$. Formalmente estamos construindo um triângulo congruente ao inicial.



Imagine agora que os segmentos AP, PQ e AQ são marcas de dobraduras no papel.

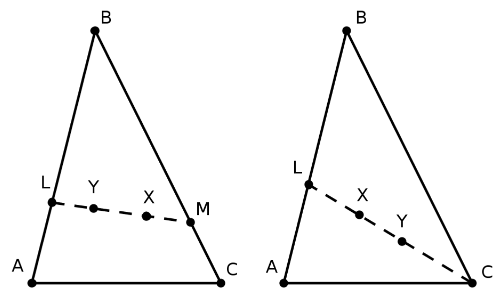
Como $BP = PE$, $QE = DQ$ e $AD = AB$, podemos agora dobrar os triângulos ao longo desses segmentos e formar um tetraedro como indica a figura abaixo.



Como X, Y e E são três vértices em arestas distintas do tetraedro, eles formam um triângulo.

Comentário para Professores: O apelo físico do uso dobraduras tem como propósito tornar a solução mais acessível, natural e divertida para alunos jovens. Tal operação pode ser formalizada com o uso de isometrias no espaço.

75. Sejam X e Y pontos no interior do triângulo $\triangle ABC$. Trace a reta que os une. Se os dois pontos não estão em mesmo lado do triângulo, tal reta intersecta os lados em dois pontos. A figura abaixo representa os dois caso possíveis.



No primeiro desenho, $XY \leq LM$. Além disso, pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} LM &< BL + BM; \\ LM &< AL + AM \\ &< AL + AC + CM. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} 2LM &< (BL + AL) + (BM + CM) + AC \\ &= 2p \end{aligned}$$

No segundo desenho, novamente pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} LM &< BL + BC \\ LM &< LA + AC. \end{aligned}$$

Somando as desigualdades,

$$\begin{aligned} 2LM &< (BL + LA) + AC + BC \\ &= 2p \end{aligned}$$

Em ambos os casos, $LM < p$, como desejado. Caso os dois pontos estejam em um mesmo lado do triângulo, o comprimento do segmento que os une é menor ou igual que o lado que os contém. Este por sua vez é menor que o semiperímetro em virtude da desigualdade triangular.

76.

a) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{4}{2} = 2.$

b) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{7}{3}.$

c) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1/2}{1/3} = \dfrac{3}{2}.$

d) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.$

e) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

f) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

g) Em um paralelogramo, lados opostos são congruentes, ou seja, $AB = CD$. Assim, temos $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AB}{AB} = 1.$

77. Segmentos comensuráveis são aqueles que possuem um número racional como resultado da razão de suas medidas. Assim, no exercício anterior, os segmentos comensuráveis são os dos ítens a, b, c, d, g. E, é claro, os segmentos incomensuráveis, que são aqueles que obtemos um número irracional na razão de suas medidas, são os das letras e, f.

78. Temos $\dfrac{28}{CD} = \dfrac{7}{4}$, ou seja, $CD = 16$cm.

79. Temos $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{1}{2}$, ou seja, $CD = 4$cm. Perceba que a escolha da medida de $\overline{CD}$ no numerador ocorreu porque a fração é menor que 1 e o segmento de maior medida é $\overline{AB}$.

80. Seja l a medida do lado do quadrado. Temos então $\dfrac{8}{l} = \sqrt{2}$, ou seja, $l = 4\sqrt{2}$.

81. Seja l a medida do lado, temos $\dfrac{6}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $l = 4\sqrt{3}$cm.

82. Como a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio de uma circunferência, temos $\dfrac{8\pi}{2R} = \pi$, ou seja, a medida R do raio é 4cm.

83. Sendo a, b, c, as medidas dos lados do $\triangle ABC$, temos como razões entre as medidas dos lados a/b (ou b/a), a/c (ou c/a) e c/b (ou b/c), números racionais, pois são, dois a dois, segmentos comensuráveis. Fazendo a razão dos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{AB}$, sendo indiferente se tomássemos $\overline{AC}$ ou $\overline{BC}$, temos $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{a+b+c}{a} = \dfrac{a}{a} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} = 1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}$, que é um número racional e, portanto, os segmentos são comensuráveis.

84. (Extraído da Vídeo Aula) Chamando a medida do lado de l e a medida da diagonal de d, pelo Teorema de Pitágoras, temos $d^2 = l^2 + l^2$, segue que $(\dfrac{d}{l})^2 = 2$. Supondo que $(\dfrac{d}{l})$ seja um número racional, digamos $\dfrac{p}{q}$ onde $mdc(p,q) = 1$ (caso não seja, basta simplificar), temos

$$\begin{aligned} (\frac{p}{q})^2 &= 2 \\ \frac{p^2}{q^2} &= 2 \\ p^2 &= 2q^2. \end{aligned}$$

Vamos usar o fato de que, se n^2 é par, então n também é par (não é difícil essa demonstração). Como $d^2 = 2l^2$, então d^2 é par e, por consequência, d também é par e faremos $d = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Temos agora

$$\begin{aligned} p^2 &= 2q^2 \\ (2k)^2 &= 2q^2 \\ 4k^2 &= 2q^2 \\ 2k^2 &= q^2. \end{aligned}$$

Concluímos então que q^2 e, por consequência, q são pares. Mas se p e q são pares, $mdc(p,q) \neq 1$, o que é absurdo. Portanto a fração $\dfrac{d}{l}$ não pode ser um número racional e os segmentos (lado e diagonal do quadrado) não podem ser comensuráveis e os chamamos de incomensuráveis.

85. Utilizando o Teorema de Tales, temos

a) (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned}\frac{x}{6} &= \frac{4}{8}\\ x &= 3.\end{aligned}$$

b) (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{5x-1} &= \frac{4}{7}\\ 20x-4 &= 14x+21\\ x &= 25/6.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{5}{x} &= \frac{4}{6}\\ x &= 15/2.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{4} &= \frac{x+5}{x}\\ x^2+3x &= 4x+20\\ x^2-x-20 &= 0\\ x_1 &= -4\\ x_2 &= 5.\end{aligned}$$

Porém, como se trata de comprimento de segmentos, apenas $x = 5$ é solução.

86. (Extraído da Vídeo Aula) Aplicando o Teorema de Tales, temos

$$\begin{aligned}\frac{3}{6} &= \frac{x}{x+6}\\ 6x &= 3x+18\\ x &= 6.\end{aligned}$$

87. (Extraído da Vídeo Aula) Usando o Teorema da Bissetriz Interna, temos

$$\begin{aligned}\frac{4}{x} &= \frac{3}{5}\\ x &= 20/3.\end{aligned}$$

88. (Extraído da Vídeo Aula) Aplicando o Teorema da Bissetriz Externa, temos

$$\begin{aligned}\frac{8}{x+12} &= \frac{6}{12}\\ \frac{8}{x+12} &= \frac{1}{2}\\ 12+x &= 16\\ x &= 4.\end{aligned}$$

89. (Extraído da Vídeo Aula) Se o perímetro mede 75cm, temos $SC = 35 - x$. Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna,

$$\begin{aligned}\frac{10}{x} &= \frac{35-x}{30}\\ 35x-x^2 &= 300\\ x^2-35x+300 &= 0\\ x_1 &= 15\\ x_2 &= 20.\end{aligned}$$

Perceba que pode ser qualquer um dos dois valores.

90. Pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos $\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{x+y}{8+12} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, segue que $x = 6$ e $y = 9$.

91. Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, temos

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} &= \frac{x+3}{4} \\ x^2+x-6 &= 4x+4 \\ x^2-3x-10 &= 0 \\ x_1 &= -2 \\ x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Como se trata de comprimento de segmentos, apenas $x = 5$ é solução.

92. Incialmente, construiremos o triângulo e seus elementos.

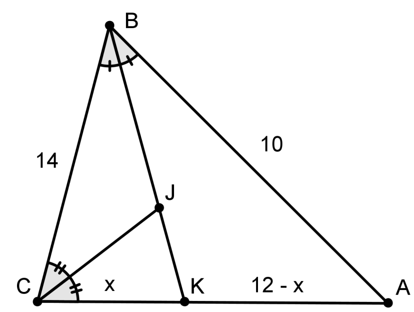


Figura 11

Como $\overline{BK}$ é bissetriz, vamos aplicar o Teorema da Bissetriz Interna.

$$\begin{aligned} \frac{12-x}{10} &= \frac{x}{14} \\ 10x &= 168-14x \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Vamos repetir o processo, porém, agora, $\underline{CJ}$ como bissetriz:

$$\begin{aligned} \frac{BJ}{14} &= \frac{JK}{7} \\ \frac{BJ}{JK} &= 2. \end{aligned}$$

Como $\dfrac{BJ}{JK} \in \mathbb{Q}$, então são segmentos comensuráveis.

93.

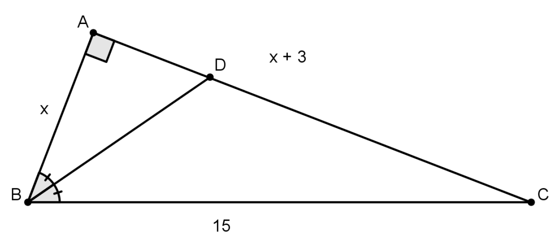


Figura 12

Temos, inicialmente, $BC = 15$, $AB = x$ e $AC = x + 3$, sendo $\overline{AC}$ o maior dos catetos. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos $x^2 + (x+3)^2 = 15^2$, segue que $x = 9$. Como $\overline{BD}$ é bissetriz, vamos aplicar o Teorema da Bissetriz Interna:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{9} &= \frac{12-AD}{15} \\ 15AD &= 108-9AD \\ AD &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Aplicando, por fim, o Teorema de Pitágoras ao $\triangle ABD$, temos $BD^2 = 9^2 + (9/2)^2$, segue que $BD = \dfrac{9\sqrt{5}}{2}$.

94.

a) $A = 8 \cdot 4 = 32cm^2$.

b) A altura h mede $12 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 6cm$ e a base b mede $12 \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}cm$. Assim

$$A = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}cm^2.$$

95.

a) $A = 8^2 = 64cm^2$.

b) $A = 7,1^2 = 50,41cm^2$.

c) $A = (\sqrt{3})^2 = 3cm^2$.

d) Se a diagonal mede $6cm$, o lado mede $3\sqrt{2}cm$, então a área é $A = (3\sqrt{2})^2 = 18cm^2$.

96.

a) $l = \sqrt{25} = 5cm$.

b) $l = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}cm$.

