Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Curso de Combinatória – Nível 2

Aula 0

Professores: Cleber Assis, Samuel Barbosa e Tiago Miranda

POTI 2015

Curso Básico

Combinatória

Este material compila os arquivos do projeto Portal da Matemática, disponível em

`http://matematica.obmep.org.br/`

e serve como introdução aos tópicos iniciais de um curso de treinamento olímpico. Em geral, os assuntos são independentes e podem ser estudados em qualquer ordem. Neles, o leitor encontrará muitos exercícios escolares mesclados com problemas elementares de olimpíadas, todos com respostas e soluções. Além disso, no endereço do Portal da Matemática, existem vídeos que podem ser acessados gratuitamente cobrindo todo o conteúdo abaixo. Bons estudos!

Sumário

Versão: 227 (Data: 27 de abril de 2015.)

1 Números Naturais e Problemas de Contagem

Problema 1. Qual a quantidade de elementos do conjunto que possui todos os números naturais de 8 até 908?

Problema 2. Quantos elementos há no conjunto $\{7, 14, 21, \ldots, 679, 686\}$?

Problema 3. Quantos elementos há no conjunto $\{14, 19, 24, \ldots, 1004, 1009\}$?

Problema 4. Entre n pessoas existem duas com o mesmo signo. Qual o menor valor de n que garante esse fato?

Problema 5. Quantos números escrevemos ao numerarmos as páginas de um livro de 10 até 20? E quantos algarismos são usados para isso?

Problema 6. Uma pessoa entrou num quarto escuro, sem enxergar absolutamente nada, e abriu uma gaveta na qual havia exatamente 20 meias pretas, 15 meias brancas e 10 meias marrons. Todas estavam misturados e eram indistinguíveis ao tato. Qual a quantidade mínima de meias que essa pessoa deve retirar para que tenha certeza de ter retirado:

a) um par de meias de mesma cor?

b) um par de meias brancas?

Problema 7. Prove que:

a) a soma de dois números pares é igual a um número par.

b) a soma de dois números ímpares resulta em um número par.

c) a soma de um número par com um número ímpar resulta em um número ímpar.

d) o produto de dois números ímpares é igual a um número ímpar.

e) o produto de dois números pares é um número par.

f) o produto de um número par com um número ímpar resulta em um número par.

Problema 8. Ao escrevermos todos os números naturais de 40 até 1200, quantos algarismos utilizamos?

Problema 9. Qual é a soma de todos os números de três algarismos?

Problema 10. Qual o número mínimo necessário de pessoas num grupo para que tenhamos certeza de que:

a) três delas façam aniversário no mesmo mês?

b) quatro tenham nascido no mesmo dia da semana?

Problema 11. Numa gaveta há 10 blusas amarelas, 12 blusas beges e 8 blusas cinzas. Suponha que sejam retiradas "n" blusas, no escuro, dessa gaveta (não há como perceber as cores). Qual o valor mínimo de "n" para que tenhamos certeza de que saiam 3 de cores distintas?

Problema 12. Discos dentados geram um tipo de sistema associado que funciona pela propulsão em um dos discos e esse proporciona o funcionamento dos demais. A figura 1 ilustra um desses sistemas e o disco "número 1" gira no sentido horário. Analise as proposições e responda o que se pede.

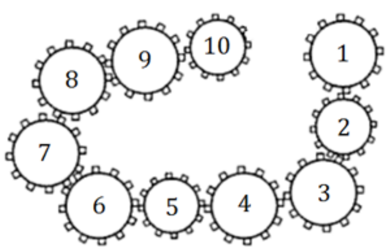


Figura 1

i) O disco 2 gira no sentido anti-horário.

ii) O disco 4 gira no sentido horário.

iii) O disco 7 gira no mesmo sentido do disco 5.

iv) O disco 10 gira no mesmo sentido do disco 3.

v) Seria possível colocar um disco 11 em contato simultâneo com os discos 1 e 10.

Quantas das proposições acima são verdadeiras?

Problema 13. Se uma urna contém 7 bolas vermelhas, 9 pretas, 10 azuis e 8 verdes. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar para que possamos ter certeza da retirada de pelo menos 4 da mesma cor?

Problema 14. Considere o número

$$S = 1 + 2 + 3 + +4 + \cdots + 2011 + 2012 + 2013 + 2014.$$

Esse número é par ou ímpar?

Problema 15. Escrevendo os números naturais de 1 até 10 em fila e mantendo um espaço vazio entre eles ($\square$) obtemos

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 \square 10.$$

É possível ocupar os $\square$ com sinais de "+" ou "−" de modo que o resultado da expressão que aparecerá após a colocação dos sinais seja **zero**?

Problema 16. Em uma urna há 32 bolas brancas, 16 bolas verdes, 7 bolas vermelhas, 3 bolas pretas e 11 bolas cinzas. Qual é o número mínimo de bolas que devemos sacar dessa urna para termos certeza de que obteremos pelo menos 13 bolas da mesma cor?

Problema 17. Se n é um número inteiro qualquer, qual das expressões abaixo resulta num número ímpar?

a) $n^2 - n + 2$

b) $n^2 + n + 2$

c) $n^2 + n + 5$

d) $n^2 + 5$

e) $n^3 + 5$

Problema 18. Qual a paridade do algarismo das unidades do número

$$2010^{2010} + 2011^{2011} + 2012^{2012} + \cdots + 2015^{2015} + 2016^{2016}?$$

Problema 19. Qual o menor número de pessoas num grupo para garantir que pelo menos 4 nasceram no mesmo mês?

Problema 20. Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores distintas, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda, uma bola é expelida ao acaso. Para garantir a retirada de 4 bolas da mesma cor, qual o menor número de moedas inseridas na máquina?

Problema 21. Observe a sequência de algarismos

$$1234567891012131415161 7\ldots.$$

Qual será o 1002° algarismo usado nela?

Problema 22. Depois de d lançamentos de um dado de 6 faces temos certeza que uma das faces saiu mais de 5 vezes. Qual o valor de d?

Problema 23. Qual a soma dos múltiplos de 3 entre 1 e 301?

Problema 24. Quais são os pares de números inteiros (x, y) tais que $\dfrac{xy}{x+y} = 144$?

Problema 25. Quantos números inteiros e positivos satisfazem a dupla inequação

$$2000 < \sqrt{n \cdot (n-1)} < 2005?$$

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Problema 26. Observe que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

daí poderíamos calcular

$$\begin{aligned}
2^3 &= (1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3\\
3^3 &= (2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1^3\\
4^3 &= (3+1)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1^2 + 1^3\\
5^3 &= (4+1)^3 = 4^3 + 3\cdot 4^2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1^2 + 1^3
\end{aligned}$$

A partir da análise dos exemplos acima, desenvolva uma fórmula para o cálculo de

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Problema 27. A figura 2 é o composta por 100 quadrados colocados lado a lado, na qual tem-se indicadas as medidas dos lados de cada quadrado.

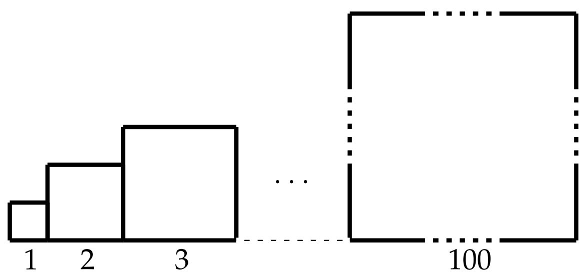


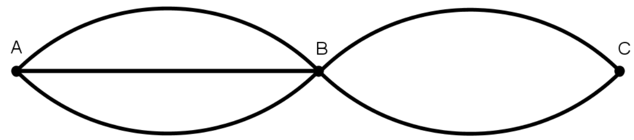
Figura 2

Qual o valor da área total dessa figura?

Problema 28. Uma rede de computadores é formada por seis computadores. Cada computador é conectado diretamente a pelo menos um dos outros computadores. Mostre que há pelo menos dois computadores na rede que estão diretamente conectados ao mesmo número de outros computadores.

2 Princípio Fundamental da Contagem

Problema 29. Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.



a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?

b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?

c) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e depois voltar para A sem repetir estradas e novamente passando por B?

Problema 30. Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pinturas estão indicadas abaixo:
Primeira: verde, amarelo, bege, verde, cinza;
Segunda: verde, cinza, verde, bege, cinza.
Quantas são as possibilidades?

Problema 31. Em um computador digital, um bit é um dos algarismos 0 ou 1 e uma palavra é uma sucessão de bits. Por exemplo, todas as possíveis palavras de dois bits são: 00, 01, 10, 11. Qual é o número de palavras distintas de 32 bits?

Problema 32. De quantas formas se pode dispor quatro pessoas em fila indiana?

Problema 33. Quantos são os números de 3 algarismos distintos?

Problema 34. Quantos são os números de 4 algarismos formados apenas por algarismos pares?

Problema 35. Em uma competição de atletismo, participam 8 corredores. De quantas maneiras diferentes pode ser composto o pódium com os três primeiros colocados?

Problema 36. De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 6 cadeiras alinhadas?

Problema 37. Uma prova possui dez questões do tipo múltipla escolha, com cinco alternativas cada. De quantas maneiras diferentes é possível responder esta prova, marcando todas as dez respostas?

Problema 38. As placas de veículos são compostas por 3 letras e 4 algarismos. Qual é o total de placas diferentes que podem existir?

Problema 39. Dispondo dos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, pode-se formar quantos números

a) de quatro algarismos?

b) de quatro algarismos distintos?

c) ímpares de três algarismos distintos?

Problema 40. Dispondo dos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, quantos números pares de quatro algarismos distintos podem ser formados?

Problema 41. Um automóvel comporta dois passageiros nos bancos da frente e três no banco traseiro. Qualquer uma das 7 pessoas, dentre elas Pedro que tem 5 anos de idade e portanto não pode sentar na parte da frente do carro, pode ser escolhida para entrar no automóvel. Calcule o número de maneiras distintas de lotar este automóvel.

Problema 42. As letras em código Morse são formadas por sequências de traços (−) e pontos (·), sendo permitida repetições. Por exemplo (−)(−)(−)(·). Quantas letras podem ser representadas usando:

a) exatamente 3 símbolos?

b) usando no máximo 8 símbolos?

Problema 43. Vai ser formada uma fila com 6 pessoas, dentre as quais Pedro e Ana. De quantas maneiras esta fila poderá ser formada se:

a) Ana deve ser a primeira da fila?

b) Ana ou Pedro devem ser o primeiro da fila?

c) Ana e Pedro não devem ficar juntos na fila?

Problema 44. João escreveu todos os números de 4 dígitos contendo cada um dos algarismos de 1 até 4 exatamente uma vez. Em quantos desses números a soma dos dois últimos dígitos é maior que a soma dos dois primeiros?

a) 8. b) 12. c) 4. d) 16. e) 2.

Problema 45. Quantos são os números ímpares, de cinco algarismos, nos quais a soma dos algarismos das unidades e das dezenas é 16 e a soma de todos os algarismos é um múltiplo de 5?

a) 90. b) 180. c) 216. d) 360. e) 532.

Problema 46. Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às $9h$, $10h$ e $11h$ e de segunda a sexta às $17h$ e $18h$. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?

a) 96. b) 102. c) 126. d) 144. e) 180.

Problema 47. Bitonho está jogando em seu computador o Super Paciência, cujo objetivo é preencher um tabuleiro 2×2014 com algarismos 0's e 1's de modo que dois números vizinhos iguais em uma mesma linha impedem que se preencha também com números iguais as casas correspondentes da outra linha. Por exemplo, no desenho abaixo, os valores de A e B não podem ser iguais.

0	1	0	...	1	1	...
1	1	0	...	A	B	...

Determine o número de possíveis preenchimentos distintos de tal tabuleiro seguindo as regras do Super Paciência.

3 Permutação Simples

Problema 48. De quantas formas se pode dispor quatro pessoas em fila indiana?

Problema 49. Quantos são os anagramas da palavra MATRIZ?

Problema 50. Luiz precisa trocar a lâmpada da sala, lavar a louça, estudar para a prova de matemática e arrumar seu quarto. De quantas maneiras diferentes ele pode executar essa sequência de atividades?

Problema 51. Com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5$, quantos números de 5 algarismos podemos formar, sem repeti-los?

Problema 52. Escreva todos os anagramas com as letras da palavra BOLA que começam com a letra L.

Problema 53. Considerando a palavra MATRIZ, determine o número de anagramas que:

a) começam por MA.

b) tenham as letras M e A juntas, nessa ordem.

c) tenhas as letras M e A juntas.

Problema 54. Considere a palavra CONTAGEM. Determine o número de anagramas que

a) começam com A e terminam com E.

b) começam com A ou terminam com E.

c) começam e terminam com vogal.

d) têm a letra T antes da letra M (por exemplo, a própria palavra CONTAGEM).

Problema 55. Em quantos anagramas da palavra QUEIJO as vogais não aparecem todas juntas?

Problema 56. De quantas maneiras três homens e três mulheres podem ficar em fila, de modo que os homens fiquem intercalados pelas mulheres?