97.

a) $A = (5 \cdot 8)/2 = 20cm^2$.

b) Se $2b$ é o comprimento da outra diagonal, como as diagonais de um losango são perpendiculares, usando o Teorema de Pitágoras obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 + 3^2 &= 5^2 \\ b &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ b &= 4. \end{aligned}$$

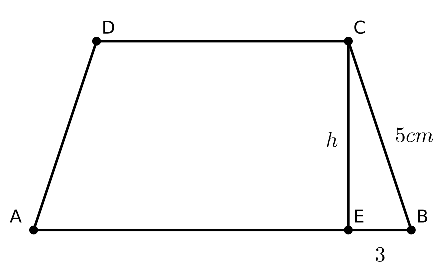
Portanto, a outra diagonal mede $8cm$ e a área do losango vale $A = 24cm^2$.

c) Dois ângulos internos consecutivos de um losango são suplementares. Assim, um de seus ângulos internos será 60°. Temos, então, dois triângulos equiláteros de lados medindo $8cm$. A área de cada um deles é $\dfrac{8^2\sqrt{3}}{4}$.

Portanto, a área do losango é $2 \cdot \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}cm^2$.

98. $A = \dfrac{4(5+7)}{2} = 24cm^2$.

100. Podemos usar o Teorema de Pitágoras para encontrarmos a altura h.



$$\begin{aligned} h^2 + 3^2 &= 5^2 \\ h &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ h &= 4. \end{aligned}$$

Daí, segue que $A = \dfrac{4(6+12)}{2} = 36cm^2$.

101.

a) $A = 6 \cdot 4 = 24cm^2$.

b) Temos que a altura do paralelogramo mede $6 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 3\sqrt{3}$. Daí, segue que $A = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}cm^2$.

102.

a) $A = (8 \cdot 5)/2 = 20$.

b) Pelo Teorema de Pitágoras, a medida do outro cateto é $12cm$. Daí, segue que $A = (12 \cdot 5)/2 = 30$.

c) $A = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}cm^2$.

d) $A = \dfrac{6 \cdot 8 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{2} = 12\sqrt{2}cm^2$.

102. Se o perímetro é $72cm^2$, então o lado é $72/4 = 18cm$, segue que $A = 18^2 = 324cm^2$.

103. Chamando a altura de x, a base é $2x$. Temos, então, que $2x^2 = 450$. Daí segue que $x = 15$. Portanto, as dimensões do retângulo são $15cm$ e $30cm$.

104. Sendo x e y as dimensões iniciais, temos $xy = 100$. Após as modificações nas dimensões, sua área será

$$A = 0,9x \cdot 1,1y = 0,99 \cdot 100 = 99cm^2.$$

105.

a) A altura de um triângulo de lado 8 é $(8\sqrt{3})/2 = 4\sqrt{3}$. Como o raio do círculo inscrito é a terça parte da altura do triângulo, o raio do círculo do desenho mede $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Assim, a área da região hachurada pode ser calculada pela diferença entre as áreas do triângulo equilátero e do círculo.

$$\begin{aligned} A_{\text{hachurada}} &= A_{\text{triângulo equilátero}} - A_{\text{círculo}} \\ A &= \frac{8^2\sqrt{3}}{4} - \pi\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &= 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} \\ &= \frac{48\sqrt{3} - 16\pi}{3}cm^2. \end{aligned}$$

b) A área hachurada é a diferença entre as áreas do quadrado e do setor circular (quarta parte do círculo).

$$\begin{aligned} A_{hachurada} &= A_{\text{quadrado}} - A_{\text{setor}} \\ &= 10^2 - \frac{10^2\pi}{4} \\ &= 100 - 25\pi \\ &= 25(4 - \pi)cm^2. \end{aligned}$$

c) A medida do ângulo do setor circular é $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, que equivale a $1/3$ do círculo. Temos, então

$$A = \frac{6^2\pi}{3} = 12\pi cm^2.$$

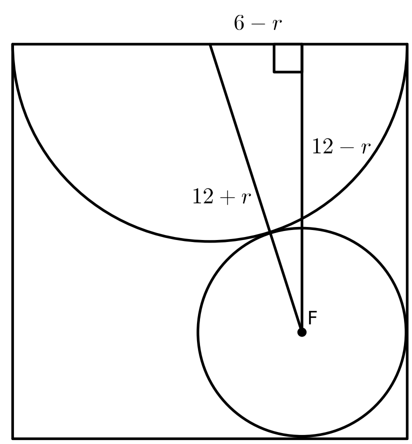
106. (Extraído do ENEM 2013) Como a área inicial era $30 \cdot 15 = 450cm^2$ e a área final ficou $(30 - 6)(15 - 3) = 288cm^2$, sua redução foi de $\dfrac{450 - 288}{450} = 0,36 = 36\%$. Resposta C.

107.

a) A área hachurada é a diferença entre as áreas do setor circular e do triângulo. Temos então

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{8}\pi \cdot 8^2 - \frac{8 \cdot 8 \cdot \operatorname{sen} 135^\circ}{2} \\ &= 24\pi - 16\sqrt{2} \\ &= 8(\pi - \sqrt{2})cm^2. \end{aligned}$$

b) Para o cálculo do raio r, utilizaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo formado pela reta que passa pelos centros das duas circunferências, pelo centro da circunferência menor e é perpendicular ao lado do quadrado e pelo lado do quadrado como indica a figura abaixo.



Os lados deste triângulo são $(6+r)$, $(6-r)$ e $(12-r)$. Temos, então

$$\begin{aligned} (6+r)^2 &= (6-r)^2 + (12-r)^2 \\ 12r &= -12r + 144 - 24r + r^2 \\ r^2 - 48r + 144 &= 0 \\ r &= 12(2-\sqrt{3})cm. \end{aligned}$$

Assim, a área do círculo menor é $\pi[12(2-\sqrt{3})]^2 = 144(7-4\sqrt{3})cm^2$

c) Traçando um segmento pelos pontos de intersecção das circunferências, teremos dois segmentos circulares, cujas áreas são a diferença entre as áreas dos setores circulares e dos triângulos gerados. A medida do ângulo destes setores é 120°, pois pode-se formar dois triângulos equiláteros ligando os centros das circunferências e seus pontos de intersecção. A distância entre estes pontos de intersecção é $4\sqrt{3}$cm, pois é o dobro da altura de um dos triângulos. Temos, então

$$\begin{aligned} A &= 2\left(\frac{4^2\pi}{3} - \frac{4 \cdot 4 \cdot \operatorname{sen} 120^\circ}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) \\ &= 4\left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) cm^2. \end{aligned}$$

108. (Extraído do ENEM − 2012)
A área perdida é a diferença entre as áreas inicial e final. Temos, então

$$\begin{aligned} A &= 15 - (5-x)(3-y) \\ &= 15 - 15 + 3x + 5y - xy \\ &= 5y + 3x - xy. \end{aligned}$$

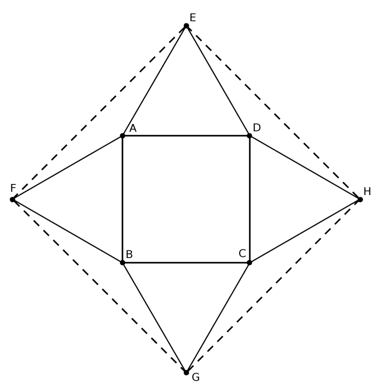
Resposta E.

109. (Extraído do ENEM − 2012)
Calculando a área $ABPD$, temos

$$\begin{aligned} [ABPD] &= [ABD] - [PBD] \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} - \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} m^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, a soma das áreas não sombreadas é $2 \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$ e a área restante é $1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Temos, então, que o custo é $\dfrac{1}{4} \cdot 50 + \dfrac{3}{4} \cdot 30 = 12,50 + 22,50 = R\$35,00$. Resposta B.

110. (Extraído da OBM − 2014)
Como cada triângulo equilátero tem altura $\frac{\sqrt{3}}{2}$, as diagonais do quadrado $EFGH$ medem $1 + \sqrt{3}$, e sua área pode ser calculada como $\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$. Resposta C.



111. (Extraído da OBMEP − 2005)

a) Sendo a o lado de cada quadradinho, temos

$$\begin{aligned} [EFGH] &= [ABCD] - 4[AEH] \\ &= 25a^2 - 8a^2 \\ &= 17a^2 = \frac{17}{25}[ABCD] \end{aligned}$$

b) Sendo A a área do quadrado sombreado, temos

$$\begin{aligned} A &= [EFGH]/2 \\ &= \frac{17}{50}[ABCD] \\ &= \frac{136}{5} cm^2 \end{aligned}$$

Portanto, o lado do quadrado sombreado é $\dfrac{2\sqrt{170}}{5} cm$.

112. (Extraído da OBMEP − 2005)

a) A área de cada canteiro de pedra para $x = 2$ vale $\frac{2 \cdot 8}{2} = 8$. Assim, a área do canteiro de grama é $100 - 4 \cdot 8 = 68m^2$.

b) A área de cada canteiro triangular é dada pela expressão $\frac{x(10-x)}{2}$. Assim, a área do canteiro de grama é dada por:
$$100 - 4 \cdot x(10-x)2 = 2x^2 - 20x + 100m^2$$

c) Como a diferença entre os preços das coberturas de pedra e grama é de 1, o custo total é o mesmo que gastar 3 por metro quadrado em todo o quadrado e 1 extra pela área dos canteiros de grama, ou seja, o custo total é:
$$3 \cdot 100 + 1 \cdot (2x^2 - 20x + 100) = 2x^2 - 20x + 400.$$
Fatorando a expressão anterior, obtemos:
$$\begin{aligned} 2x^2 - 20x + 200 &= 2(x-5)^2 + 350 \\ &\geq 0^2 + 350 \\ &= 350. \end{aligned}$$
A igualdade ocorre apenas quando $x = 5$. Assim, o prefeito precisa de pelo menos $R\$150,00$ reais.

113. (Extraído da OBM − 2014)
Como a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos de mesma área, as áreas dos triângulos sombreados são $8m^2$ e $18m^2$. Observando, agora, o retângulo original, sua diagonal o dividiu em dois triângulos, sendo um deles com área $24 + 8 + 18 = 50m^2$, ou seja, a área do retângulo original é $100m^2$. Resposta D.

114. (Extraído da OBM − 2013)

a) Como $A_{CBE} = A_{EDC}$, pois possuem a mesma base e mesma altura, então, decompondo ambas as áreas, $A_{ABC} + A_{ACE} = A_{ADE} + A_{ACE}$, segue que $A_{ABC} = A_{ADE}$.

b) Traçando o segmento GH, temos, pelo item anterior, que $A_{AGH} = A_{ABC} = 5cm^2$ e $A_{DGH} = A_{DEF} = 4cm^2$. Temos então que $A_{AGDH} = A_{AGH} + A_{DGH} = 5 + 4 = 9cm^2$.