Problema 57. Três ingleses, quatro americanos e cinco franceses serão dispostos em fila (dispostos em linha reta) de modo que pessoas de mesma nacionalidade estejam sempre juntas. De quantas maneiras distintas a fila poderá ser formada de modo que o primeiro da fila seja um francês?

Problema 58. O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito no computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e em nenhum deles aparecem dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver o número 75913 é

a) 24. b) 31. c) 32. d) 88. e) 89.

Problema 59. Com os algarismos $2, 3, 4, 5, 6$ formam-se todos os números de 5 algarismos distintos. Determine a soma de todos eles.

Problema 60. Uma lotação possui três bancos para passageiros, cada um com três lugares, e deve transportar os três membros da família SOUZA, o casal LÚCIA e MAURO e mais quatro pessoas. Além disso, a família SOUZA quer ocupar um mesmo banco e LÚCIA e MAURO querem sentar-se lado a lado. Nessas condições, o número de maneiras de se dispor as nove pessoas na lotação é igual a

a) 928. b) 1152. c) 1828. d) 2412. e) 3456.

Problema 61. Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144. b) 180. c) 240. d) 288. e) 360.

Problema 62. Dos anagramas da palavra CASTELO, quantos têm as vogais em ordem alfabética e juntas?

a) 180.
b) 144.
c) 120.
d) 720.
e) 360.

Problema 63.

a) Mostre uma maneira de separar todos os números de 1 a 16 em quatro conjuntos com quatro números cada, de modo que cada conjunto tenha mesma soma.

b) Mostre que existem pelo menos 1024 maneiras de escrever os números de 1 até 16 em cada uma das casinhas de um tabuleiro 4×4 de modo que a soma dos números de cada linha seja igual.

4 Combinações

Problema 64. Numa sala há 6 pessoas e cada uma cumprimenta todas as outras pessoas com um único aperto de mão. Quantos foram os apertos de mão?

Problema 65. De quantas formas podemos escolher 2 pessoas, de um grupo de 5, para uma viagem?

Problema 66. Dispondo de 6 frutas, quantas vitaminas podemos fazer utilizando exatamente três destas frutas?

Problema 67. Quantos drinks podem ser feitos com três bebidas, se dispomos de cinco tipos de bebidas?

Problema 68. São dados 10 pontos no plano, de maneira que não existe reta que contenha mais de dois destes pontos.

a) Qual o número de retas que contém dois destes pontos?

b) Quantos triângulos podem ser desenhados, cujos vértices são três destes pontos?

c) Quantos heptágonos podem ser desenhados, cujos vértices são sete destes pontos?

Problema 69. Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Quantos são os subconjuntos com apenas

a) 2 elementos?

b) 4 elementos?

Problema 70. Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?

Problema 71. Num torneio com 6 times, cada time joga com cada um dos outros uma única vez. Quantos são os jogos?

Problema 72. O volante da Mega-Sena contém 60 números (cada um chamado de dezena), que são $01, 02, 03, ..., 60$. O resultado de um sorteio é composto de 6 dezenas, sorteadas entre as 60 dezenas.

a) Quantos são os resultados possíveis?

b) Quantos resultados são formados por 4 números pares e 2 números ímpares?

c) Quantos são os resultados contendo o número 13?

Problema 73. Em grupo de 14 pessoas, existem 5 médicos, 6 advogados e 3 engenheiros. Quantas comissões de 7 pessoas podem ser formadas, cada qual constituída de 3 médicos, 2 advogados e 2 engenheiros?

Problema 74. Em um grupo de 10 pessoas, das quais figuram Ana, Beatriz, Carla e Daniela. Quantas comissões com cinco pessoas podemos formar

a) ao todo?

b) nas quais figura Ana, mas não Beatriz?

c) nas quais figuram Ana ou Beatriz ou Carla ou Daniela, mas nunca as quatro juntas?

Problema 75. Sejam os vértices de um octógono regular.

a) Quantos triângulos podemos obter unindo três destes vértices?

b) Destes triângulos, quantos são retângulos?

Problema 76. Quantas são as diagonais de um decágono convexo?

Problema 77. Em tabuleiro de xadrez (8 x 8), quantos retângulos podemos desenhar cujos lados estão sobre as linhas deste tabuleiro?

Problema 78. Dadas duas retas paralelas r e s. Sobre r tomam-se 5 pontos e sobre s tomam-se 4 pontos. Quantos triângulos podemos formar com vértices em 3 desses 9 pontos?

Problema 79. De um pelotão de 10 soldados, quantas equipes de cinco soldados podem ser formadas se em cada equipe um soldado é destacado como líder?

Problema 80. Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro COMBINATÓRIA É FÁCIL e 5 exemplares do livro COMBINATÓRIA NÃO É DIFÍCIL. Considere que os livros de mesmo título sejam indistinguíveis. Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que dois exemplares de COMBINATÓRIA NÃO É DIFÍCIL nunca estejam juntos.

Problema 81. Em todos os 53 finais de semana do ano 2000, Júlia irá convidar duas de suas amigas para sua casa em Teresópolis, sendo que nunca o mesmo par de amigas se repetirá durante o ano.

a) Determine o maior número possível de amigas que Júlia poderá convidar.

b) Determine o menor número possível de amigas que Júlia poderá convidar.

Problema 82. De quantas maneiras podem ser escolhidos três números naturais distintos, de 1 a 30, de modo que sua soma seja par?

Problema 83. O número 2568 possui dígitos em ordem crescente. Os números 5667 e 3769 não possuem dígitos em ordem crescente. Quantos são os números naturais entre 1000 e 9999 que possuem seus dígitos em ordem crescente?

Problema 84. Led, um famoso herói de jogos, tem um novo desafio: abrir o portal do dragão. O portal possui 10 cadeados distintos. Para o portal ser aberto, o herói deve possuir pelo menos uma chave para cada cadeado. Para conseguir as chaves dos cadeados, Led deve abrir caixas espalhadas pelo jogo. Existem 45 caixas em tal jogo e cada uma delas contém duas chaves distintas. Além disso, cada chave abre exatamente um dos 10 cadeados, duas chaves de uma mesma caixa abrem cadeados diferentes e não existem duas caixas tais que suas chaves abrem exatamente os mesmos dois cadeados. Qual o número mínimo de caixas que Led deve abrir para garantir a posse de 10 chaves distintas e assim abrir o portal?

5 Permutação com Repetição (com Elementos nem Todos Distintos)

Problema 85. Quais são os anagramas que se pode formar com as letras da palavra CASA?

Problema 86. Quantos são os anagramas que se pode formar com as letras da palavra CASA?

Problema 87. Quantos são os anagramas que se pode formar com as letras da palavra ARARA?

Problema 88. Com dois algarismos 1, dois algarismos 2 e três algarismos 3, quantos números de sete algarismos podem ser formados?

Problema 89. Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra ARQUIMEDES que

a) começam e terminam com a letra E?

b) não possuem vogais nem consoantes consecutivas?

Problema 90. Quantos são os anagramas da palavra BANANADA que começam com consoante?

Problema 91. Quantos são os anagramas que se pode formar com as letras da palavra BATATA nos quais

a) as vogais estejam sempre juntas?

b) vogais e consoantes estejam intercaladas?

c) a letra B esteja sempre entre as letras T? (não necessariamente consecutivas)

Problema 92. De quantas maneiras podemos alinhar 8 moedas sobre uma mesa, sendo 4 de $R\$0,25$ e 4 de $R\$0,50$?

Problema 93. Quinze pessoas, sendo 5 homens de alturas diferentes e 10 mulheres também de alturas diferentes, devem ser dispostas em fila, obedecendo ao critério: homens em ordem crescente de altura e mulheres em ordem decrescente de altura. De quantos modos diferentes essas 15 pessoas podem ser dispostas na fila?

Problema 94. Uma partícula desloca-se sobre uma reta, percorrendo $1cm$ para a esquerda ou para a direita a cada movimento. Calcule de quantas maneiras diferentes a partícula pode realizar uma sequência de 10 movimentos terminados na posição de partida.

Problema 95. De quantas maneiras diferentes um professor pode premiar cinco alunos com três bombons exatamente iguais? (um aluno pode receber mais de um bombom)

Problema 96. Quantas soluções compostas apenas por números naturais possui a equação $x + y + z = 7$?

Problema 97. Quantas soluções compostas apenas por números inteiros positivos possui a equação $x + y + z = 7$?

Problema 98. Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que a meia tem que ser colocada antes do sapato?

6 Permutações Circulares

Problema 99. Dois colares de pérolas serão considerados iguais se um deles puder ser obtido através de uma rotação do outro, como ilustra a figura 3.

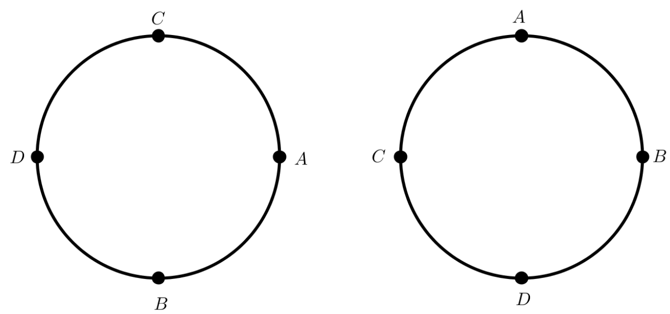


Figura 3: Colares Iguais.

De quantas formas 4 pérolas distintas (A, B, C e D) podem ser usadas para formar um colar circular?

Problema 100. Um grupo de 6 pessoas, incluindo Nilton e Lucimar, decide jogar cartas com rodadas circulares. Após a jogada de um jogador, o próximo a jogar é aquele que está à sua direita.

a) Por questões estratégicas, Nilton decide se posicionar sempre imediatamente à direita de Lucimar. De quantas formas esses 6 jogadores podem sentar ao redor da mesa?

b) Suponha que agora Nilton deseja ficar em qualquer um dos dois lado de Lucimar. A resposta anterior muda?

Problema 101. De quantas maneiras 6 pessoas podem se sentar em torno de uma mesa circular?

Problema 102. Um grupo 6 crianças decide brincar de ciranda dando as mãos e fazendo uma roda. Dentre elas estão Aline, Bianca e Carla que são muito amigas e querem sempre ficar juntas. Nessa condição, qual o número de rodas distintas que podem ser formadas?

Problema 103. De quantos modos podemos formar uma roda com 7 crianças de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

Problema 104. De quantos modos 7 crianças, entre elas João e Maria, podem brincar de roda, ficando João sempre ao lado de Maria?

Problema 105. Em uma brincadeira em um programa de TV, 6 casais devem se sentar em bancos arrumados de modo circular com a seguinte restrição: homens e mulheres devem se sentar de modo alternado, cada homem ao lado apenas de mulheres e vice-versa. De quantas maneiras esses casais podem se arrumar para a brincadeira?

Problema 106. Fábio, Denise e Ledo vão brincar de roda, juntamente com outras 5 pessoas. De quantas formas essa roda poderá ser formada, de modo que os três fiquem juntos, mas com Denise entre Fábio e Ledo?

Problema 107. Um grupo constituído por 4 casais se sentará entorno de uma mesa com 8 cadeiras. As pessoas se sentarão de modo alternado pelo sexo e, além disso, João e Maria estão brigados e não querem sentar-se lado a lado. Quantas arrumações diferentes poderão ser feitas com essas pessoas sentando-se nos lugares disponíveis?

Problema 108. De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem formar um ciranda com as crianças dos mesmo sexo todas juntas?

Problema 109. De quantas maneiras podemos dispor 5 casais e uma ciranda de modo que:

a) cada mulher esteja ao lado do seu marido?

b) cada mulher esteja ao lado do seu marido e pessoas do mesmo sexo não possam ficar juntas?

Problema 110. Uma pirâmide pentagonal regular deve ser colorida, cada face com uma única cor, usando 6 cores distintas. De quantos modos isso pode ser feito?

Problema 111. De quantos modos 12 crianças podem ocupar seis bancos com dois lugares cada em uma roda gigante?

Problema 112. São dados n pontos em círculo. Quantos $n-$ágonos (não necessariamente convexos) existem com vértices nesses pontos?

Problema 113. Quantos dados diferentes existem com a soma das faces opostas igual a 7?

Problema 114. Uma pulseira deve ser cravejada com um rubi, uma esmeralda, um topázio, uma água-marinha, uma turmalina e uma ametista. De quantos modos isso pode ser feito supondo:

a) que a pulseira tem fecho e um relógio engastado no fecho?

b) que a pulseira tem fecho?

c) que a pulseira não tem fecho e o braço só pode entrar na pulseira em um sentido?

d) que a pulseira não tem fecho e o braço pode entrar na pulseira nos dois sentidos?

Problema 115. Dos 12 estudantes da uma turma, seis serão escolhidos para participar de um debate em uma mesa circular. José, Cléber, Márcia e Luíza só irão se forem juntos; de tal forma que Márcia e Luíza vão sentar lado a lado e o Samuel e o Cléber nunca irão sentar lado a lado à mesa. De quantas maneiras distintas podem se sentar?

Problema 116. As 8 faces de um prisma hexagonal regular devem ser pintadas, usando oito cores distintas, sem que haja repetição. De quantos modos isso pode ser feito?

7 Combinações Completas

Problema 117. Observe o modelo e depois faça o que se pede.

> A equação $\boxed{x + y + z = 4}$ pode ser resolvida, em $U = N$, pelas triplas $(4, 0, 0)$ ou $(1, 2, 1)$ ou $(0, 1, 3)$ ou várias outras. Cada tripla pode ser associada à distribuição de bolas em caixas, a saber:
>
> i) $(4, 0, 0)$ distribui-se em
>
> $$\boxed{\bullet\bullet\bullet\bullet\quad} + \boxed{\qquad\quad} + \boxed{\qquad\quad};$$
>
> ii) $(1, 2, 1)$ distribui-se em
>
> $$\boxed{\bullet\qquad} + \boxed{\bullet\bullet\qquad} + \boxed{\bullet\qquad};\text{ e}$$
>
> iii) $(0, 1, 3)$ distribui-se em
>
> $$\boxed{\qquad\quad} + \boxed{\bullet\qquad} + \boxed{\bullet\bullet\bullet\quad}.$$
>
> Os três casos destacados ilustram uma mudança de posição entre 6 elementos, dos quais, quatro são $\bullet$ e dois são $+$. Esse método é chamado de Combinações Completas (ou com elementos Repetidos), com o símbolo "CR", nesse caso, sendo $CR_{3,4}$, e serve para calcular o número de soluções inteiras (não negativas) em equações lineares. Agora, analisando o disposto, isso também pode ser calculado, de modo análogo pelas permutações com elementos repetidos, usando a fórmula $P_6^{4,2} = 15$, ou seja, 15 soluções inteiras não negativas.

Calcule, nos universos destacados, a quantidade de soluções das equações abaixo.

a) $x + y = 3$, com $U = \mathbb{N}$.

b) $a + b + c = 7$, com $U = \mathbb{N}$.

c) $A + B + C + D = 9$, com $U = \mathbb{N}^*$.

Problema 118. Uma fábrica possui 3 cores diferentes para pintar 6 carros iguais, cada um com uma cor. De quantos modos isso pode ser feito?

Problema 119. Um dominó comum possui peças que vão do zero/zero até o seis/seis. Fazendo todas as duplas possíveis entre os números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, podendo haver repetições (duplas com o mesmo número). Quantas peças existem nesse jogo?

Problema 120. Podendo escolher entre 5 tipos de doces e 4 marcas de refrigerante, de quantos modos é possível fazer um pedido com dois doces e três garrafas de refrigerante?

Problema 121. Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito.

a) Sabendo que podem ser compradas de zero a seis empadas de cada tipo, de quantas maneiras distintas essa compra pode ser feita?

b) Sabendo que ele quer provar todos os sabores das empadas, de quantas maneiras distintas essa compra pode ser feita?

Problema 122. Quantos são os anagramas da palavra

PARAMETRIZADA

que não possuem duas letras "A" juntas?

Problema 123. Qual o número de soluções inteiras e não negativas de $x + y + z = 5$?

Problema 124. Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z = 4$ que possuem apenas uma incógnita nula ?

Problema 125. De quantas formas podemos colocar 6 anéis iguais em 4 dedos?

Problema 126. Há seis modos distintos de guardar dois cadernos iguais em três gavetas, são eles:

- guardar os dois na primeira gaveta;
- guardar os dois na segunda gaveta;
- guardar os dois na terceira gaveta;
- guardar um na primeira gaveta e o outro, na segunda;
- guardar um na primeira gaveta e o outro, na terceira; e
- guardar um na segunda gaveta e o outro, na terceira.

Qual o número de modos distintos de guardar três cadernos iguais em três gavetas?

Problema 127. Calcule o número de maneiras diferentes pelas quais podemos repartir uma dúzia de balas iguais entre três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos uma bala.

Problema 128. Uma loja vende barras de chocolate de diversos sabores. Em uma promoção era possível comprar três barras de chocolate com descontos, desde que essas fossem dos sabores: ao leite, amargo, branco ou com amêndoas, repetidos ou não. Assim, um cliente para comprar as três barras na promoção poderá escolher os sabores de n modos distintos. Qual o valor de n?

Problema 129. Uma pessoa dispõe de balas de hortelã, caramelo e coco, cada uma com apenas um sabor. Ele pretende "montar" saquinhos com 13 balas cada, de modo que em cada saquinho haja no mínimo 3 balas de cada sabor. Um saquinho se diferencia do outro pela quantidade de balas de cada sabor. Sendo assim, quantos saquinhos diferentes podem ser "montados"?

Problema 130. Qual o número de soluções inteiras e não negativas de $x + y + z \leq 6$?

Problema 131. Quantos números inteiros entre 1 e 10000 têm soma dos seus algarismos igual a 6?

Problema 132. De quantos modos podemos formar um subconjunto com 4 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ de modo que não haja números consecutivos?

Problema 133. Os números de 1 até 10 foram arrumados em volta de um círculo em ordem crescente até chegar ao número 10. De quantos modos podemos escolher 4 deles sem que haja dois vizinhos no círculo?

Problema 134. Uma pessoa deseja escolher 3 dias da semana para ir à academia. De quantas formas ela pode montar o seu horário se ela não pode ir em 2 dias consecutivos?

Problema 135. Sejam $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as possíveis funções $f : I_m \longrightarrow I_n$ ...

a) ... ?

b) ... que são injetoras?

c) ... estritamente crescentes?

d) ... não decrescentes?

Problema 136. De quantas formas podemos colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos?

Problema 137. Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa, nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

8 Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

Problema 138. Entre n pessoas existem duas com o mesmo signo. Qual o menor valor de n que garante esse fato?

Problema 139. Numa floresta há 1000 jaqueiras. É conhecido que uma jaqueira não tem mais do que 600 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras que têm a mesma quantidade de frutos.

Problema 140. Uma pessoa entrou num quarto escuro, sem enxergar absolutamente nada, e abriu uma gaveta na qual havia exatamente: 20 meias pretas; 15 meias brancas; e 10 meias marrons.
Todas estavam misturados e eram indistinguíveis ao tato. Qual a quantidade mínima de meias que essa pessoa deve retirar para que tenha certeza de ter retirado:

a) um par de meias de mesma cor?

b) um par de meias brancas?

Problema 141. A "Média aritmética" de n termos é a razão entre a soma dos n termos pela respectiva quantidade n. Em um grupo de 54 pessoas, qual a média aritmética de aniversariantes por mês?

Problema 142. Uma relação entre a média aritmética e o PCP está enunciada abaixo.

Proposição 1 Seja $\overline{x}$ a média aritmética de uma lista de números. Então ao menos um desses termos é maior do que ou igual a $\overline{x}$. E quando algum desses números for maior do que $\overline{x}$, então haverá outro que será menor do que essa média (e *vice-versa*).

Seguem exemplos numéricos para complementar a teoria.

a) Para a lista $1, 2, 3, 6$ e 8. A média será

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+6+8}{5} = 4$$

com $1, 2$ e 3 menores do que $\overline{x} = 4$ e 6 e 8 maior.

b) Para a lista $6, 6, 6, 6$ e 6. A média será

$$\overline{x} = \frac{6+6+6+6+6}{5} = 6$$

com todos os elementos iguais a média.

Responda os itens abaixo aplicando o que enuncia a proposição 1.

a) Demonstre que num grupo de 54 pessoas, ao menos 5 fazem aniversário no mês.

b) 40100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder alguma questão. Considere a afirmação: "Pelo menos k candidatos responderam de modo idêntico as 4 primeiras questões da prova." Determine o maior valor de n para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

c) 98305 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de certo/errado. Suponha que nenhum candidato deixe de responder alguma questão. Considere a afirmação: "Pelo menos 4 candidatos responderam de modo idêntico as n primeiras questões da prova." Determine o maior valor de n para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

Problema 143. Demonstre a proposição 1 da questão anterior.

Problema 144. Considere um grupo com 90 torcedores, cada um torcendo ou pelo Flamengo, ou pelo Botafogo, ou pelo Fluminense ou pelo Vasco. Mostre que nesse grupo há pelo menos 23 torcedores de um mesmo time.

Problema 145. Uma prova de concurso terá 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual poderemos garantir que pelo menos dois deles darão exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Problema 146. Depois de d lançamentos de um dado de 6 faces temos certeza que uma das faces saiu mais de 5 vezes. Qual o valor de d?

Problema 147. Prove que se 5 pontos forem tomados no interior de um quadrado de lado 2, ao menos dois desses pontos ficarão numa distância menor do que ou igual a $\sqrt{2}$.

Problema 148. A soma das idades de 5 estudantes é igual a 86 anos. Prove que podem ser escolhidos 3 cuja soma das idades é maior que 51 anos.

Problema 149. Dados 9 inteiros quaisquer. Prove que a diferença entre dois deles é divisível por 8.

Problema 150. Uma prova de concurso é formada por questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. Admita que nenhum candidato deixe questões sem responder.

a) Qual é o número mínimo de candidatos para que seja possível garantir que pelo menos 3 deles darão exatamente as mesmas respostas nas 5 primeiras questões?

b) Qual é o valor máximo de n para o qual é possível garantir que, em um concurso com 1000 candidatos, pelo menos 2 darão as mesmas respostas nas n primeiras questões?

Problema 151. Qual o menor número de pessoas num grupo para garantir que pelo menos 4 nasceram no mesmo mês?

Problema 152. Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores distintas, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda, uma bola é expelida ao acaso. Para garantir a retirar de 4 bolas da mesma cor, o menor número de moedas inseridas na máquina corresponde a:

Problema 153. Escolhendo-se aleatoriamente 41 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, 80\}$, mostre que, entre os escolhidos, há dois números tais que um divide o outro.

Problema 154. Em uma reunião com n pessoas. Supondo que se A conhece B, então B conhece A. Mostre que existem duas pessoas que conhecem a mesma quantidade de pessoas.

Problema 155. Mostre que entre sete inteiros positivos distintos menores do que 127 sempre haverá um par, digamos x e y tal que $1 < \dfrac{y}{x} \leq 2$.

Problema 156. Mostre que em todo subconjunto de $n + 1$ elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, 2n - 1, 2n\}$ há dois números primos entre si.

Problema 157. Dado um inteiro positivo n, mostre que existe algum múltiplo dele que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1.

Problema 158. Mostre que existe algum múltiplo de 7 que se escreve apenas com uma sequência de algarismos iguais a 1.

Problema 159. Mostre que existe um número da forma $199\ldots91$ (com pelo menos três noves) que é múltiplo de 1991.

Problema 160. Prove que todo conjunto de 10 números de dois dígitos possui dois subconjuntos disjuntos com a mesma soma dos elementos

Problema 161. Dezessete pessoas se correspondem por e-mail, cada uma com todas as outras. Nessas correspondências são debatidos os temas I, II e III. Prove que ao menos 3 pessoas debatem o mesmo tema entre si.

Problema 162. Um enxadrista, durante 11 semanas, joga pelos menos uma partida por dia, mas não joga mais de 12 partidas por semana. Mostre que é possível achar um conjunto de dias consecutivos durante os quais ele jogou exatamente 20 partidas.

Respostas e Soluções.

1. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que se tivéssemos começado a contar pelo número 1, não haveria dúvidas quanto a quantidade de elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 908\}$. Como começamos sete unidades a mais que o 1, a resposta automática seria $908 - 8 = 900$. Este é um excelente ponto para lembrar que subtração não indica quantidade e sim "distância" entre dois números. Ao calcularmos a distância do 908 (ou de m) até o 8 (ou de n) estamos contando apenas o espaço entre eles, sendo assim, após a subtração devemos adicionar uma unidade para calcular a exata quantidade. Por fim, a quantidade será

$$908 - 8 + 1 = 901 \text{ números.}$$

De modo geral, a quantidade de números inteiros de m até n, sendo $m > n$, é $m - n + 1$.

Outra solução: Uma outra estratégia é fazermos um ajuste na contagem deslocando cada valor até o ponto inicial, o 1, e depois simplesmente olhar onde terminou. Como $8 - 7 = 1$ e $908 - 7 = 901$, a quantidade de elementos do conjunto $\{8, 9, 10, \ldots, 908\}$ é mesma que a do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 901\}$, isto é, 901 elementos.

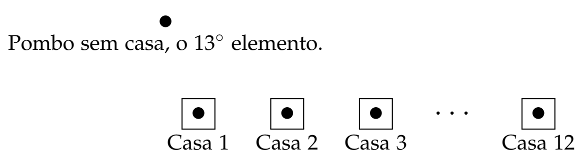
2. Perceba que poderíamos dividir todos os elementos do conjunto por 7 para começarmos a contar do 1 ficando com $\{1, 2, 3, \ldots, 97, 98\}$. Portanto, há 98 elementos no conjunto inicial.

3. Perceba que podemos subtrair 9 de cada elemento do conjunto inicial e ficaremos com o conjunto $\{5, 10, 15, \ldots, 995, 1000\}$. Agora, dividindo todos os elementos do novo conjunto por 5 ficamos com

$$\{1, 2, 3, \ldots, 199, 200\}.$$

Portanto, há 200 elementos no conjunto inicial.

4. Como há 12 signos do zodíaco, basta $n = 13$ para que duas pessoas tenham o mesmo signo. A ideia é pensar nos Signos como as casas e nas pessoas como os pombos.