115. (Extraído da OBM − 2012)
Como a área total do terreno é $160 \cdot 120 - 60 \cdot 50 = 16200m^2$, cada parte deverá ter $8100m^2$. Calculando a área do trapézio $ABCP$, temos
$$\begin{aligned} [ABCP] &= 8100 \\ \frac{(120 - x + 50)100}{2} &= 8100 \\ 170 - x &= 162 \\ x &= 8m. \end{aligned}$$

Resposta B.

116. (Extraído da OBM − 2012)
Se P o pé da altura do $\triangle DEC$ no lado DC, então $EP = 4\sqrt{3}$. Temos que

$$\begin{aligned}
[AEC] &= [AECD] - [ACD] \\
&= [AEPD] + [ECP] - [ACD] \\
&= \frac{4(6+4\sqrt{3})}{2} + \frac{4\cdot 4\sqrt{3}}{2} - 24 \\
&= 12 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 24 \\
&= 16\sqrt{3} - 12 \\
&= 4(4\sqrt{3} - 3).
\end{aligned}$$

117. (Extraído da EPCAR − 2014)
Como os arcos são congruentes, o $\triangle ABC$ é equilátero, sendo 120° a medida do seu ângulo central e a medida do raio da circunferência maior o dobro do raio da menor, ou seja, $2cm$. Dividiremos a área hachurada em três partes:

i) área de $2/3$ do círculo menor, que é $2\pi/3$;

ii) área do segmento do círculo maior, que é $\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$;

iii) área do quadrilátero formado por dois segmentos perpendiculares aos lados do triângulo partindo do centro do círculo menor, que é $\sqrt{3}$.

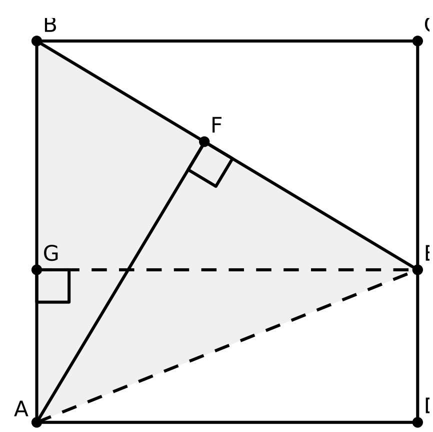
Portanto, a área hachurada é $2\pi/3 + \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\pi$. Resposta A.

118. (Adaptado da EPCAR − 2013)
Sendo cada uma das cinco partes hachuradas a área de um segmento circular de uma circunferência de raio que mede a, temos que a área hachurada é $5(\dfrac{a^2\pi}{6} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4})$

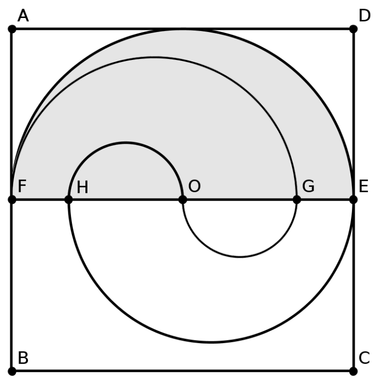
119. A área do triângulo ABE é $\dfrac{AB\cdot GE}{2} = 72$. Assim, aplicando a mesma fórmula de área para a base BE e a altura AF, temos:

$$72 = \frac{AF\cdot BE}{2} = \frac{AF\cdot 9}{2} = 4,5AF.$$

Portanto, o comprimento de AF é $\dfrac{72}{4,5} = 16$.



120. Como $FH = GE$, temos $HO = FO - FH = OE - GE = OG$. Consequentemente o semicírculo de diâmetro HO possui a mesma área do semicírculo de diâmetro OG. Além disso, a área entre os arcos FG e HO é igual à área entre os arcos GO e HE. Consequentemente, a área procurada corresponde a área de um semicírculo de diâmetro FE. Como o raio do semicírculo de diâmetro FE mede 1, a área sombreada mede $\dfrac{2^2\pi}{2} = 2\pi$.



121. (Extraído da OBM − 2009)
Temos $\angle ALK = 180° - \angle KLM - \angle BLM = 180° - 90° - \angle BLM = 90° - \angle BLM = \angle BLM$, ambos os ângulos $\angle KAL$ e $\angle LBM$ são retos. Como $KL = LM$, segue que os triângulos KAL e LBM são congruentes pelo caso LAA_o. Portanto, sendo $x = AK$, $AL = 4 - x$, $LB = x$ e $BM = AL = 4 - x$. Logo a área do trapézio $AKMB$ é igual a $\dfrac{AK + BM}{2} \cdot AB = \dfrac{x + (4 - x)}{2} \cdot 4 = 8$ e, consequentemente, a área de $CDKM$ é $4^2 - 8 = 8$. Resposta B
Observação: De fato, os trapézios $AKMB$ e $KMCD$ são iguais.

122. Seja h a distância entre as duas retas. Este também é o valor da altura dos triângulos $\triangle EFG$ e $\triangle HIJ$. Assim

$$\begin{aligned}\frac{[EFG]}{[HIJ]} &= \frac{h \cdot EG/2}{h \cdot IJ/2} \\ &= \frac{EG}{IJ} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

123.

a) Como o semiperímetro mede 10cm, temos $A = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = 10\sqrt{3}cm^2$.

b) Como o semiperímetro mede 9cm, temos $A = \sqrt{9(9-6)(9-5)(9-7)} = 6\sqrt{6}cm^2$.

c) Como o semiperímetro mede 18cm, temos $A = \sqrt{18(18-12)(18-10)(18-14)} = 24\sqrt{6}cm^2$.

d) Como o semiperímetro mede 9cm, temos $A = \sqrt{14(14-10)(14-10)(14-8)} = 8\sqrt{21}cm^2$.

124. Como o semiperímetro mede 21cm, portanto, $A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84cm^2$.

125. (Extraído da OBM 2014) Sendo Q o ponto de intersecção da bissetriz de $\angle BAC$ com o lado BC, temos que, pelo Teorema da Bissetriz Interna, $\frac{5}{CQ} = \frac{6}{BQ}$, ou seja, $\frac{BQ}{CQ} = \frac{6}{5}$. Temos também que

$$\begin{aligned} \frac{BQ}{CQ} &= \frac{[ABQ]}{[ACQ]} \\ &= \frac{[BPQ]}{[CPQ]} \\ &= \frac{[ABQ]-[BPQ]}{[ACQ]-[CPQ]} \\ &= \frac{[ABP]}{[ACP]} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{[APC]} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Assim, $[APC] = 5/4$. Resposta A.

126. Se h é a altura relativa ao lado BC, temos $30 = \frac{BD \cdot h}{2}$ e $10 = \frac{DC \cdot h}{2}$. Portanto,

$$3 = \frac{30}{10} = \frac{BD \cdot h}{DC \cdot h} = \frac{BD}{DC}.$$

127.

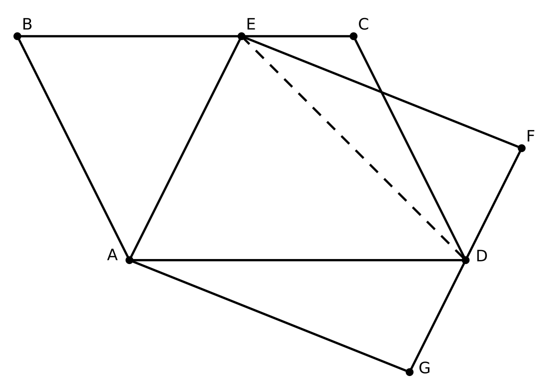
a) Como D é ponto médio de AC, segue que $[ABD] = [BDC] = [ABC]/2$. Além disso, como E é ponto médio de BC, seque que $[BED] = [BDC]/2 = [ABC]/4$.

b) Considere os triângulos da figura de bases AG e GE, assim $\frac{AG}{GE} = \frac{[AGD]}{[GDE]} = \frac{[ABG]}{[BGE]}$.

Consequentemente, usando propriedades de proporções, temos:

$$\begin{aligned} \frac{AG}{GE} &= \frac{[AGD]+[ABG]}{[GDE]+[BGE]} \\ &= \frac{[ABD]}{[BDE]} \\ &= \frac{[ABC]/2}{[ABC]/4} \\ &= 2. \end{aligned}$$

128. Trace o segmento ED. O triângulo EAD possui metade da área do paralelogramo $ABCD$ pois possui a mesma base e a mesma altura. Pelo mesmo argumento, também possui metade da área do paralelogramo $EFGA$. Assim, as áreas de ambos paralelogramos são iguais a $20cm^2$.



129.

a) Os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ possuem mesma altura mas a razão entre suas bases é $\frac{1}{4}$. Portanto, $[ADE] = \frac{1}{4} \cdot [ABC] = 9cm^2$.

b) Como $DC = \frac{2}{3} \cdot BC$, temos $[ADC] = \frac{2}{3} \cdot [ABC] = 24cm^2$.Como M é o ponto médio de AD, as áreas dos triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle MDC$ são iguais e valem metade da área do $\triangle ADC$. Portanto, $[MDC] = 12cm^2$.

c) Como $DC = \frac{2}{3} \cdot BC$, temos $[ADC] = \frac{2}{3} \cdot [ABC] = 24cm^2$. Além disso, como $GC = \frac{3}{4} \cdot AC$, segue que $[GDC] = \frac{3}{4} \cdot [ADC] = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18cm^2$.

d) Em virtude do item anterior, $[GDC] = 18cm^2$. Como E é ponto médio de DC, segue que $[GDE] = [GEC] = 9$. Também temos $GF = \frac{1}{3} \cdot GC$ e daí $[GEF] = \frac{1}{3} \cdot [GEC] = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3cm^2$. Portanto,

$$[GDEC] = [GDE] + [GEF] = 9 + 3 = 12cm^2.$$

130.

a) O triângulo sombreado possui a mesma base e altura que o paralelogramo dado. Portanto, sua área vale $\frac{24}{2} = 12cm^2$.