Logo, há 12 casas, e para garantir que alguma das casas tenha dois pombos, basta ter $n = 12 + 1$ pombos.

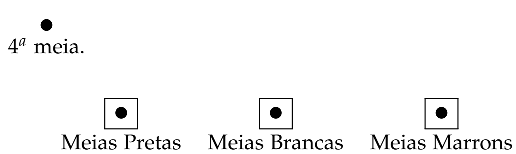
5. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que os números usados são

$$\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

São $20 - 10 + 1 = 11$ números, cada um com dois algarismos, logo foram usados $11 \times 2 = 22$ algarismos.

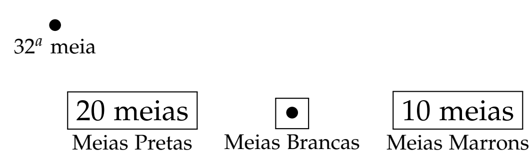
6. Considere as três cores como sendo as casas e as meias retiradas como os pombos.

a) Pelo Princípio da Casa dos Pombos, se retirarmos 4 meias, pelo menos duas delas terão a mesma cor. Para ver que esse é o número mínimo, note que é possível pegarmos uma meia de cada cor nas três primeiras retiradas e não formarmos um par.



Resposta: 4 meias.

b) Observe que o cenário mais difícil para o objetivo é retirar todas as meias de cor preta, todas as meias de cor marrom e depois o par de cor branca. Assim, deveremos retirar $20 + 10 + 2 = 32$ meias para garantir o par de cor branca.



Resposta: 32 meias.

7. Sejam x e y números inteiros pares, então podemos escrevê-los como $x = 2a$ e $y = 2b$, para a e b inteiros. Analogamente, se w e z são números inteiros ímpares, podemos escrever $w = 2c + 1$ e $z = 2d + 1$, com c e d inteiros.

a)

$$\begin{aligned} x + y &= 2a + 2b \\ &= 2(a + b), \end{aligned}$$

é par.

b)

$$\begin{aligned} w + z &= 2c + 1 + 2d + 1 \\ &= 2(c + d + 1), \end{aligned}$$

é par.

c)

$$\begin{aligned} x + w &= 2a + 2c + 1 \\ &= 2(a + c) + 1, \end{aligned}$$

é ímpar.

d)

$$\begin{aligned} w \cdot z &= (2c + 1)(2d + 1) \\ &= 2(2cd + c + d) + 1, \end{aligned}$$

é ímpar.

e)

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 2a \cdot 2b \\ &= 2 \cdot 2ab, \end{aligned}$$

é par.

f)

$$\begin{aligned} x \cdot w &= 2a \cdot (2c + 1) \\ &= 2(2ac + a), \end{aligned}$$

é par.

8. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que de 40 até 99 há $99 - 40 + 1 = 60$ números de dois algarismos cada, logo foram utilizados $60 \times 2 = 120$ algarismos. Agora, de 100 até 999 há $999 - 100 + 1 = 900$ números de três algarismos, o que totaliza $900 \times 3 = 2700$ algarismos. Seguindo de 1000 até 1200 são $1200 - 1000 + 1 = 201$ números com quatro algarismos, ou seja, $201 \times 4 = 804$. Por fim, teremos

$$120 + 2700 + 804 = 3624 \text{ algarismos utilizados.}$$

9. A soma pedida é

$$\begin{aligned} S &= 100 + 101 + 102 + \cdots + 999 \\ &= \frac{900 \cdot (100 + 999)}{2} \\ &= 494550. \end{aligned}$$

10. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Como são 12 meses, com 24 pessoas no grupo não é possível garantir que três delas façam aniversário no mesmo mês, afinal poderíamos ter exatamente 2 em cada mês. Agora, com 25 pessoas teremos certeza pois, se cada mês receber no máximo dois aniversariantes, a 25^a pessoa ficará sem data de aniversário possível. Logo, é preciso, no mínimo, 25 pessoas.

b) Como são 7 dias na semana, não basta termos 21 pessoas, pois poderíamos ter 3 pessoas nascidas em cada dia. Com a 22^a pessoa, com certeza, haverá um dia no qual 4 pessoas nasceram. Portanto, no mínimo, deveremos ter 22 pessoas.

11. (Extraído da Vídeo Aula)
Se tirarmos 8 blusas, podem ser todas cinzas; tirando 10 blusas, podem ser todas amarelas; e sendo 12, podemos ser todas beges. No caso de 18 poderiam ser as cinzas e as amarelos; para 20, as beges e as cinzas; e para 22 as amarelas e as beges. Mas, com certeza, se forem 23 teremos uma de cada cor.

12. (Adaptado do livro Círculos Matemáticos)
Observe que cada disco dentado gira no sentido inverso que o dos seus vizinhos. Como o disco 1 gira no sentido horário, o 2 ficará no anti-horário, o 3 no horário, e assim por diante. O que conclui que os ímpares ficaram no sentido horário e os pares no anti-horário. Portanto, as proposições verdadeiras são as *i* e *iii*. Serão apenas 2 proposições corretas.

13. Como são 4 cores, poderemos dar o "azar" de em várias retiradas sempre chegarmos em 3 bolas de cada cor, sem antes obtermos na 4^a bola de cor repetida. Tirar 3 bolas de cada cor pode ser obtido após $4 \times 3 = 12$ retiradas. Daí, com certeza, a 13^a bola repetirá pela quarta vez alguma cor. Portanto, temos que retirar, no mínimo, 13 bolas.

14. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que se escrevermos a soma pedida no sentido inverso obteremos

$$S = 2014 + 2013 + 2012 + 2011 + \cdots + 4 + 3 + 2 + 1$$

e, somando a forma original com sua escrita invertida, também obteremos

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
S & = & 1 & + & 2 & +\cdots+ & 2013 & + & 2014 \\
S & = & 2014 & + & 2013 & +\cdots+ & 2 & + & 1 \\
2S & = & 2015 & + & 2015 & +\cdots+ & 2015 & + & 2015 \\
2S & = & 2014 & \times & 2015 & & & & \\
S & = & 1007 & \times & 2015, & & & &
\end{array}$$

que é o produto de números ímpares. Logo a soma dada é ímpar.

Observação: Veja que

$$2S = \underbrace{2015 + 2015 + \cdots + 2015 + 2015}_{\text{2014 parcelas iguas a 2015.}}$$

pode ser facilmente transformada em uma multiplicação em função da igualdade das parcelas, resultando em

$$2S = 2014 \times 2015.$$

Essa ideia pode ser aplicada na soma

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n.$$

Repetindo o método chegaremos a

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
S & = & 1 & + & 2 & +\cdots+ & (n-1) & + & n \\
S & = & n & + & (n-1) & +\cdots+ & 2 & + & 1 \\
2S & = & (n+1) & + & (n+1) & +\cdots+ & (n+1) & + & (n+1) \\
2S & = & n & \times & (n+1) & & & &
\end{array}$$

que produz a fórmula para a soma S dos naturais de 1 até n:

$$S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

15. (Adaptado da Vídeo Aula)
Observe que se isso for possível, poderemos separar os números de 1 até 10 em dois conjuntos de modo que a soma S dos elementos do primeiro seja igual a soma dos elementos do segundo. Como esses conjuntos têm todos os números citados, então

$$\begin{aligned}
S + S &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 \\
2S &= \frac{10 \cdot (1 + 10)}{2} \\
2S &= 55.
\end{aligned}$$

Mas $2S$ é um número par e 55 é um número ímpar, então essa equação não tem solução inteira, daí, não tem como cumprir o que o problema perguntou.

16. Primeiro observe que não poderemos ter qualquer cor com 13 bolas, apenas conseguiremos isso com as brancas e as verdes. Sendo assim, por "azar", poderíamos ter tirado todas as cores que não resolvem o problema, totalizando $7 + 3 + 11 = 21$ bolas. Agora restam apenas duas cores e como queremos treze bolas de cor repetida devemos tirar ao menos mais $12 + 12 + 1 = 25$. O que resulta em

$$21 + 25 = 46.$$

17. (Adaptado da OBMEP)
Observe que se n é ímpar, então n^2 é ímpar, como está provado no exercício 7. Assim, $n^2 \pm n$ será par. Como deseja-se um número ímpar, basta somarmos um ímpar. A resposta está na letra **c**.

18. Observe que 2010^{2010} possui unidade par, pois é o produto de números pares, já 2011^{2011} ficará com unidade ímpar, 2012^{2012} terá unidade par e essa alternância continuará. Por fim, a paridade resultante será

$$\text{par} + \text{ímpar} + \text{par} + \text{ímpar} + \text{par} + \text{ímpar} + \text{par} = \text{ímpar}.$$

19. (Extraído do Vestibular da PUC/RJ)
Tome os 12 meses como as casas e as n pessoas como os pombos. Se houver uma distribuição de 3 pessoas em cada mês, não se chegará ao objetivo do problema e já teríamos $12 \times 3 = 36$ pessoas no grupo. Agora basta que mais uma pessoa seja colocada em qualquer uma das casas para concluir o problema. Portanto, 37 pessoas num grupo garantem que ao menos 4 nasceram no mesmo mês.

20. (Extraído do Vestibular da UERJ/RJ - 2011)
Se retirarmos 30 bolas, é possível que existam 3 bolas de cada cor e o objetivo não será cumprido. Com 31 bolas, pelo menos uma cor terá 4 representantes.

21. (Adaptado da Vídeo Aula)

i) de 1 até 9 são $9 - 1 + 1 = 9$ dígitos.

ii) de 10 até 99 são $(99 - 10 + 1) \times 2 = 180$ dígitos.

iii) de 100 até 999 são $(999 - 100 + 1) \times 3 = 2700$ dígitos.

COmo 9 e 180 são divisíveis por 3 e $9 + 180 < 1002 < 9 + 180 + 2700$, o 1002° será o último dígito de um número de três dígitos. Observe que de 100 até um número de três algarismos n, temos $100 - n + 1$ números de 3 algarismos, logo, são $(n - 100 + 1) \times 3$ dígitos nessa sequência. Queremos encontrar n tal que:

$$\begin{aligned}
9 + 180 + 3 \cdot (n - 99) &= 1002 \\
3 \cdot (n - 99) &= 1002 - 189 \\
3 \cdot (n - 99) &= 813 \\
3n - 297 &= 813 \\
3n &= 813 + 297 \\
3n &= 1110 \\
n &= \frac{1110}{3}. \\
n &= 370.
\end{aligned}$$

Então, ao escrevermos o número 370, teremos 1002 termos na sequência, logo o 1002° termo será o 0.

22. Como há 6 faces, para ter certeza que ao menos um delas saiu:

i) 2 vezes, deveremos ter ao menos $7 = 1 \cdot 6 + 1$ lançamentos;

ii) 3 vezes, deveremos ter ao menos $13 = 2 \cdot 6 + 1$ lançamentos;

iii) 4 vezes, deveremos ter ao menos $19 = 3 \cdot 6 + 1$ lançamentos;

iv) 5 vezes, deveremos ter ao menos $26 = 4 \cdot 6 + 1$ lançamentos; e

v) 6 vezes, deveremos ter ao menos $31 = 5 \cdot 6 + 1$ lançamentos.

A resposta é $d = 31$ lançamentos. A ideia é pensar que o número em cada face representa uma casa (6 números = 6 casas). Queremos alguma casa com mais do que d pombos (lançamentos) então deve-se distribuir os resultados dos lançamentos nas respectivas casas. Se tivermos $6d + 1$ lançamentos, não é possível que cada número tenha saído no máximo d vezes e assim teremos uma casa com pelo menos $d + 1$ pombos.

23. (Extraído da Vídeo Aula)
Os múltiplos de 3 entre 1 e 301 são

$$\{3, 6, 9, \dots, 297, 300\}.$$

A sua soma S pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
S &= 3 + 6 + 9 + \cdots + 297 + 300 \\
S &= 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100) \\
S &= 3 \cdot \left(\frac{100 \cdot (1 + 100)}{2}\right) \\
S &= 15150.
\end{aligned}$$

24. (Extraído da OBMEP)
Observe que podemos desenvolver a equação pedida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{xy}{x+y} &= 144 \\
xy &= 144x + 144y \\
xy - 144x - 144y + 144^2 &= 144^2 \\
x(y - 144) - 144(y - 144) &= 12^4 \\
(x - 144)(y - 144) &= (2^2 \cdot 3)^4 \\
(x - 144)(y - 144) &= 2^8 \cdot 3^4.
\end{aligned}$$

Como estamos trabalhando com os números inteiros, $(x - 144)$ e $(y - 144)$ dividem 144^2, ou seja, basta calcularmos o número de divisores de $144^2 = 2^8 \cdot 3^4$. Esse número possui

$$(8 + 1) \cdot (4 + 1) = 45$$

divisores inteiros positivos. Como não há restrição para os valores positivos, teremos

90 pares ordenados

que resolvem o problema.

25. (Extraído da OBMEP)
Observe que podemos desenvolver a inequação dupla (ou simultânea) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 2000 &< \sqrt{n \cdot (n-1)} < 2005 \\ 2000^2 &< \left(\sqrt{n \cdot (n-1)}\right)^2 < 2005^2 \\ 2000 \cdot 2000 &< n \cdot (n-1) < 2005 \cdot 2005. \end{aligned}$$

Então, podemos concluir que

$$n \in \{2001, 2002, 2003, 2004, 2005\},$$

totalizando 5 números inteiros e positivos. O que está na letra **e**.

26. Chame a soma pedida de S_2 e siga o que foi iniciado nos exemplos do enunciado até o $(n+1)^3$.

$$\begin{aligned} 2^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ 4^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ 5^3 &= 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 \\ \vdots &= \vdots \\ (n-1+1)^3 &= (n-1)^3 + 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1 \\ (n+1)^3 &= n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

Agora, some todos os membros dessas equações observando que todos os termos ao cubo do lado esquerdo se anulam com os do lado direito, exceto o $(n+1)^3$ e o 1^3. Obtemos assim

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot S_2 + 3 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n.$$

Por fim, chegaremos a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

27. (Adaptado da Vídeo Aula)
Utilizaremos a fórmula desenvolvida no exercício 26, pois a área total é equivalente a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$, ou seja, é uma soma de quadrados de números inteiros. Sendo assim, obteremos

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 &= \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} \\ &= 338350 \text{ u.a..} \end{aligned}$$

28. Cada computador pode estar conectado a 1, 2, 3, 4 ou 5 outras máquinas. Como há 6 computadores e cinco opções de conexão, então ao menos dois computadores terão o mesmo número de conexões.

29. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Pelo Princípio Fundamental de Contagem (PFC), são $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades.

b) Como, para ir são 6 possibilidades, para voltar também são 6. Pelo PFC, $6 \cdot 6 = 36$possibilidades.

c) Como, para ir são 6 possibilidades, mas apenas uma delas foi escolhida, para não repetir estradas na volta, resta 1 possibilidade de C para B e 2 de B para A. Temos então $6 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ possibilidades.

30. (Extraído da Vídeo Aula) Iniciando a pintura pela primeira casa, que pode ser pintada com qualquer uma das quatro cores, seguindo para sua vizinha, que não poderá ser pintada apenas com a cor utilizada na primeira, e seguindo o mesmo raciocínio até a última casa, temos $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$ possibilidades.

31. (Extraído da Vídeo Aula) Como cada bit equivale a uma letra, temos $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{32 \ vezes} = 2^{32}$ palavras.

32. (Extraído da Vídeo Aula) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

33. Como o algarismo da centena não pode ser 0, o total de possibilidades é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

34. Como existem 5 algarismos pares e o algarismo da unidade do milhar não pode ser 0, o total de possibilidades é $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$.

35. Para ocupar o primeiro lugar do pódium, são 8 possibilidades; para o segundo lugar, sobram apenas 7; e, para o terceiro, apenas 6. Assim, temos o total de possibilidades expresso por $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

36. A primeira pessoa tem 6 possibilidades; a segunda, 5; e a terceira, 4. Assim, pelo PFC, são $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ possibilidades.

37. Como são 5 possibilidades para cada questão, o total de maneiras é $5 \cdot 5 \cdot ... \cdot 5 = 5^{10}$.

38. Como são 26 letras e 10 algarismos, o total de placas é $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$.

39. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Como não podemos contar com o 0 no início (unidade do milhar), pelo PFC, temos $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3584$ números.

b) $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470$ números.

c) Para enfrentarmos as adversidades logo no início, seguiremos a sequência (unidade, centena, dezena): $4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$ números.

40. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos dividir o problema em dois casos para que não haja conflito:

i) Números terminados com 0: começando pela unidade, temos $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ números;

ii) Números terminados em 2, 4 ou 6: (unidade, unidade do milhar, centena, dezena) $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 = 540$ números.

Por i e ii, temos que o total de números é $210 + 540 = 750$.

41. (Extraído de Exercícios Resolvidos) Dividindo em dois casos, temos:

i) Com Pedro: como Pedro pode ocupar qualquer um dos três locais do banco traseiro, temos $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$;

ii) Sem Pedro: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$.
Portanto o total de maneiras diferentes é $1080 + 720 = 1800$.

42. (Extraído de Exercícios Resolvidos)

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

b) Como existem $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^k$ sequências possíveis com exatamente k símbolos, o total de sequências pode ser calculado somando-se as quantidades para cada tamanho possível: $2 + 4 + 8 + ... + 2^8 = \dfrac{2(1 - 2^8)}{1 - 2} = 510$.

43.

a) Se Ana deve ser a primeira, sobram cinco pessoas para cinco lugares, ou seja, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilidades.

b) Como em primeiro deve ficar Ana ou Pedro, temos $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240$ possibilidades.

c) O total de possibilidades, sem restrições, é $6! = 720$. Mas, deste total, subtrairemos as possibilidades nas quais Ana e Pedro ficam juntos. Assim, temos $720 - 2 \cdot 5! = 480$ possibilidades.

44. (OBM − 2013)
Qualquer que seja o número, a soma dos algarismos é 10. A soma dos dois últimos é maior que a soma dos dois primeiros quando for maior que 5. Isso ocorre para $24, 34, 42, 43$. Resposta C.

45. (OBMEP − 2014)
Como os números devem ser ímpares e como a soma dos algarismos das unidades e das dezenas deve ser igual a 16, os números devem terminar em 79 ou 97 (duas possibilidades). Na casa das dezenas de milhar temos 9 possibilidades, pois os números, tendo cinco algarismos, não podem ter 0 nesta casa. Para a casa das unidades de milhar temos 10 possibilidades (todos os algarismos de 0 a 9) e, para cada uma das escolhas anteriores, podemos escolher o algarismo das centenas de duas maneiras distintas, a fim de que a soma de todos os algarismos do número seja um múltiplo de 5. Logo, há $2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 2 = 360$ possibilidades. Resposta D.

46. (OBMEP 2013) Dividindo os possíveis horários em dois casos, temos:

i) Com aula aos sábados: escolhendo aula sábado, são 3 possibilidades; sua aula à tarde, são 2 possibilidades de horário e 4 possibilidades de dias. Temos então $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ possibilidades;

ii) Sem aula aos sábados: são 6 possibilidades de dias não consecutivos, sendo um pela manhã outro pela tarde (2 possibilidades). O horário pela manhã tem 3 possibilidades e pela tarde, 2 possibilidades, chegando a um total de $6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot = 72$ possibilidades para este caso.

Assim, o total de possibilidades é $24 + 72 = 96$. Resposta A.

47. (Extraído da OBM) Existem 4 tipos possíveis de colunas e as regras do Super Paciência se resumem a não preenchermos uma certa coluna com a mesma configuração da coluna imediatamente anterior. Assim, uma vez que Bitonho escolheu os números de uma determinada coluna, ele possui 3 opções de preenchimento para a próxima. No início, podemos escolher livremente como preencher a primeira coluna mais à esquerda e isso pode ser feito de 4 formas. Em seguida, ao preenchermos as próximas colunas à direita, teremos 3 opções. Portanto, o total de preenchimentos é:

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 4 \cdot 3^{2013}$$

48. (Extraído da Vídeo Aula)
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

49. (Extraído da Vídeo Aula)
$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot = 720$.

50. Como são quatro atividades e ele deverá executar todas elas, temos uma permutação de quatro elementos, ou seja, $P_4 = 4! = 24$ maneiras diferentes.

51. $P_5 = 5! = 120$.

52. LABO, LAOB, LBAO, LBOA, LOAB, LOBA.

53. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Se começam por MA, resta apenas permutar as outras 4 letras, ou seja, $P_4 = 4! = 24$ anagramas.

b) Se duas letras devem estar juntas e em uma determinada ordem, consideramo-nas como um bloco, ou seja, $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

c) Parecido com o item anterior, porém como não existe uma ordem específica para as letras que ficam juntas, elas devem ser permutadas dentro do bloco. Sendo assim, o número de anagramas é $P_5 \cdot P_2 = 5! \cdot 2! = 240$.

54. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Resta permutar as outras 6 letras. Segue que o número de anagramas é $P_6 = 6! = 720$

b) Vamos contar a quantidade de anagramas que começam com A, somado à quantidade de anagramas que terminam com E. Como os anagramas que começam com A e terminam com E foram contados duas vezes, subtraímo-no do resultado. Temos então $P_7 + P_7 - P_6 = 7! + 7! - 6! = 10800$.

c) Como deve terminar e começar com vogal e são 3 vogais para 2 espaços, segue que é $3 \cdot 2 = 6$ o número de maneiras de organizá-las. Agora, basta permutar as demais. Temos então $6 \cdot P_6 = 6 \cdot 720 = 4320$ anagramas.

d) Basta pensar que a letra T fica antes da letra M em metade dos anagramas, ou seja, $\dfrac{P_8}{2} = 20.160$ anagramas.

Comentário para professores: Esse é um bom momento para sugestionar em sala que identificar as seguintes estruturas pode simplificar os problemas:

i) Bloco Rígido: agrupamento de símbolos sem permutação entre as respectivas posições.

ii) Bloco: agrupamento de símbolos com permutação entre as respectivas posições.

55. (Extraído da Vídeo Aula) Basta subtrair, do total, a quantidade de anagramas nos quais as vogais aparecem todas juntas, ou seja, $P_6 - P_3 \cdot P_4 = 6! - 3!4! = 576$ anagramas.

56. (Extraído da Vídeo Aula) Como a fila pode começar com homem ou mulher e para ambos os casos a quantidade de filas é a mesma, teremos $2 \cdot P_3 \cdot P_3 = 2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ filas diferentes.

57. (Extraído da UFF - Extraído da Vídeo Aula) Seja F o grupo formado por franceses, A, o de americanos e I, o de ingleses, teremos dois tipos de filas: FAI e FIA, ou seja, $2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 = 34.560$ possibilidades.

58. (ENEM - Extraído da Vídeo Aula) Todas as pessoas cujas senhas iniciam por 1, serão chamadas antes, ou seja, $4! = 24$ pessoas. O mesmo ocorre com as pessoas cujas senhas começam por 3 (24 pessoas) e 5 (24 pessoas). Das senhas que começam com 7, apenas as que tem, na sequência, 1 (6 senhas), 3 (6 senhas), 51 (2 senhas), 53 (2 senhas), são chamadas antes. Portanto, são $24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 = 88$ pessoas chamadas antes de quem possuir a senha 75913, ou seja, será o 89^o a ser chamado. Resposta E.

59. (Extraído da Vídeo Aula) O total de parcelas desta soma é $P_5 = 120$. Cada um dos 5 algarismos aparece $\dfrac{120}{5} = 24$ vezes em cada uma das cinco posições. Somando apenas as unidades, teremos $24(2+3+4+5+6) = 480$. Assim, a soma de todas as parcelas é $480 + 480 \cdot 10 + 480 \cdot 10^2 + 480 \cdot 10^3 + 480 \cdot 10^4 = 5.333.280$.

60. (FUVEST - Extraído da Vídeo Aula) Acomodando inicialmente a família SOUZA, temos $3 \cdot 3! = 18$ possibilidades. Agora, o casal poderá escolher entre os dois bancos restantes e, para cada banco são 4 possibilidades, ou seja, $2 \cdot 4 = 8$ possibilidades. Por fim, as quatro pessoas restantes em quatro lugares: $4! = 24$. Portanto, o total de possibilidades é $18 \cdot 8 \cdot 24 = 3.456$. Resposta E.

61. (ITA) O total de números nos quais 3 e 4 ocupam posições adjacentes é $2P_5 = 2 \cdot 5! = 240$. Basta agora subtrair os números em que 1 e 2 ocupam posições adjacentes, que são $2 \cdot 2 \cdot P_4 = 4 \cdot 4! = 96$. Assim temos $240 - 96 = 144$ números. Resposta A.

62. (PUC - PR) Como são três vogais, consideramo-nas como um bloco rígido, passando a ter 5 letras. Assim o total de anagramas é $P_5 = 120$. Resposta C.

63. (Extraído do Banco de Problemas da OBMEP)

a) Primeiramente formemos oito pares de números escolhendo números opostos ao "meio" da sequência, ou seja, $(1, 16)$, $(2, 15)$, ..., $(7, 10)$ e $(8, 9)$. Veja que cada par possui soma 17. Agora junte os pares em quatro grupos, cada um com soma 34, por exemplo: $(1, 16, 2, 15)$, $(3, 14, 4, 13)$, $(5, 12, 6, 11)$ e $(7, 10, 8, 9)$.

b) Veja que os números obtidos no item anterior fornecem um exemplo de como colocar os números em cada linha. Vamos mostrar que temos pelo menos 1024 variações distintas desse exemplo. Em cada linha podemos "girar"os números quatro vezes para a esquerda obtendo as sequências: $(1, 16, 2, 15)$, $(16, 2, 15, 1)$, $(2, 15, 1, 16)$ e $(15, 1, 16, 2)$. Além disso, podemos "girar" as linhas quatro vezes de cima para baixo. Então, apenas rodando o "exemplo" contruído, temos pelo menos 4 variações dentro de cada linha e mais outras 4 para rotações entre as linhas. Assim, no total teremos

$$\underbrace{(4 \times 4 \times 4 \times 4)}_{\textit{giros dentro das linhas}} \times \underbrace{4}_{\textit{giros entre as linhas}} = 1024$$

maneiras de realizar esta tarefa. A figura abaixo mostra alguns exemplos de tabuleiros que podem ser obtidos pelas operações de rotações descritas:

1	16	2	15
3	14	4	13
5	12	6	11
7	10	8	9

16	2	15	1
3	14	4	13
12	6	11	5
10	8	9	7

10	8	9	7
16	2	15	1
3	14	4	13
12	6	11	5

64. (Extraído da Vídeo Aula) $C_{6,2} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$

65. (Extraído da Vídeo Aula) $C_{5,2} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$

66. $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$

67. $C_{5,3} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$

68.

a) $C_{10,2} = \dfrac{10!}{8! \cdot 2!} = 45.$ b) $C_{10,3} = \dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = 120.$ c) $C_{10,7} = \dfrac{10!}{3! \cdot 7!} = 120.$

Comentário para professores: A quantidade de maneiras das quais podemos tormar p elementos de um conjunto de n elementos $(n \geq p)$ é a mesma que tomar $(n - p)$ elementos, ou seja, é indiferente se contamos de quantas maneiras podemos tomar p ou deixar p. Assim $C_{n,p} = C_{n,n-p}$.