b) Como $AQ = \frac{AD}{3}$ e $PC = \frac{CD}{2}$, segue que $[ABQ] = \frac{[ABD]}{3}$ e $[BCP] = \frac{[BDC]}{2}$. Portanto, como a diagonal BD divide o paralelogramo em dois triângulos de mesma área, temos

$$\begin{aligned} [BQDP] &= [ABCD] - \frac{[ABD]}{3} - \frac{[BDC]}{2} \\ &= [ABCD] - \frac{[ABCD]}{6} - \frac{[ABCD]}{4} \\ &= 14cm^2 \end{aligned}$$

c) Temos $[BAR] = \frac{2[ABD]}{3} = 8cm^2$ e $[BPC] = \frac{[BDC]}{4} = 3cm^2$. Além disso,

$$[RDQ] = \frac{[AQD]}{3} = \frac{[ACD]}{12} = 1cm^2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} [BPQR] &= [ABCD] - [ABR] - [BPC] - [RQD] \\ &= 24 - 8 - 3 - 1 \\ &= 12cm^2. \end{aligned}$$

d) O paralelogramo $ABCD$ pode ser dividido em três paralelogramos congruentes à $BPSA$. Como sua área vale 24, a área do paralelogramo $PCDS$ vale $16cm^2$. Além disso, $[PQC] = \frac{[PDC]}{3} = \frac{8}{3}$ e $[RQD] = \frac{[SQD]}{2} = 3$. Portanto, teremos que

$$\begin{aligned} [PQRS] &= [PCDS] - [PCQ] - [QDR] \\ &= 16 - \frac{8}{3} - 3 \\ &= \frac{31}{13}. \end{aligned}$$

e) Temos $[ABQ] = \frac{[ABD]}{4} = 3cm^2$ e $[BCP] = \frac{3[BCD]}{4} = 9cm^2$. Além disso,

$$[PQD] = \frac{2[APD]}{3} = 2cm^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} [BPQ] &= [ABCD] - [BCP] - [PDQ] - [ABQ] \\ &= 24 - 9 - 2 - 3 \\ &= 10cm^2. \end{aligned}$$

131. Pelo exercício anterior,

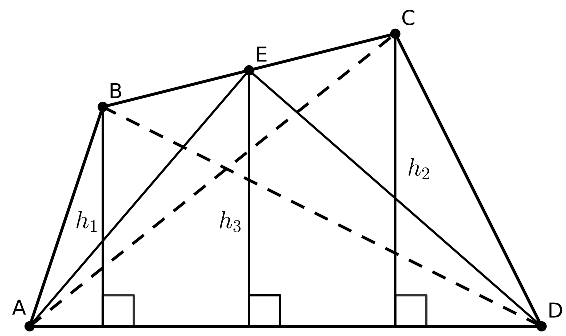
$$\begin{aligned}[PCB] &= \frac{[DCB]}{2}+\frac{[ACB]}{2}\\ &= \frac{6\cdot 4}{4}+\frac{10\cdot 4}{4}\\ &= 6+10\\ &= 16cm^2.\end{aligned}$$

Como Q é o ponto médio de PB, segue que $[PQC] = \dfrac{[PCB]}{2} = 8cm^2$.

132. Pela fórmula de Brahmagupta, sua área é dada por:

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\\ &= \sqrt{(88-39)(88-25)(88-60)(88-52)}\\ &= \sqrt{49\cdot 63\cdot 28\cdot 36}\\ &= 1764.\end{aligned}$$

133. Sejam h_1, h_2 e h_3 as distâncias dos vértices B, E e C ao lado AD, respectivamente.



Como E é ponto médio de BC, temos $h_3 = \dfrac{h_1+h_2}{2}$. Assim

$$\begin{aligned}[EAD] &= \frac{h_3\cdot AD}{2}\\ &= \frac{(h_1+h_2)AD}{4}\\ &= \frac{h_1\cdot AD}{4}+\frac{h_2\cdot AD}{4}\\ &= \frac{[ABD]}{2}+\frac{[ACD]}{2}\\ &= 10+15\\ &= 25.\end{aligned}$$

134.

a) Como $DF = 1$, segue que $DE = DF\cos\beta = \cos\beta$ e $EF = DF \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\beta$. Além disso, dado que $\angle ADE = \alpha$, obtemos $\angle BEF = 90^\circ - \alpha$. Assim, $AE = DE \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ e $EB = EF\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$. Como $\angle FDC = 90^\circ - \alpha - \beta$, segue que $DC = DF\cos(90^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha+\beta)$.

b) Como $AE + EB = AB = DC$, substituindo os valores encontrados no item anterior, obtemos o resultado desejado.

135.

a) Pela fórmula de Heron, temos:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = [ABC] = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Consequentemente, $h_a = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$.

b) Sejam $x = p - b$ e $y = p - c$. Daí, como $(x-y)^2 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ x^2 + 2xy + x^2 &\geq 4xy \\ x + y &\geq 2\sqrt{xy}. \end{aligned}$$

Como $x + y = 2p - b - c = a$, temos

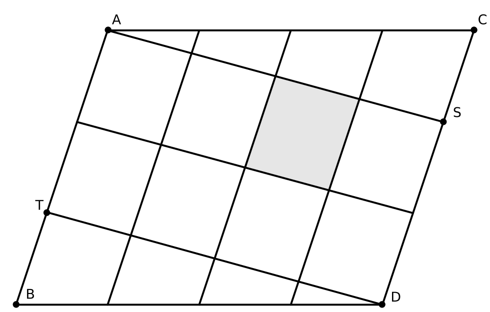
$$\begin{aligned} h_a &= \sqrt{p(p-a)} \cdot \frac{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a} \\ &\leq \sqrt{p(p-a)} \cdot \frac{a}{a} \\ &= \sqrt{p(p-a)}. \end{aligned}$$

Observação: Neste item, demonstramos também a desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica para dois termos:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \text{ se } x, y \geq 0.$$

136. (Extraído da OBM − 2012)

Considerando o paralelogramo $ASDT$, como $AT = \dfrac{2AB}{3}$, temos que a área de $ASDT$ é igual a $\dfrac{2}{3} \cdot 84 = 56$. Este paralelogramo está dividido em oito paralelogramos iguais, sendo que a área sombreada é um destes paralelogramos e, portanto, a área desejada é $\dfrac{1}{8} \cdot 56 = 7$.



137. (Extraído da OBM − 2011)
Seja M o ponto médio de BC. Então, como ABC é isósceles com $AB = AC$ o segmento AM é também altura do triângulo. Logo,

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 4.$$

Como a altura da água é 3, o nível da água é igual a $\dfrac{3}{4}$ da altura do triângulo. Como os triângulos pequenos brancos formados pelos espaços são semelhantes ao triângulo original com a mesma razão de semelhança (raiz quadrada da razão entre as áreas, que é a mesma), a altura h é igual a $\dfrac{3}{4}$ da altura relativa H a B. Sendo a área de ABC igual a $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12cm^2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{AC \cdot H}{2} &= 12 \\ 5H &= 24 \\ H &= \frac{24}{5}. \end{aligned}$$

Portanto, $h = \dfrac{3}{4}H = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{24}{5} = \dfrac{18}{5}$ cm. Resposta D.

138. (Extraído da OBM − 2009)
Trace os segmentos AD e AF. Como $BD = DF = FC$, temos

$$[ABD] = [ADF] = [AFC] = \frac{252}{3}.$$

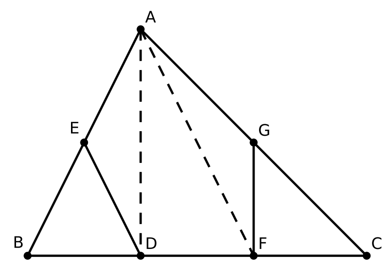
Além disso, como E é ponto médio de AB, obtemos:

$$[BDE] \quad = \quad \frac{[ABD]}{2} = \frac{252}{6}$$

Analogamente, como G é ponto médio de AC, $[GFC] = \frac{252}{6}$. Portanto,

$$[AEDFG] = [ABC] - [BDE] - [GFC] = \frac{2 \cdot 252}{3} = 168.$$

Resposta A.



139. (Extraído da OBM − 2014)
A razão EG/GD pode ser calculada através das razões de áreas:

$$\frac{EG}{GD} = \frac{[EGB]}{[GDB]} = \frac{[EFG]}{[FDG]} = \frac{[EGB] + [EFG]}{[GDB] + [FDG]} = \frac{[EFB]}{[FDB]}.$$

Além disso, temos:

$$\frac{[EFB]}{ABC} = \frac{[EFB]}{CFB} \cdot \frac{[CFB]}{[ABC]} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Analogamente,

$$\frac{[FBD]}{[ABC]} = \frac{1}{9}$$

Portanto

$$\frac{EG}{GD} = \frac{[EFB]}{[ABC]} \cdot \frac{[ABC]}{[FDB]} = \frac{4}{9} \cdot 9 = 4.$$

140. $a)F \quad b)V \quad c)F \quad d)V \quad e)F$

141. Como $2x + 3 = x + 11$, temos $x = 8$. Além disso, $y + 40° = 3y + 20°$ implica que $y = 10°$.

142. $a)x = 80°. \quad b)x = 45°. \quad c)x = 50°. \quad d)x = 60°.$

143.

a) Como $y + 70° + 30° = 180°$, temos $y = 80°$. Além disso, $x + 80° + 60° = 180°$ implica que $x = 40°$.

b) Como $x + x + 30° = 180°$, temos $x = 75°$. Além disso, pelo teorema do ângulo externo, $x = 75° = 20° + y$. Daí, $y = 55°$.

144.

a) obtusângulo, pois $\angle BAC = 100°$.

b) acutângulo, pois $\angle BAC = 85°$.

c) retângulo, pois $\angle BAC = 90°$.

d) acutângulo (e também equilátero), pois $\angle BAC = 60°$.

145. Pelo teorema do ângulo externo, $\angle BOA = 130° - 30° = 100°$. Além disso, $\angle COD = \angle BOA = 100°$, pois são ângulos opostos pelo vértice. Assim, $x + 100° + 40° = 180°$, ou seja, $x = 40°$.

146. Analisando a soma dos ângulos do triângulo $\triangle ABD$, temos $\angle ADB + 20° + 90° = 180°$, ou seja, $\angle ADB = 70°$. Como AD é paralelo a BC, segue que $\angle EBC = 70°$. Finalmente, analisando a soma dos ângulos do triângulo $\triangle BEC$, temos $70° + 60° + x = 180°$. Assim, $x = 50°$.

147. Temos:

i) $2x - 1 = 7$, então $x = 4$.

ii) $x + y = 7$, então $y = 3$.

148.

i) Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFD$, pelo caso LLL;

ii) Os triângulos $\triangle GHI$ e $\triangle JKL$, pelo caso LAL.

149. Como os triângulos $\triangle AED$ e $\triangle CEB$ são congruentes com $CE = ED$ e $\angle ECB = \angle EDA$, então $EB = AE$ e $CB = AD$, ou seja, $y = 7$ e $2x + 5 = 13$. A última igualdade produz $x = 4$.

150. Temos: $a)$ Incentro; $b)$ Ortocentro; $c)$ Baricentro e $d)$ Circuncentro.

151. Como $AB = BC$, temos $5x = 3x + 2$, ou seja, $x = 1$. De $AC = 2AD$, segue que $x + y = 8x$ e consequentemente $y = 7$.