69.

a) $C_{6,2} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$

b) $C_{6,4} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15.$

70. (Extraído da Vídeo Aula) $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$

71. (Extraído da Vídeo Aula) $C_{6,2} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$

72. (Extraído da Vídeo Aula)

a) $C_{60,6} = 50.063.860.$

b) $C_{30,4} \cdot C_{30,2} = 27.405 \cdot 435 =$
$= 11.921.175.$

c) $C_{59,5} = 5.006.386.$

73. (Extraído da Vídeo Aula) $C_{5,3} \cdot C_{6,2} \cdot C_{3,2} = 10 \cdot 15 \cdot 3 = 450$ comissões.

74.

a) $C_{10,5} = \dfrac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$

b) Como Ana participará e Beatriz não, restam oito pessoas para quatro vagas, ou seja, $C_{8,4} = \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70.$

c) Devemos subtrair do total de comissões, as comissões nas quais nenhuma delas participa e as comissões nas quais todas participam. Temos então $C_{10,5} - C_{6,5} - C_{6,1} = 252 - 6 - 6 = 240$ comissões.

75.

a) $C_{8,3} = \dfrac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$

b) Traçando a circunferência circunscrita à este octógono, basta tomar dois vértices pertencentes às extremidades de um diâmetro desta circunferência que, juntamente com qualquer outro vértice, formam um triângulo retângulo. Como são 4 possibilidades de diâmetros sobre os vértices e 6 pontos que sobrarão, teremos um total de $4 \cdot 6 = 24$ triângulos retângulos.

76. Basta contar de quantas maneiras podemos tomar dois dos dez vértices do decágono e descontarmos os segmentos que formam lados. Temos então $C_{10,2} - 10 = 45 - 10 = 35.$

77. Para desenhar o tabuleiro foram necessários nove segmentos de retas horizontais e nove verticais. Para construir o retângulo, basta tomarmos duas retas horizontais e duas verticais, ou seja, $C_{9,2} \cdot C_{9,2} = 36 \cdot 36 = 1296$ retângulos.

78. (Extraído da Vídeo Aula) Basta tomar dois pontos de uma reta e um da outra, ou seja, $4 \cdot C_{5,2} + 5 \cdot C_{4,2} = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 70$ triângulos.

79. (PUC - RJ - Extraído da Vídeo Aula) Escolhe-se primeiro o líder e, com o restante, escolhem-se os outros quatro da equipe, ou seja, $10 \cdot C_{9,4} = 10 \cdot 126 = 1.260$ equipes.

80. (UFRJ - Extraído da Vídeo Aula) No início, final ou entre dois livros de COMBINATÓRIA É FÁCIL, deve haver no máximo um livro de COMBINATÓRIA NÃO É DIFÍCIL. Assim, organizando espaçadamente os onze livros daquele título, obtemos doze espaços (início, fim e entre eles) que deverão ser preenchidos com livros deste título, ou seja, $C_{12,5} = \dfrac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$ maneiras diferentes de dispor todos os livros.

81. (UFRJ - Extraído da Vídeo Aula)

a) Escolhendo duas amigas diferentes a cada final de semana, ela conseguirá convidar no máximo $2 \cdot 53 = 106$ amigas.

b) Júlia deverá escolher uma quantidade mínima de amigas e combiná-las de maneira que consiga preencher todos os finais de semana, ou seja, ela deverá escolher uma quantidade n de amigas de tal forma que $C_{n,2} \geq 53$. Daí temos $\dfrac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \geq 53$. Segue que $n(n-1) \geq 106$. Como n deve ser inteiro e positivo, seu menor valor é 10.

82. (UNICAMP - Extraído da Vídeo Aula)
Para que tenhamos soma par, devemos dividir em dois casos:

i) três números pares: $C_{15,3} = 455$;

ii) dois números ímpares e um número par: $15 \cdot C_{15,2} = 15 \cdot 105 = 1.575$.

Assim, o total de maneiras é $455 + 1575 = 2030$.

83. (Extraído da Vídeo Aula)
O primeiro fato é que o 0 não pode fazer parte do número pois, se fizesse, não poderia estar à esquerda e se estivesse na casa da unidade, dezena ou centena, seria menor que alguém à esquerda. O segundo fato é que todos os algarismos devem ser diferentes. Tomemos agora um destes que atende às característica do problema, por exemplo, 1234. É fácil perceber que, de todas as permutações com os algarismos 1, 2, 3 e 4, apenas em uma delas eles estão em ordem crescente, ou seja, basta escolher quatro algarismos de nove que teremos apenas uma sequência possível. Sendo assim, o total de números é $C_{9,4} = 126$.

84. (Extraído da OBM − 2013)
Suponha que, após abrir C caixas, Led ainda não consiga abrir o portal. Isso significa que há pelo menos uma chave que ele não possui. Então, as caixas que ele abriu possuíam pares de chaves capazes de abrir não mais que 9 cadeados. Logo, teremos $C \leq C_{9,2} = 36$. De fato, se ele abrir caixas que possuem todos os pares das chaves de um conjunto de 9 cadeados, ele não conseguirá abrir o portal. Por outro lado, nota-se também que se Led abrir 37 caixas distintas, saberemos que suas chaves não poderão ser um subconjunto de chaves capazes de abrir não mais que 9 cadeados, pois é maior que 36. Então, o número mínimo de caixas que Led deve abrir é 37.

85. AACS, AASC, ACAS, ACSA, ASAC, ASCA, CAAS, CASA, CSAA, SAAC, SACA, SCAA.

Comentário para professores: Muitos dos problemas de contagem, em especial os de permutação, podem ser facilmente resolvidos através da listagem de todas as possibilidades. Seja através do diagrama da árvore ou através de uma listagem simples, como na solução do exercício anterior, é interessante que essa construção ocorra de forma organizada. No caso de anagramas, sugerimos que as palavras sejam listadas em ordem alfabética; no caso de números, em ordem crescente ou decrescente.

86. Se as duas letras A fossem distintas, digamos A_1 e A_2, teríamos $P_4 = 4!$ anagramas. Esses 24 anagramas podem ser agrupados em 12 pares que representam palavras iguais caso A_1 e A_2 sejam trocados por A. Por exemplo, A_1CA_2S e A_2CA_2S geram a mesma palavra $ACAS$. Sendo assim, Existem $P_4^2 = \dfrac{24}{2} = 12$ anagramas.

87. $P_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$

88. $P_7^{2,2,3} = \dfrac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 210.$

89.

a) $P_8 = 8! = 40.320$.

b) Como as vogais e consoantes não podem ser consecutivas, temos dois casos gerais: começando com vogal (VCVCVCVCVC) ou começando com consoante (CVCVCVCVCV). É fácil perceber que o número de anagramas é o mesmo para ambos os casos. Como todas as consoantes são diferentes e apenas a letra E está repetindo entre as vogais, temos que $2 \cdot P_5^2 \cdot P_5 = 2 \cdot 60 \cdot 120 = 14.400$.

90. (Extraído da Vídeo Aula)
Vamos dividir em dois casos:

i) começando com N: $P_7^4 = \dfrac{7!}{4!} = 210$;

ii) começando com B ou D: $2P_7^{4,2} = 2 \cdot \dfrac{7!}{4! \cdot 2!} = 210$.

Assim, o total de anagramas é $210 + 210 = 420$.

91.

a) Se deve haver um bloco formado por três A's, temos então $P_4^2 = 12$ anagramas.

b) Podemos iniciar com vogal (VCVCVC) ou consoante (CVCVCV). Basta permutar, em ambos, apenas as consoantes, ou seja, $P_3^2 = 3$. Temos então $2 \cdot 3 = 6$ anagramas.

c) $\dfrac{P_6^{2,3}}{3} = \dfrac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 3} = 20$.

92. É o mesmo que contar a quantidade de anagramas de uma palavra com oito letras, sendo quatro iguais e outras quatro iguais também, como por exemplo a palavra VCCVVVCC. Temos então uma permutação com repetição. Sendo assim, são $P_8^{4,4} = \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$ maneiras.

93. (Extraído da Vídeo Aula)
Se são quinze pessoas, teremos quinze lugares na fila. Como existe uma sequência fixa de posicionamente entre os homens, ou seja, primeiro deve estar o menor, depois o segundo menor e assim por diante, precisamos apenas escolher as cinco posições, dentre as quinze, para os homens. O mesmo acontece para as mulheres. Sendo assim, resolver esse problema é o mesmo que contar a quantidade de anagramas de uma palavra com cinco letras iguais e outras dez letras iguais (permutação com repetição). Temos então $P_{15}^{10,5} = \dfrac{15!}{10! \cdot 5!} = 3.003$.

94. (UFRJ - Extraído da Vídeo Aula)
Para que a partícula volte à posição inicial, o número de movimentos para a direita e para a esquerda devem ser iguais a 5, independentemente da ordem, ou seja, resolver esse problema é o mesmo que contar a quantidade de anagramas com as letras da palavra DEDDEEEDDE. Assim temos que o total de maneiras diferentes é $P_{10}^{5,5} = 252$.

95. Vamos pensar em uma sequência de quatro letras iguais com espaços antes, depois e entre as letras ($\_A\_A\_A\_A\_$). Esses cinco espaços representam as cinco crianças, ou seja, o primeiro espaço representa Ana, o segundo, Bruna, o terceiro, Carla, o quarto, Daniela e o quinto, Esmeralda. Agora, podemos preencher esses espaços com os bombons (podendo ser mais de um bombom por espaço), por exemplo AABABAB, significa que Ana e Bruna não receberam bombons e as demais receberam um bombom cada; outro exemplo seria BAABBAA, onde Ana recebeu um bombom, Carla, dois e as demais, nenhum. Assim, para resolvermos o problema, basta calcularmos o total de anagramas da palavra AAAABBB, ou seja, $P_7^{4,3} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ maneiras de premiar os alunos.

96. Vamos analisar a sequência (•• + • + ••••). Basta pensar que o número de pontos antes do primeiro sinal de mais é o valor de x; entre os sinais de mais, o valor de y; e, depois do segundo sinal, de z. Perceba que, para este exemplo, temos $x = 2$, $y = 1$ e $z = 4$, o que nos dá soma 7 e, portanto, é uma solução da equação $x + y + z = 7$. Assim, para encontrarmos o número de soluções naturais, basta permutarmos 7 pontos e 2 sinais de mais entre si, ou seja, $P_9^{2,7} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$.

97. Como não existe zero na solução, usaremos o artifício de substituição de incógnitas, ou seja, faremos $x = a + 1$, $y = b + 1$ e $z = c + 1$, transformando a equação $x + y + z = 7$ em $a + b + c = 4$, sendo a, b, c números naturais. Seguindo a ideia da solução do exercício anterior, temos que permutar 2 sinais de mais e 4 pontos, ou seja, $P_6^{2,4} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$, que é o total de soluções inteiras e positivas para x, y e z.

98. (Extraído da American Mathematics Competitions)
Representemos os sapatos pelos símbolos s_i, com $1 \le i \le 8$, e as meias com m_i, também com $1 \le i \le 8$. Uma sequência desses símbolos em linha produz uma ordem na forma como a aranha deve se calçar. Queremos então determinar todos os anagramas de uma palavra formada por todos esses símbolos em que m_i, com $1 \le i \le 8$, sempre esteja à esquerda de s_i. Das 16! permutações desses símbolos, em exatamente metade delas m_1 está à esquerda de s_1 e na outra metade ele está à direita. Analisando então os $16!/2$ anagramas em que m_1 está à esquerda de s_1, temos que em metade deles m_2 está à esquerda de s_2 e na outra metade à direita. Assim, em $16!/4$ anagramas, as meias m_1 e m_2 são calçadas antes dos sapatos s_1 e s_2. Repetindo o argumento, podemos concluir que em $\dfrac{16!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot} = \dfrac{16!}{2^8}$ anagramas, a aranha calça as meias antes dos sapatos correspondentes.

99. Cada distribuição das pérolas pode ser associada a uma palavra envolvendo as quatro letras A, B, C e D como indica a figura 4.

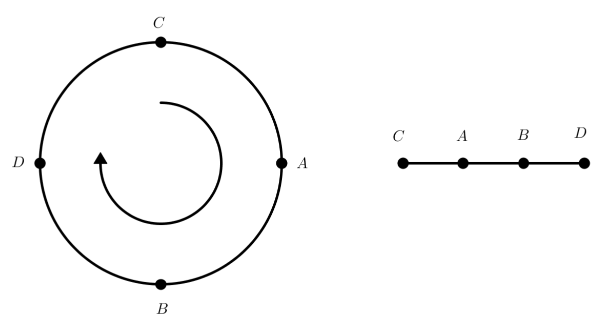


Figura 4: Associando colares e palavras.

Algumas palavras devem ser consideradas iguais pois podemos rodar o colar. Por exemplo:

$$ABCD = BCDA = CDAB = DABC.$$

Veja que cada palavra é igual à exatamente outras três palavras pois podemos rodar o colar três vezes antes de voltarmos à posição inicial e que as rotações correspondem a transposições da letra inicial para o final da palavra. Assim, uma maneira para contarmos as distribuições distintas é contarmos a quantidade total de palavras e depois as agruparmos em grupos de 4 palavras correspondendo a colares iguais entre si. Como existem $4! = 24$ palavras obtidas pelas permutações das letras A, B, C e D, o total de colares é

$$\frac{4!}{4} = 3! = 6.$$

Observação: Em geral, se tivéssemos n pérolas distintas, cada palavra teria n letras e seria igual à exatamente n outras palavras. Consequentemente, o total de colares distintos seria $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$. Usaremos o a notação $PC_n = (n-1)!$ para designar o número de permutações circulares distintas de n objetos distintos em um círculo.

100. O grupo inicial de 6 pessoas pode ser representado pelas letras: A, B, C, D, L(de Lucimar) e N (de Nilton).

a) Por conta da preferência de Nilton, podemos pensar em NL como se fosse uma única letra (bloco) e em cada distribuição como a permutação circular dos símbolos: A, B, C, D e NL, como ilustra a figura 5. Portanto, a resposta para este problema seria $PC_5 = 4! = 24$ disposições.

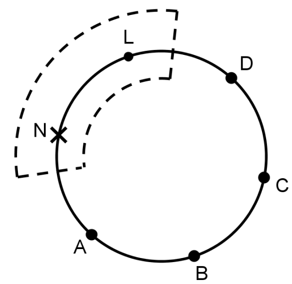


Figura 5: Nilton à direita de Lucimar.

b) Sim, a reposta muda. Assim como no item anterior, podemos usar NL para representar apenas o local onde Lucimar e Nilton estarão posicionados, conforme a figura 6.

Usaremos a contagem obtida no item anterior, pois uma vez escolhido o lugar em que eles ficarão, teremos duas opções de posicioná-los: Nilton à esquerda ou à direita de Lucimar. Portanto, pelo princípio multiplicativo, o total buscado é $2 \cdot PC_5 = 48$ disposições.

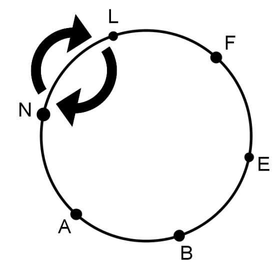


Figura 6: Nilton e Lucimar permutando...

Comentário para professores: Esse é um bom momento para sugestionar em sala que identificar as seguintes estruturas pode simplificar os problemas:

i) Bloco Rígido: agrupamento de símbolos sem permutação entre as respectivas posições.

ii) Bloco: agrupamento de símbolos com permutação entre as respectivas posições.

101. Serão $PC_6 = 5! = 120$ maneiras.

102. O grupo inicial de 6 pessoas pode ser representado pelas seguintes letras: A (de Aline), B (de Bianca), C (de Carla), D, E e F. Como as três letras A, B e C devem aparecer juntas em alguma ordem, podemos considerar o Bloco ABC, isto é, teremos apenas as 4 "pessoas": D, E, F e ABC; distribuídas no círculo (figura 7).

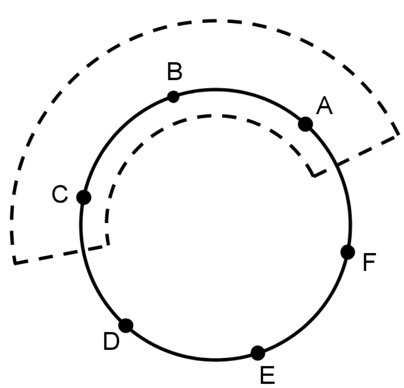


Figura 7: ABC juntas.

Portanto, inicialmente calculamos a permutação circular de 4 objetos: $PC_4 = 3! = 6$ e, em seguida, multiplicamos tal quantidade pelo número de maneiras de permutarmos as amigas que devem ficar juntas. Como as três letras A, B e C podem formar 3! permutações distintas. Portanto, a distribuição dessas crianças pode ser feita de

$$3! \cdot PC_4 = 6 \cdot 6 = 36 \text{ modos.}$$

103. Sejam A e B as crianças que não podem ficar juntas.

Uma solução:
Pode-se formar $PC_5 = 4! = 24$ rodas com as outras cinco crianças, representadas na figura 8 pelo $\bullet$. Agora há 5 espaços (representados pelo ⧫ e pela "?") para colocar a criança A e existem 4 modos para a criança B, o que resulta em

$$24 \times 5 \times 4 = 480 \text{ rodas}$$

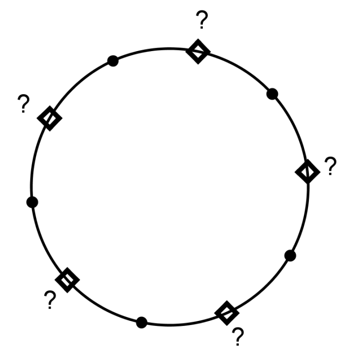


Figura 8: "?" são espaços que podem ser ocupados.

Outra solução:
Observando os 7 lugares na roda, podemos fixar a posição da criança A, ficando com 6 lugares livres, dos quais apenas 4 podem ser ocupados pela criança B (marcados com um "$\times$" na figura 9).
Agora são 5 espaços para cinco crianças serem posicionais, logo 5! maneiras. Logo, obtemos

$$4 \times 5! = 480 \text{ rodas.}$$

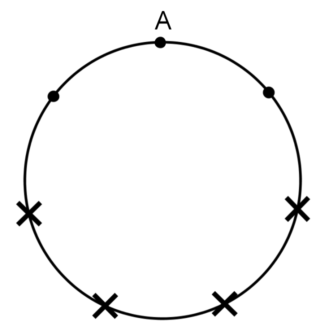


Figura 9: "$\times$" para B.

Mais uma solução:
Se não houvesse condição teríamos $PC_7 = 6! = 720$ maneiras de criar essa roda. Agora, se as duas crianças devessem ficar juntas teríamos um bloco AB que pode ser permutado de 2 maneiras e os 6 integrantes (os 5 originais e o bloco AB) podem ser permutados circularmente de $PC_6 = 5! = 120$ maneiras, o resulta em $2 \times 120 = 240$ formas. Por fim, o total é 720 e em 240 rodas temos formações que não cumpre a condição, então, temos

$$720 - 240 = 480 \text{ rodas.}$$

104. Uma solução:
Como João e Maria devem ficar juntos, JM deve ser um bloco, e agora devemos pensar apenas em "seis" crianças. Dessa forma, pode-se formar $PC_6 = 5! = 120$ rodas. Mas o bloco pode ser JM ou MJ, o que resulta em

$$2 \times 120 = 240 \text{ rodas.}$$

Outra solução:
Observando os 7 lugares na roda, podemos fixar a posição de João, ficando com 2 lugares livres para Maria (esquerda ou direita de João), as demais crianças pode ser permutadas de $5! = 120$ maneiras. Logo, temos

$$2 \times 120 = 240 \text{ maneiras.}$$

105. Apenas como referência, primeiro organizam-se os homens na roda deixando sempre um banco vazio entre cada um deles, isso pode ser feito de $PC_6 = 5! = 120$ maneiras. Depois, em cada espaço entre os homens devem-se arrumar as mulheres de $6! = 720$ modos. Resultando num total de $120 \times 720 = 8640$.

Observação: Não importa se primeiro arrumam-se os homens ou as mulheres, a permutação circular independerá desse início, pois observando apenas um giro no círculo poderia ser colocada a outra arrumação em foco.

106. Fábio (F), Denise (D) e Ledo (L) devem formar um bloco de modo que temos as opções de "FDL" ou "LDF". Agora devemos permutar circularmente o bloco e as outras 5 crianças, isto é, $PC_6 = 5! = 120$, por fim, temos $2 \times 120 = 240$ rodas.

107. Uma solução:
Sem perda de generalidade, podemos começar arrumando os 4 homens deixando sempre uma cadeira vaga entre eles. Isso pode ser feito de $PC_4 = 3! = 6$ modos. Uma vez fixada a forma como os homens estarão dispostos, bastará arrumarmos as mulheres nas 4 cadeiras restantes. O que pode ser feito de $4! = 24$ maneiras. Assim, o total de formações possíveis é

$$6 \times 24 = 144.$$

Agora, há uma condição no problema, João e Maria não podem ficar juntos. Vamos pensar ao contrário, com João e Maria juntos, criando o bloco JM. Fixando João, temos dois lugares possíveis para Maria (à direita ou à esquerda). Depois disso, há $3! = 6$ de dispor os homens e $3! = 6$ modos para posicionar as mulheres. Sendo assim,

$$2 \times 6 \times 6 = 72$$

formações que não desejamos. O que gera

$$144 - 72 = 72 \text{ arrumações com João e Maria separados.}$$

Outra solução:
Primeiro fixemos João como referência, logo, dos 4 espaços reservados para as mulheres, apenas 2 poderão ser ocupados por Maria (os dois mais distantes de João, conforme a figura 10). Os homens poderão se sentar nos 3 lugares restantes de $3! = 6$ modos e as mulheres também. O que resulta em

$$2 \times 6 \times 6 = 72 \text{ arrumações possíveis.}$$

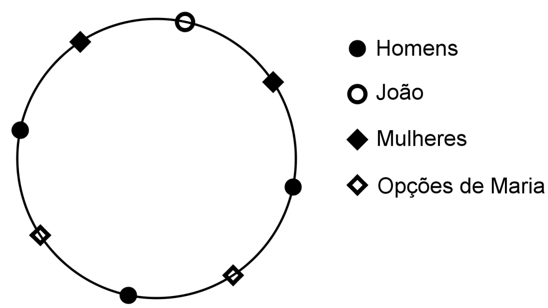


Figura 10: João e Maria.

108. Só há dois blocos na questão, o dos meninos e o das meninas, o que gera apenas um tipo de ciranda (ou para os acostumados com fórmulas: $PC_2 = 1! = 1$). Em cada bloco há $5! = 120$ maneiras de permutar as crianças do mesmo gênero. Portanto, obtemos

$$PC_2 \times 120 \times 120 = 14400 \text{ cirandas.}$$

109.

a) Se cada mulher deve ficar ao lado do seu marido, serão 5 blocos diferentes para serem arrumados em círculo e isso pode ser feito de $PC_5 = 4!$ maneiras para os blocos e podemos ter mulher à esquerda e homem à direita ou *vice-vera*, 2 arrumações por bloco, resultando em

$$24 \times 2^5 = 24 \times 32 = 768 \text{ arrumações possíveis.}$$

b) Com cada mulher ao lado do seu marido e pessoas do mesmo sexo separadas temos as mesmas $PC_5 = 4!$ formações dos blocos, só que não haverá permutação individual em cada bloco e sim apenas as arrumações gerais de homens e mulheres alternadas e isso só pode ser feito de duas maneiras, resultando em

$$24 \times 2 = 48 \text{ arrumações possíveis.}$$

110. Primeiro, observemos que, com a base pentagonal sobre uma mesa, o giro da pirâmide apoiada não cria novas disposições, apenas novas visualizações do mesmo objeto. Sendo assim, devemos fixar uma das faces laterais ("travar o giro") para perceber as diferentes colorações possíveis. Há 6 cores para a base e com as 5 cores restante haverá uma permutação circular ($PC_5 = 4!$). O que resulta em

$$6 \times 24 = 144 \text{ colorações possíveis.}$$

111. Uma solução:
As possíveis duplas para ocupar os bancos podem ser dispostas de:

$$C_{12,2} \cdot C_{10,2} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = \frac{12 \times 11}{2!} \cdot \frac{10 \times 9}{2!} \cdot \frac{8 \times 7}{2!} \cdot \frac{6 \times 5}{2!} \cdot \frac{4 \times 3}{2!} \cdot \frac{2 \times 1}{2!} = \frac{12!}{2^6}$$

Como não importa a ordem de escolha dos casais houve contagens em excesso, 6! vezes a mais. Para corrigir isso, basta

$$\frac{\frac{12!}{2^6}}{6!} = \frac{12!}{2^6 \cdot 6!}.$$

Com as 6 duplas formadas podemos permutá-las circularmente de

$$PC_6 = 5! \text{ maneiras.}$$

Em um banco, cada pessoa pode se sentar de 2 modos (na direita ou na esquerda), como são 6 bancos, serão 2^6 formações. Em resumo, chega-se a

$$\frac{12! \cdot 5! \cdot 2^6}{2^6 \cdot 6!} = \frac{12 \cdot 11!}{6} = 2 \cdot 11! \text{ modos.}$$

Uma solução mais simples:
Vamos fixar, sem perda de generalidade, uma das crianças em um dos bancos. Ela tem 2 opções para sentar em um dos bancos. Agora, observando essa criança como referencial, as outras 11 poderão fazer uma permutação simples dos locais restantes. O que resulta em

$$2 \cdot 11! = 79833600 \text{ modos.}$$

112. Tomando os casos de:

i) $n = 3$, denominemos os pontos como A, B e C. Assim, só há um triângulo, o ABC, pois todas as outras permutações se referem ao mesmo polígono citado, contando inclusive, giros, rotações e translações. Poderíamos pensar em fixar o ponto A, portanto há 2! permutações circulares possíveis, e como o ABC é igual ao triângulo ACB basta dividir por dois o que gera apenas um polígono.

ii) No caso de $n = 4$, denominemos os pontos como A, B, C e D. Fixemos o ponto A, portanto há 3! permutações circulares possíveis, e como as translações não criam novos polígonos, ficaremos com $\dfrac{6}{2} = 3$ polígonos.

iii) No caso de n qualquer, denominemos os pontos como A, B, $\cdots$ e N. Fixemos o ponto A, portanto há $(n-1)!$ permutações circulares possíveis, e como as translações não criam novos polígonos, ficaremos com $\dfrac{(n-1)!}{2}$ polígonos.