152. Temos: BM é mediana, AE é altura, CD é bissetriz e HM é mediatriz.

153. Se $\angle ACB = 40°$ e $AC = BC$, então $\angle CAB = \angle CBA = 70°$. Assim, $\angle ABD = 180° - 70° - 90° = 20°$.

154. Se $\angle BCA = 30°$, então $\angle BAC = 180° - 90° - 30° = 60°$. Assim, $\angle ABD = 180° - 90° - 60° = 30°$.

155. Como $\angle ACB = 30°$, então $\angle CAB = 60°$ e, por consequência, $\angle ABD = 30°$. Assim, $\angle DBE = 45° - \angle ABD = 15°$.

156. Dividindo os ângulos internos do triângulo em dois ângulos congruentes a α no vértice A, dois congruentes a β no vértice B e dois congruentes a γ no vértice C, tem-se $\alpha + \beta = 70°$, $\alpha + \gamma = 50°$, e $\beta + \gamma = 60°$. Daí, resolvendo o sistema formado por essas equações, $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$ e $\gamma = 20°$. Assim, temos $\angle BAC = 60°$, $\angle CBA = 80°$ e $\angle ACB = 40°$.

157. Como $2x + 6° = 36° + x$, temos $x = 30°$.

158. O triângulo $\triangle ABE$ é isósceles pois $AB = BE$. Seja α o seu ângulo da base. Pelo teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo $\triangle ABE$ com respeito ao ângulo externo $\angle EBD$, temos $\alpha + \alpha = \angle EBD = 60°$. Portanto, $\alpha = 30°$.

159. Temos $7\beta = 70°$ e $2\alpha = 50°$, ou seja, $\beta = 10°$ e $\alpha = 25°$.

160. Pelo caso ALA, $\triangle ODC \equiv \triangle OBE$ e daí $OD = OB = 5cm$. Como o triângulo $\triangle DOB$ é isósceles com ângulo do vértice medindo 60°, temos $\angle ODB = \angle DBO = 60^\circ$ e consequentemente $\triangle ODB$ é equilátero. Assim, $DB = OB = 5cm$.

161.

a) $\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$;

b) Como BE e GD são bissetrizes, $\angle DCB = 20^\circ$ e $\angle DBC = 40^\circ$;

c) Analisando a soma dos ângulos do triângulo $\triangle DBC$, temos $\angle BDC = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ = 120^\circ$.

162. Como BD e AE são medianas e $AD = DE$, tem-se $BE = ED = AD = DC = 8cm$.

163.

a) LAL;

b) LAA_o;

c) LLL;

d) ALA.

164. Como $\triangle CDE$ é isósceles, $\angle DEC = 80^\circ = \angle AEB$, pois são ângulos da base. Assim, como $\angle ABE$ é isósceles, $\alpha = 50^\circ$. De forma análoga, $\beta = 40^\circ$. Portanto, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{4}$.

165. Como $\triangle CEF$ é equilátero, $\angle FCD = 180^\circ = 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$. De forma análoga, $\angle MDC = 55^\circ$. Assim, o ângulo determinado pela intersecção das retas MD e CF é 80°. Portanto, $x = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$.

166. (Extraído da OBM 2011)
Como $\triangle BAD$ e $\triangle AEC$ são isósceles, segue que $\angle BAD = \angle BDA$ e $\angle CAE = \angle CEA$. Tem-se ainda que $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAE - 40^\circ = \angle BDA + \angle CEA - 40^\circ = (180^\circ - 40^\circ) - 40^\circ = 100^\circ$.

167. (Extraído da OBM 2008)
Como $\angle ABC = 110^\circ$, então $\angle AOC = 140^\circ$ e com isso $\angle OAC = 20^\circ$. Por outro lado, $\angle IAC = 10^\circ$. Portanto, $\angle IAO = 30^\circ$.

168. (Extraído da OBM 2006)
Pelo teorema do ângulo externo, $\angle ADE + x = 30^\circ + \angle ABD$, portanto $\angle ADE = \angle AED = 30^\circ + \angle ABD - x$. Além disso, $\angle AED = x + \angle ACD$. Igualando as duas equações e usando que $\angle ABC = \angle ACB$, temos $30^\circ + \angle ABD - x = x + \angle ACD$, ou seja, $x = 15^\circ$.

169. (Extraído da OBM - 2014)
Como P pertence à bissetriz, sua distância do lado AB é a mesma do lado AC. Se a área do $\triangle APB$ é $\frac{3}{2}$, então $\frac{6 \cdot h}{2} = \frac{3}{2}$, obtendo $h = \frac{1}{2}$. Assim a área do $\triangle APC = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

170. (Extraído da OBMEP - 2005)
Como $\triangle ABC$ é isósceles, temos $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$. Como $\triangle BCD$ é isósceles, também temos $\angle BDC = \angle DBC = \alpha$. Se $\angle DCA = \beta$, tem-se, pelo teorema do ângulo externo, que $\alpha = 30^\circ + \beta$. Analisando a soma dos ângulos do $\triangle BCD$, $\alpha + \alpha + \alpha - \beta = 180^\circ$. Assim, pelas duas equações tem-se $2\beta + 90^\circ = 180^\circ$, ou seja, $\beta = 45^\circ$.

171. (Extraído da OBMEP − 2008)
Pelo teorema do ângulo externo e usando que o triângulo $\triangle CAD$ é isósceles, $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA = 2 \cdot \angle CDA = 96°$. Do mesmo modo obtém-se $\angle CBA = 2 \cdot \angle DEA$ e $\angle BAC = 2 \cdot FEA$. Somando as três igualdades,

$$\begin{aligned} 180° &= \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB \\ &= 96° + 2 \cdot \angle DEA + 2 \cdot \angle FEA \\ &= 96° + 2\angle DEF. \end{aligned}$$

Ou seja, $\angle DEF = 42°$.

172. (Extraído da OBM - 2011)
Sejam $\angle BAC = \alpha$ e $\angle BCA = 2\beta$, tem-se $\angle ABC = \alpha + 50°$. Pelo teorema do ângulo externo no triângulo $\triangle DEC$, $\angle AED = 90° + \beta$. Analisando a soma dos ângulos dos triângulos $\triangle ABC$, temos

$$\alpha + (\alpha + 50°) + 2\beta = 180°,$$

ou seja, $\alpha + \beta = 65°$. Finalmente, analisando a soma dos ângulos do triângulo $\triangle EAD$, temos

$$x + \alpha + (90 + \beta) = 180°$$

e consequentemente $x = 90° - (\alpha + \beta) = 25°$.

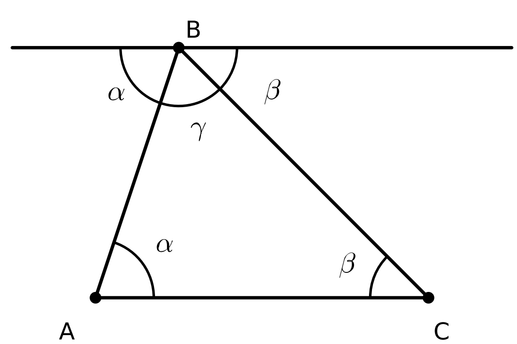
173. (Extraído do Torneio das Cidades)
Seja $\angle CAB = 2\alpha$. Assim, $\angle CBA = 90° - 2\alpha$. Os ângulos da base dos triângulos isósceles $\triangle ACN$ e $\triangle CMB$ valem $90° - \alpha$ e $45° + \alpha$, respectivamente. Assim, $\angle MCN = 180° - \angle CMN - \angle CNM = \alpha + (45° - \alpha) = 45°$.

174. (Extraído da AIME)
Chamando a intersecção entre AF e ED de G e a intersecção de AF e BC de H, temos pelo teorema do ângulo externo que $\angle DGH = E + F$ e $\angle CHG = A + B$. Analisando a soma dos ângulos do quadrilátero $DCHG$, temos $A + B + C + D + E + F = 360$, ou seja, $n = 4$.

175. (Extraído da Olimpíada de Leningrado)
As igualdades fornecidas implicam que os triângulos $\triangle BKC$ e $\triangle CHB$ são congruentes pelo caso LAL. Assim, temos $CK = HB$ e $BK \perp KC$. Consequentemente BK é uma altura e $\triangle ABC$ é isósceles com $AB = BC$. Além disso, $\angle HBC = \angle KCB$ implicando que $AB = AC$. Como os três lados são iguais a AB, o triângulo é equilátero.

176. Pelo vértice B, trace uma reta paralela ao lado AC. Tal reta forma dois pares de ângulos alternos internos de valores α e β. Como a soma dos três ângulos incidentes no vértice B é um ângulo raso, temos:

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$



177. Suponha, por absurdo, que o triângulo $\triangle LNP$ é equilátero. Teremos:

$$\frac{\angle BCA}{2} = 90° - \angle HNC = 30°.$$

Além disso,

$$\angle BMC = \angle LPN - \frac{\angle BCA}{2} = 90°.$$

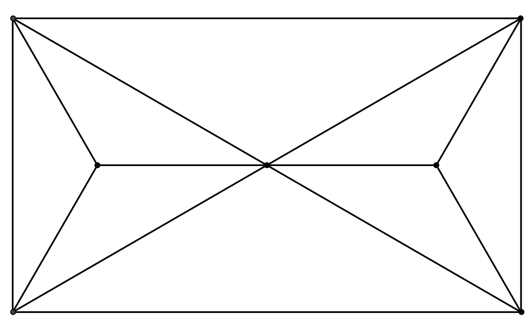
Como BM é altura e mediana, concluímos que $\triangle ABC$ é isósceles. Sendo $\angle BCA = 60°$, podemos concluir que $\triangle ABC$ é de fato equilátero. Nesse caso, BM, CK e AH seriam concorrentes em um mesmo ponto e isso produziria um absurdo pois estamos supondo que L, M e P são distintos.

178. Como B_1C_2 é mediana do triângulo retângulo $\triangle BB_1A$, então $B_1C_2 \equiv C_2A$ e, por consequência, $\angle AB_1C_2 = \angle B_1AC_2 = 30°$ e $\angle B_1C_2A = 120°$. De forma análoga, tem-se $\angle AB_2C_1 = 120°$ e $\angle B_2C_1B = 120°$. Seja P a intersecção entre C_1B_2 e B_1C_2. Analisando a soma dos ângulos do quadrilátero AB_2PC_2, temos $\angle C_2PB_2 = 360° - 30° - 120° - 120° = 90°$, ou seja, B_1C_2 é perpendicular a C_1B_2.

179. (Extraído do Torneio das Cidades)
Supondo $FE > AD$, sem perda de generalidade. Como FD é base média de AC e ED é base média de AB, $AEDF$ é paralelogramo, de diagonais AD e FE, cuja soma de dois vértices consecutivos quaisquer é 180°. Como, por hipótese, $FE > AD$, $\angle FAE > \angle AFD$ e se são suplementares, $\angle FAE > 180°$, ou seja, $\triangle ABC$ é obtusângulo.

180. (Extraído da AIME)
Sejam S a soma dos ângulos nas n "pontas"e R a soma dos outros $2n$ ângulos internos dos triângulos que contêm estas "pontas". O polígono desenhado tem soma dos ângulos externos dado por 360°. Como os ângulos que compõem R são os ângulos externos do polígono contados exatamente duas vezes, temos $R = 2 \cdot 360°$. A soma dos ângulos internos dos n triângulos que contém as pontas vale $180°n$. Assim, $180°n = S + R = S + 720°$ implica que $R = 180°(n-4)$.

181. (Extraído do Torneio das Cidades)
Dessa vez Pinóquio não está mentindo. Abaixo é exibido um exemplo com 8 triângulos possuindo os ângulos 30° e 120°.



182. Seja Z o ponto de interseção do prolongamento de AP e BC. O triângulo $\triangle ABZ$ é isósceles, pois o segmento AP é altura e bissetriz. Logo, $BZ = AB = 6$ e consequentemente $ZC = BC - BZ = 10 - 6 = 4$. Como o triângulo $\triangle ABZ$ é isósceles, BP é altura, bissetriz e mediana. Logo P é o ponto médio de AZ. Como M já é o ponto médio de AC, PM é a base média no triângulo $\triangle AZC$, ou seja, $PM = 2$.

183.
Como $\triangle ABC$ é isósceles e $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = \angle ACB = 75°$. Sejam $\angle PBQ = \beta$, $\angle PBC = \theta$ e E a interseção de BP com QC. Como PD é mediana e altura do $\triangle BPC$, temos $PC = PB$. Assim, os triângulos $\triangle PQB$ e $\triangle PBC$ são isósceles com ângulos das bases β e θ. Pelo teorema do ângulo externo, segue que $\angle EPQ = 2\beta$ e $\angle EPC = 2\theta$. Assim, $\angle QPC = 2\beta + 2\theta = 2\angle QBC = 150°$. Finalmente, como $\triangle QPC$ também é isósceles de base PQ, segue que $\angle PQC = 15°$.

184. Chamando a medida da hipotenusa de a, temos

a)

$$\begin{aligned} a^2 &= 3^2+4^2 \\ a^2 &= 25 \\ a &= 5. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a^2 &= 5^2+12^2 \\ a^2 &= 169 \\ a &= 13. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} a^2 &= 1^2+1^2 \\ a^2 &= 2 \\ a &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} a^2 &= (1/2)^2+(3/2)^2 \\ a^2 &= 10/4 \\ a &= \sqrt{10}/2. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} a^2 &= \sqrt{3}^2+\sqrt{5}^2 \\ a^2 &= 8 \\ a &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

185. Usando as relações métricas no triângulo retângulo, temos que $4^2 = 5 \cdot y$, segue que $y = 16/5$ e, por consequência, $x = 5 - 16/5 = 9/5$.

186. Aplicando as relações métricas no triângulo retângulo, temos $3(k-3) = 4^2$. Segue que $k = 25/3$.

187. Usando as relações métricas no triângulo retângulo, temos, inicialmente, $y^2 = 9 \cdot 16$, segue que $y = 12$. Aplicando agora o Teorema de Pitágoras, temos $x^2 = 16^2 + 12^2$ e $z^2 = 9^2 + 12^2$. Segue que $x = 20$ e $z = 15$.

188. (Extraído da Vídeo Aula)
Inicialmente, traçamos a altura h deste triângulo e obtemos dois triângulos retângulos de hipotenusa medindo l e catetos medindo h e $l/2$. Basta agora aplicar o Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} h^2+(l/2)^2 &= l^2 \\ h^2 &= 3l^2/4 \\ h &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

189. (Extraído da Vídeo Aula)
Traçando uma diagonal no quadrado, dois triângulos retângulos se formam, nos quais seus catetos medem l e sua hipotenusa mede d. Basta agora aplicar o Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} d^2 &= l^2+l^2 \\ d &= l\sqrt{2}. \end{aligned}$$

190. (Extraído da Vídeo Aula)

Chamando os centros das circunferências de E e H e traçando os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BH}$, $\overline{HE}$ e $\overline{HC}$, sendo C o pé do segmento perpendicular a $\overline{AE}$, obtemos a seguinte figura.

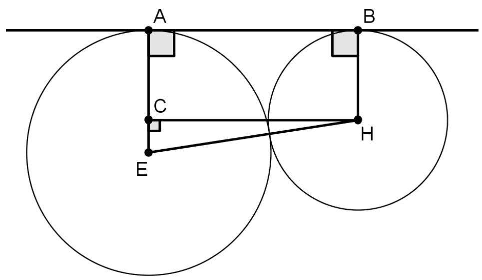


Figura 17

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\begin{aligned} EC^2+HC^2 &= EH^2 \\ (AE-AC)^2+AB^2 &= EH^2 \\ 1+AB^2 &= 5^2 \\ AB &= \sqrt{24} \\ AB &= 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

191. (Extraído da Vídeo Aula)
Traçando a altura BD relativa ao lado $\overline{AC}$, podemos observar que $\angle ABD = 45^o$, segue que $AD = BD$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle ABD$, obtemos $AD = BD = 7$. O triângulo $\triangle BCD$ possui os ângulos internos medindo 30°, 60° e 90°, ou seja, $BC = 2BD = 14$, pois o cateto menor é a metade da hipotenusa em triângulos com estas medidas de ângulos, conforme visto na Vídeo Aula. Aplicando agora o Teorema de Pitágoras no $\triangle BCD$, obtemos $DC = 7\sqrt{3}$. Por fim, o perímetro do triângulo $\triangle ABC = 7 + 7\sqrt{2} + 14 + 7\sqrt{3} = 7(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$.

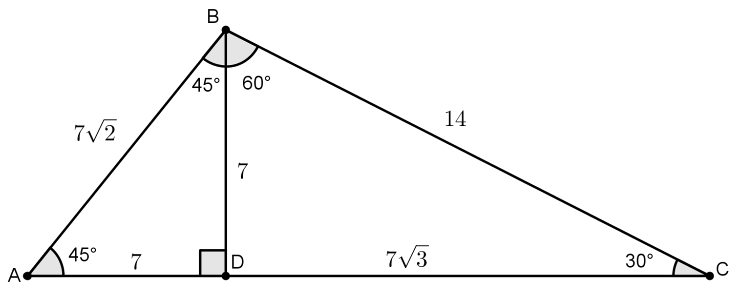


Figura 19

192. (Extraído da Vídeo Aula)
Vamos fazer inicialmente $AE = x$, $O'C = y$ e $AO' = 2r$. Agora, construiremos dois triângulos retângulos utilizando os pontos A, B, D, E e O', conforme a figura abaixo.

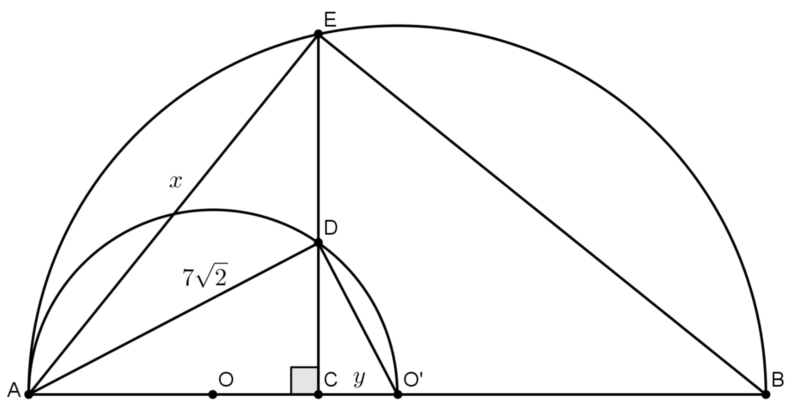


Figura 21

Usando as relações métricas no $\triangle AO'D$, temos $2r(2r - y) = (7\sqrt{2})^2 = 98$ (1). Fazendo o mesmo no $\triangle ABE$, temos $x^2 = 4r(2r - y)$ (2). Dividindo a equação (2) pela equação (1), obtemos $x^2 = 196$, segue que $x = 14$.

193. (Extraído da Vídeo Aula)
Traçando $\overline{BO}$ e $\overline{DO}$, temos o triângulo isósceles $\triangle BDO$, pois $BO = DO = 4 + x$. Traçando agora $\overline{CO}$, obtemos dois triângulos retângulos, $\triangle BCO$ e $\triangle DCO$. Aplicando o Teorema de Pitágoras em um desses triângulos, chegamos a

$$
\begin{aligned}
(4 + x)^2 &= 4^2 + (8 - x)^2 \\
16 + 8x + x^2 &= 16 + 64 - 16x + x^2 \\
24x &= 64 \\
x &= 8/3cm.
\end{aligned}
$$

194. (Extraído da Vídeo Aula)
Marcando o ponto H sobre $\overline{AC}$, tal que $\overline{GH}$ seja perpendicular a $\overline{AC}$. Se $\angle GCH = 60°$ e, por consequência, $\angle CGH = 30°$, então $CH = \dfrac{CG}{2} = \dfrac{x}{2}$ e $GH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. Temos ainda que $\triangle AGH$ e $\triangle AEF$ são semelhantes, o que implica que $\dfrac{GH}{AH} = \dfrac{EF}{AF}$, ou seja, $\dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{1+2\sqrt{3}-\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}$, segue que $CG = x = \dfrac{2+4\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} = 2$.

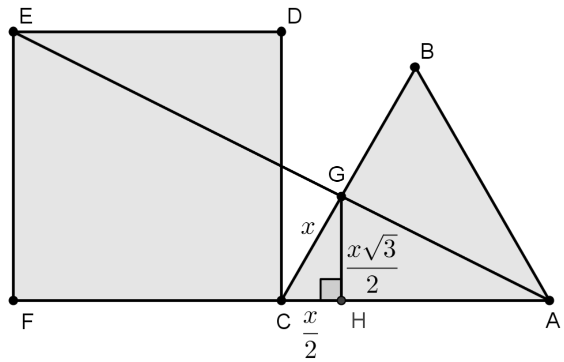


Figura 24

195. (Extraído da Vídeo Aula)
Se $AB = y$, então $AC = y + 6$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos

$$\begin{aligned}(y+6)^2 + y^2 &= 30^2\\ y^2 + 12y + 36 + y^2 &= 900\\ y^2 + 6y - 432 &= 0\\ y &= 18cm.\end{aligned}$$

Tomamos apenas o valor positivo de y. Chamando AD de z, então $CD = 24 - z$. Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, temos $\dfrac{z}{18} = \dfrac{24-z}{30}$, segue que $z = 9$. Usando agora o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, chegamos a $BD = 9\sqrt{5}$cm.

196. (Extraído da OBMEP − 2013)
Sejam r e R, respectivamente, os raios das circunferências menor e maior, e S o centro da circunferência menor. Notamos primeiro que $2r = PB = AB - 4 = 2R - 4$, donde tiramos $R = r + 2$. No triângulo retângulo SOQ temos $SQ = r$, $OQ = OC - 3 = R - 3 = r - 1$ e $OS = OB - SB = R - r = 2$. O Teorema de Pitágoras nos dá $r^2 = (r-1)^2 + 2^2 = r^2 - 2r + 5$ e segue que $2r = 5$, ou seja, $r = 5/2 = 2,5$. Resposta B.

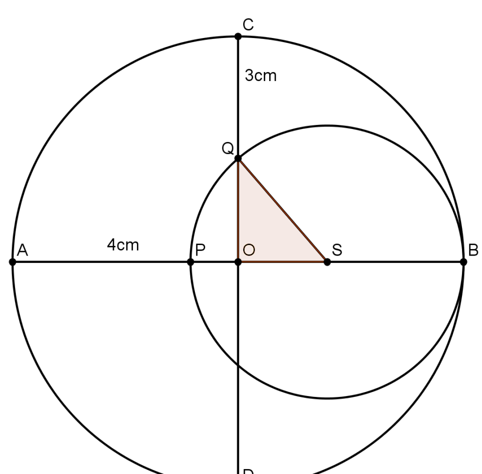


Figura 27

197. (Extraído da OBMEP)
Notamos primeiro que o triângulo PQR é equilátero de lado 2cm. Como o segmento RS também mede 2cm, o triângulo PRS é isósceles de base PS. $\angle PRS$ mede 120°, pois ele é externo ao triângulo PRQ, igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes, cada um medindo 60°. Logo cada um dos ângulos $\angle RSP$ e $\angle RPS$ mede 30°, e concluímos que o triângulo PQS é retângulo em P, com $\angle PQS = 60°$ e $\angle PSQ = 30°$. Logo o triângulo ABC é retângulo em A com $\angle ABC = 60°$ e $\angle ACB = 30°$, pois seus lados são paralelos aos do triângulo PQS. Além disso, seu menor lado é AB, oposto ao menor ângulo $\angle ACB = 30°$. Para calcular o comprimento do lado AB, basta calcular BT, pois claramente $AT = 3$cm. Notamos que o triângulo QBT é retângulo em T. Como BQ é bissetriz de $\angle ABC$, segue que $\angle TBQ = 30°$. Como $QT = 1$cm, segue que $BQ = 2$cm, e o Teorema de Pitágoras nos dá $BT = \sqrt{QB^2 - QT^2} = \sqrt{3}$, donde $AB = 3 + \sqrt{3}$. Resposta B.

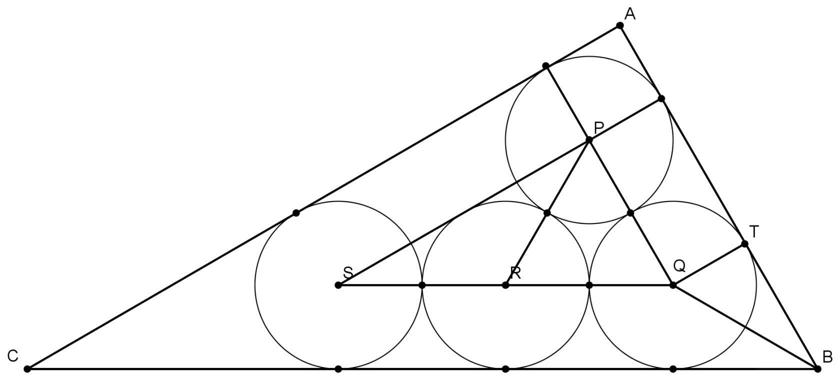


Figura 29

198. (Extraído da OBM − 2013)

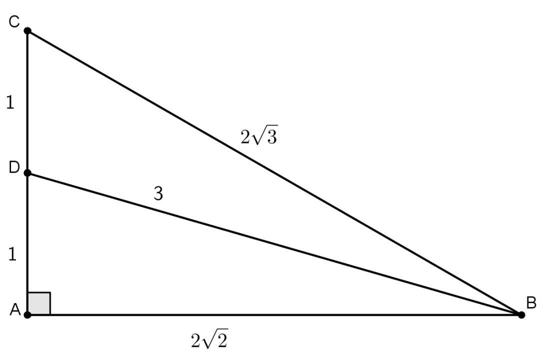


Figura 30

Como $AC = 2$, temos que $AD = DC = 1$. Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo DAB, temos $AB^2 = 3^2 - 1^2 = 8$. Novamente pelo Teorema de Pitágora, agora no triângulo ABC, temos $BC^2 = 2^2 + AB^2 = 12$. Resposta E.

199. (Extraído da OBMEP)

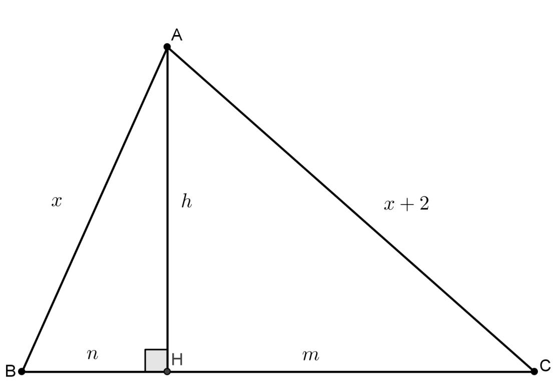


Figura 32

Colocando $AB = x$, temos $BC = x + 1$ e $AC = x + 2$. Seja $AH = h$ a altura relativa a BC. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos AHB e AHC obtemos $n^2 + h^2 = x^2$ e $(x + 2)^2 = m^2 + h^2$. Segue que $h^2 = x^2 - n^2$ e $h^2 = (x + 2)^2 - m^2$, donde $(x + 2)^2 - m^2 = x^2 - n^2$, ou seja, $(x + 2)^2 - x^2 = m^2 - n^2$. Usando a identidade $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, obtemos então $(x + 2 - x)(x + 2 + x) = (m + n)(m - n)$. Como $m + n = x + 1$, segue que $2(2x + 2) = (m + n)(m - n)$, donde $4(x + 1) = (m - n)(x + 1)$. Como $x + 1 \neq 0$ podemos dividir ambos os membros desta última expressão por $x + 1$ e obtemos finalmente $m - n = 4$. Resposta D.

200. (Extraído da OBM − 2012)
Podemos desenhar uma figura que representa a situação do problema:

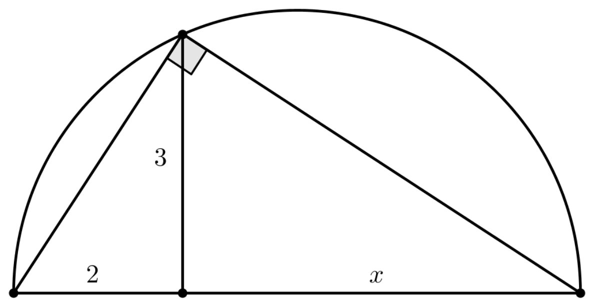


Figura 33

Sabemos que, em um triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa ao ângulo reto é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa (Relações Métricas no Triângulo Retângulo). Portanto, $9 = 2x$, segue que $x = \dfrac{9}{2} = 4,5$. Reposta D.

201. (Extraído da OBM − 2012)

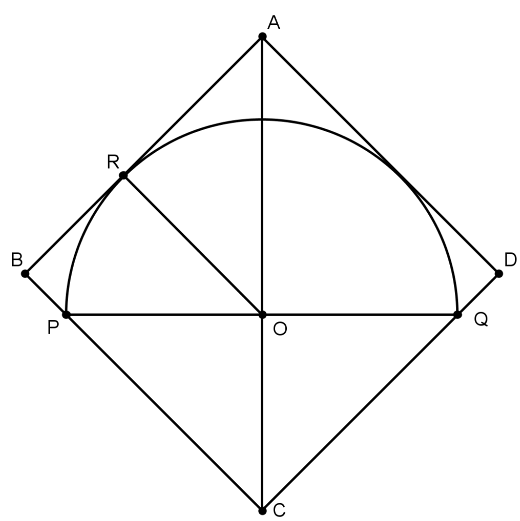


Figura 35

Seja O o centro da semicircunferência descrita no enunciado, P e Q os pontos como na figura e R o ponto de tangência da semicircunferência com o lado AB. Temos que $OR = 1$ e $OR \perp AB$. Como O está na diagonal AC, temos que $\angle OAB = 45^\circ$. Assim, $OA = OR\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Além disso, OC é altura e mediana relativa à hipotenusa no triângulo retângulo PQC, cuja hipotenusa é 2. Assim, $OC = 1$. Portanto, a diagonal do quadrado vale $1 = \sqrt{2}$ e daí sua área é $\dfrac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{2})^2 = \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$. Resposta A.

202.

a) Sim, pois $\angle BAC \equiv \angle DAE$ e $\angle CBA = \angle EDA = 90^o$ (caso Ângulo-Ângulo).

b) Os lados homólogos são: $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$; $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$; e $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$.

c) Como $\angle KLM = \angle QPM = 53^o$ e $\angle KML \equiv \angle QMP$ (opostos pelo vértice), então $\triangle KLM \simeq \triangle MPQ$, pelo caso AA.

203. Como $\dfrac{20}{10} = \dfrac{14}{7} = \dfrac{12}{6} = 2$, a razão de semelhança é 2 ou $\dfrac{10}{20} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{6}{12} = 1/2$.

204. O triângulo formado por João e sua sombra e o triângulo formado pelo poste e sombra do mesmo são semelhantes. Usando a razão de semelhança, temos

$$\begin{aligned}\frac{1,6}{2} &= \frac{x}{7}\\ 2x &= 11,2\\ x &= 5,6.\end{aligned}$$

Assim, a altura do poste é 5,6m.

205. Como $MNPQ$ é um quadrado, então $\overline{PQ}//\overline{MN}//\overline{BC}$, o que implica que $\triangle ABC\ \triangle APQ$. Chamando o lado do quadrado de x e aplicando a razão de semelhança, temos

$$\begin{aligned}\frac{12}{8} &= \frac{x}{8-x}\\ 8x &= 96-12x\\ x &= \frac{24}{5}.\end{aligned}$$

206. Traçando raios ligando os centros das circunferências aos pontos de tangências, obtemos a figura abaixo.

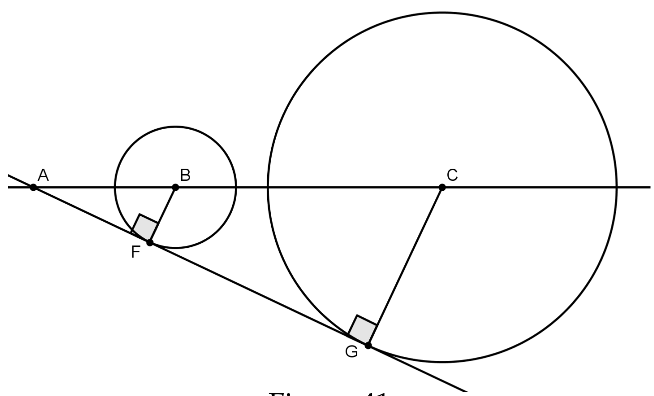


Figura 41

Perceba que $\triangle ABF\ \triangle ACG$. Chamando a distância entre os centros de x e aplicando a razão de semelhança, temos

$$\begin{aligned}\frac{7}{3} &= \frac{7+x}{5}\\ 21+3x &= 35\\ x &= \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

207. (Extraído da Vídeo Aula)
Como $\angle ECD \equiv \angle ACB$ e $\angle ABC = \angle EDC = 90^o$, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EDC$ são semelhantes. Aplicando a razão de semelhança, temos:

$$\begin{aligned}\frac{20}{15} &= \frac{15}{DE}\\ 20DE &= 225\\ DE &= \frac{45}{4}.\end{aligned}$$

208. (Extraído da Vídeo Aula)
Como os triângulos $\triangle CED$ e $\triangle DFB$ são semelhantes, pois $\angle CED = \angle DFB = 90^o$ e $\angle CDE \equiv \angle DBF$, vamos aplicar a razão de semelhança, chamando o lado do quadrado de x. Temos então

$$\begin{aligned}\frac{4-x}{x} &= \frac{x}{6-x}\\ x^2 &= 24-10x+x^2\\ x &= \frac{12}{5}.\end{aligned}$$

Assim, temos que o perímetro do quadrado $AEDF$ é $\dfrac{48}{5}$.

209. (Extraído da Vídeo Aula)
Fazendo $EF = x$, $FB = y$, temos $FM = 10 - y$. Podemos observar a semelhança dos triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle FEB$, além dos triângulos $\triangle CBM$ e $\triangle EFM$. Aplicando a razão de semelhança em ambos os casos, obtemos o sistema $\begin{cases} \dfrac{y}{20} = \dfrac{x}{12} \\ \dfrac{10-y}{10} = \dfrac{x}{12} \end{cases}$

Simplificando, chegamos ao sistema equivalente $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 5x + 6y = 60 \end{cases}$

Segue que $EF = x = 4$.

210. (Extraído da Vídeo Aula) Nomeando alguns pontos importantes, obtemos a figura abaixo.

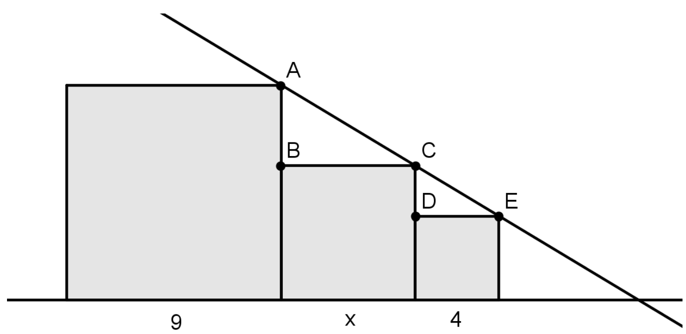


Figura 46

Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDE$ são semelhantes, vamos aplicar a razão de semelhança.

$$\begin{aligned}\frac{AB}{CD} &= \frac{BC}{DE}\\ \frac{9-x}{x-4} &= \frac{x}{4}\\ x^2-4x &= 36-4x\\ x^2 &= 36\\ x_1 &= -6\\ x_2 &= 6.\end{aligned}$$

Como trata-se de comprimento de segmento, temos, como solução, apenas $x = 6$.

211. (Extraído da Vídeo Aula)

Traçando o diâmetro $\overline{AD}$ e, em seguida, $\overline{DC}$, obtemos a figura abaixo.

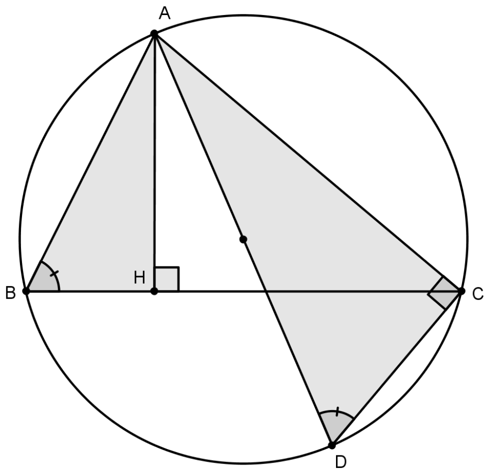


Figura 48

Como $\angle ABH \equiv \angle ABH$ e $\angle ADC$ são ângulos inscritos que "olham" para o mesmo arco, então eles são congruentes. Além disso, $\angle ACD = \angle AHB = 90^o$ e, portanto, $\triangle ACD\ \triangle AHB$. Aplicando a razão de semelhança e chamando a medida do raio de r, temos

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AB} &= \frac{AC}{AH} \\ \frac{2r}{10} &= \frac{12}{4} \\ 8r &= 120 \\ r &= 15. \end{aligned}$$

212. (Extraído da Vídeo Aula)

Traçando um raio de M até o ponto de tangência entre $\overline{HB}$ e a semicircunferência e chamando-o de D, temos $\triangle ABH\ \triangle MBD$, segue que $AH = 2r$, sendo r a medida do raio, pois M é ponto médio e MD é base média. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $\triangle BHA$ e $\triangle ABH$, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} HB^2 + (10 - 2r)^2 = 10^2 \\ \\ HB^2 + (2r)^2 = 6^2 \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtemos $r = 9/10$cm.

213. (Extraído da Vídeo Aula)

Traçando os segmentos BN e PK, sendo este perpendicular a $\overline{AD}$, temos os triângulos retângulos $\triangle ABN$ e $\triangle AKP$, que são semelhantes. Observe a figura.

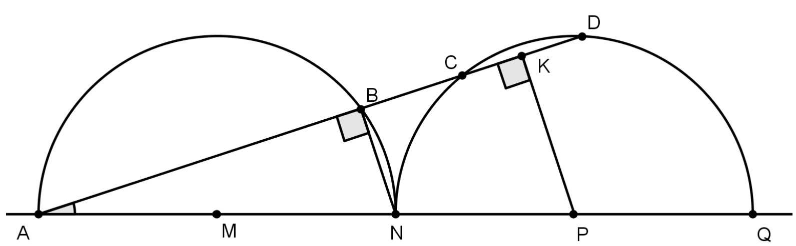


Figura 51

Fazendo $BC = CD = 2x$, temos $CK = KD = x$, pois K é ponto médio. Como $\triangle ABN\ \triangle AKP$, temos a seguinte razão de semelhança.

$$\begin{aligned} \frac{AP}{AN} &= \frac{AK}{AB} \\ \frac{3AM}{2AM} &= \frac{36 - x}{36 - 4x} \\ 72 - 2x &= 108 - 12x \\ x &= 18/5. \end{aligned}$$

Concluímos que $CD = 36/5$.

214. (Extraído da Vídeo Aula)
Como $\overline{DE}//\overline{AC}$, então $\angle DEB = \angle ACB = 2\alpha$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, $\angle CDE = \alpha$ e, por consequência, $\overline{CE} \equiv \overline{DE}$, pois $\triangle CDE$ é isósceles. Como $\overline{DE}//\overline{AC}$, temos, pelo Teorema de Tales, que $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{CE}{EB}$ (1). Além disso, pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{BC}$ (2). Por (1) e (2), temos $DE = \dfrac{mn}{m+n}$.

215. (Extraído da OBM − 2014)
Pelos pontos E e D, respectivamente, trace paralelas ao lado AC, determinando os pontos H e I sobre o segmento FB. Seja $AB = 3x$. Temos $\triangle EHB$ $\triangle CFB$ e $\triangle IDB$ $\triangle FAB$, daí: $\dfrac{HE}{2x} = \dfrac{HE}{FC} = \dfrac{EB}{BC} = \dfrac{2x}{3x}$ e $\dfrac{ID}{x} = \dfrac{ID}{FA} = \dfrac{DB}{AB} = \dfrac{x}{3x}$. Portanto, $HE = 4x/3$ e $ID = x/3$. Como $\triangle GID$ $\triangle HGE$, segue que: $\dfrac{EG}{GD} = \dfrac{HE}{ID} = \dfrac{4x/3}{x/3} = 4$.

216. (Extraído da OBM − 2013)
Trace a diagonal $\overline{AC}$ que intersecta $\overline{DB}$ no ponto O. Sendo $ABCD$ um quadrado, O é o centro da circunferência. Observe que $\angle CMA = 90^o$ e $\angle POA = \angle DOA = 90^o$. Logo, pelo caso AA, os triângulos AOP e AMC são semelhantes e, portanto, $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AO}{AM}$, é equivalente a $\dfrac{AP}{60} = \dfrac{30}{50}$, ou seja, $AP = 36$.

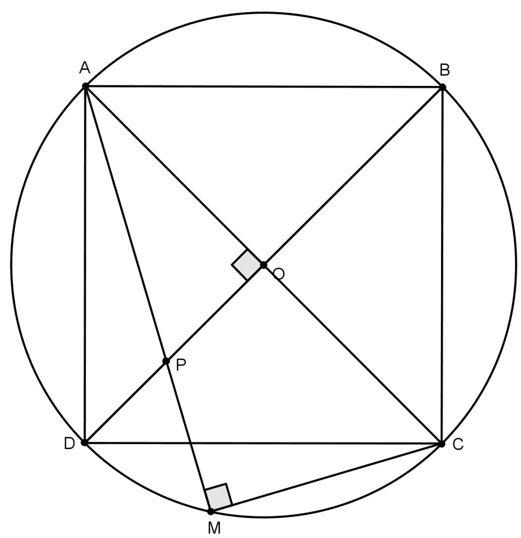


Figura 55