113. Os dados podem ser girados em duas direções sem criar formações novas, sendo assim, é necessário fixar dois valores para compor as rotações. Com essas referências postas, automaticamente se definem duas outras faces. Portanto, apenas duas ficam para serem escolhidas, o que gera $2 \times 1 = 2$ dados.

Observação: De modo concreto, coloque o dado sobre uma mesa e fixe a face superior com o 6, portanto a face oposta (a que está em contato com a superfície) será o 1. Agora escolha alguma das faces laterais e coloque o 5, girando para ficar esse número de frente para você, então a respectiva face oposta (a que não está sendo vista) será o 2. Daí, restam apenas duas faces laterais (esquerda e direita) para encaixar o 3 e o 4, poderemos colocar o 3 na esquerda (automaticamente o 4 vai para a direitas) ou colocar o 4 na esquerda (automaticamente o 3 vai para a direitas). Por fim, dois dados diferentes.

114. Sendo um rubi, uma esmeralda, um topázio, uma água-marinha, uma turmalina e uma ametista, ou seja, 6 pedras diferentes.

a) Como há um relógio, só há um sentido do braço ser colocado da pulseira e usando-o como referência fica-se com a permutação das 6 pedras, ou seja, $6! = 720$ arrumações.

b) Usando o fecho como referência fica-se com a permutação das 6 pedras ou $6! = 720$ arrumações. Mas podendo haver a rotação na pulseira foram feitas contagens duplas, portanto, há $\dfrac{720}{2} = 360$ arrumações.

c) Agora teremos que criar uma das pedras como referência e utilizar a a permutação circular e ficaremos com $PC_6 = 5! = 120$ arrumações.

d) Mais uma vez, teremos que criar uma das pedras como referência e utilizar a permutação circular e ficaremos com $PC_6 = 5! = 120$. Mas podendo haver a rotação na pulseira foram feitas contagens duplas, portanto, há $\dfrac{120}{2} = 60$ arrumações.

115. Primeiramente devemos observar quantos são as formas de escolher esses estudantes, para isso, vamos separar em casos:

i) No caso de não haver a participação de José, Cléber, Márcia e Luíza, restarão 8 estudantes dos quais escolheremos 6, sendo assim, a quantidade será igual a $C_{8,6}$, que para efeito de cálculo é o mesmo número que $C_{8,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2!} = 28$ modos. E esses 6 estudantes podem ser permutados circularmente do $PC_6 = 5! = 120$ maneiras. No total de

$$28 \times 120 = 3360 \text{ formas.}$$

ii) No caso da participação de José, Cléber, Márcia e Luíza, restarão 8 estudantes dos quais escolheremos 2, sendo assim, $C_{8,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2!} = 28$ modos, porém após escolhidos esses estudantes tem-se as condições de Márcia e Luíza lado a lado (formarão um bloco ML) e o José e o Cléber separados, observe a figura 11.
Portanto, após posicionar ML (duas maneiras para tal) e os outros 2 estudantes E_1 e E_2 (fora José e o Cléber) teremos uma permutação circular, $PC_3 = 2! = 2$, agora podemos colocar cadeiras vazias entre o bloco ML e a outra dupla de estudantes de modo que José e Cléber ficarão separados, José tem 3 opções e Cléber tem 2, o que resulta em

$$28 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 672 \text{ formas.}$$

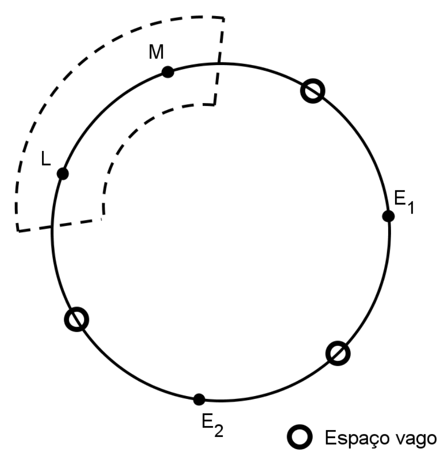


Figura 11: Márcia e Luíza, E_1 e E_2.

Somando os dois casos temos $3360 + 672 = 4032$ arrumações.

Comentário para professores: No item 115 houve o uso da fórmula das combinações complementares ($C_{8,6} = C_{8,2}$). Existe um argumento combinatório interessante para justificar (demonstrar) a validade dessa relação. Afinal, em um grupo de 8 pessoas, ao escolher 6 delas para participar de algo, concomitantemente excluem-se 2 do evento. Cada sexteto escolhido gera uma dupla excluída, se for construída uma função com esse fato, ela será uma bijeção entre o conjunto dos sextetos formados e as duplas dispensadas. De modo geral, entre n pessoas escolher p (fórmula: $C_{n,p}$) resulta no mesmo número que entre n pessoas excluir $n - p$ (fórmula: $C_{n,n-p}$).

116. Uma solução:
Inicialmente deve escolher as cores das faces hexagonais e isso pode ser feito de $C_{8,2} = 28$ modos. Agora, apoie uma das faces sobre uma mesa e perceba que girando as faces laterais não criamos novas formas, mas sim outras observações do mesmo objeto. Devemos fixar uma das faces laterais e executar a permutação circular com as 6 cores restantes, isto é, $PC_6 = 5! = 120$ formas. O que finaliza com

$$28 \times 120 = 3360 \text{ colorações distintas.}$$

Outra solução:
Observe que se fosse uma bandeira com 8 listras teríamos 8! maneiras de pintá-la com cores distintas. Agora, o giro entre as bases do prisma não cria uma nova disposição, logo devemos dividir esse número por 2. Ademais, as rotações do prisma não criam novas pinturas, logo há 6 vezes mais contagens dessa forma. Por fim, obtemos $\dfrac{8!}{2 \cdot 6} = 3360$ maneiras.

Observação: Nesse bloco de conteúdos, quando for citado o conjunto dos naturais estamos falando do conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

117. Vamos utilizar o método desenvolvido no modelo.

a) Para calcular a quantidade de soluções naturais de $x + y = 3$, devemos distribuir três $\bullet$ em duas $\boxed{}$. Dois exemplos seriam:

i) $(3, 0)$ distribui-se como

$$\boxed{\bullet\bullet\bullet} + \boxed{};$$

ii) $(1, 2)$ distribui-se como

$$\boxed{\bullet} + \boxed{\bullet\bullet}.$$

Ou seja, permutar três objetos, sendo dois $\bullet$ e um $+$, o que resulta em $CR_{2,3} = P_4^{3,1} = 4$ pares ordenados de números naturais que resolvem a equação.

b) Para $x + y + z = 7$, no $U = \mathbb{N}$, devemos distribuir sete $\bullet$ em três $\boxed{}$. Dois exemplos seriam:

i) $(4, 3, 0)$ distribui-se em

$$\boxed{\bullet\bullet\bullet\bullet} + \boxed{\bullet\bullet\bullet} + \boxed{}; \text{ e}$$

ii) $(1, 3, 3)$ distribui-se em

$$\boxed{\bullet} + \boxed{\bullet\bullet\bullet} + \boxed{\bullet\bullet\bullet}.$$

Os dois casos destacados ilustram permutações de posição entre 9 elementos, dos quais, sete são $\bullet$ e os dois $+$. Isso pode ser calculado de $CR_{3,7} = P_9^{7,2} = 36$ modos, ou seja, 36 soluções inteiras não negativas.

c) A quantidade de soluções inteiras positivas da equação

$$A + B + C + D = 9$$

pode ser calculada através de uma substituição de variáveis. Fazendo $A = a + 1$, $B = b + 1$, $C = c + 1$ e $D = d + 1$, com a, b, c e d números naturais, após substituição chegamos a

$$a + b + c + d = 5,$$

que, através do método do modelo fica com 5 $\bullet$ em 4 caixas $\boxed{}$, que é o mesmo que 3 sinais de $+$.

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

Essa última equação possui $CR_{4,5} = P_8^{5,3} = 56$ soluções inteiras não negativas (ou inteiras positivas para a primeira).

Comentário para professores: Apesar do tópico de contagem ser de combinações completas, uma das estratégias mais simples para resolver os problemas, como visto nos vídeos, será utilizando um método que se assemelha ao das permutações com elementos repetidos. Sendo assim, em muitas questões preferiremos utilizar o desenvolvimento final pelas permutações, pela simplicidade e beleza das soluções que surgem.

118. Seja C_i a cor que vai ser pintada no carro $i \in \{1, 2, 3\}$. Devemos calcular o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$C_1 + C_2 + C_3 = 6.$$

Seguindo:

i) pelas combinações completas com

$$CR_{3,6} = C_{3+6-1,6} = C_{8,6} = 28 \text{ maneiras; ou}$$

ii) pelo método da permutação de $P_8^{6,2} = 28$ modos.

119. Uma solução:
A ideia é escolher dois números entre $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sendo permitida a escolha com repetição. Para calcularmos todas as opções, teremos que quantificar o número de soluções inteiras não negativas da equação:

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 2$$

na qual f_i, $i \in \{0, 1, \cdots, 6\}$, é a quantidade em cada metade do dominó. Isso resulta em:

i) pelas combinações completas,

$$CR_{7,2} = C_{7+2-1,6} = C_{8,6} = 28 \text{ soluções naturais; ou}$$

ii) pelo método das permutações, em $P_8^{6,2} = 28$ soluções naturais (peças).

Outra solução:
Podemos separar as peças pelos tipos, peças com lados:

i) iguais (buchas): são 7; e

ii) diferentes: são $C_{7,2} = 21$.

O que totaliza $7 + 21 = 28$ peças.

120. Sejam d_i a quantidade de doces e o índice i o tipo do doce escolhido, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e r_h a quantidade de garrafas do refrigerante e o índice h o tipo de refrigerante escolhido, $h \in \{1, 2, 3, 4\}$. Vamos calcular a quantidade das soluções naturais de duas equações, a saber:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 2 \text{ e } r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3$$

A primeira possui $P_6^{2,4} = 15$ soluções naturais e a segunda de $P_6^{3,3} = 20$ soluções naturais. Por fim, o número de total de pedidos pode ser feito de

$$15 \times 20 = 300 \text{ modos.}$$

121. Para saber de quantos modos podemos comprar 6 empadas E_i, $i \in \{c, f, l, p\}$, deveremos

a) calcular o número de soluções naturais da equação

$$E_c + E_f + E_l + E_p = 6,$$

que se resolve de $P_9^{6,3} = 84$ soluções inteiras não negativas.

b) Já que ele quer provar todos os sabores das empadas, teremos todos os $E_i \neq 0$. Apenas haverá escolha nos sabores para as últimas duas empadas, na quantidades de e_i, $i \in \{c, f, l, p\}$, isto é

$$e_c + e_f + e_l + e_p = 2$$

que possui $P_5^{2,3} = 10$ soluções naturais.

122. Uma solução:
Observe que não ter duas letras "A" juntas, automaticamente impede de termos três ou os quatro "A's" juntos. Seja E_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a quantidade de letras antes/depois de cada um dos "A's".

$$\boxed{E_1} \quad A \quad \boxed{E_2} \quad A \quad \boxed{E_3} \quad A \quad \boxed{E_4} \quad A \quad \boxed{E_5}$$

Pelo enunciado, podemos construir a equação

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = 9.$$

E como temos que separar os "A's", então E_2, E_3 e E_4 são positivos. Logo,

i) $E_2 > 0 \Rightarrow E_2 = e_2 + 1$

ii) $E_3 > 0 \Rightarrow E_3 = e_3 + 1$

iii) $E_4 > 0 \Rightarrow E_4 = e_4 + 1$

Que após substituição fica

$$E_1 + e_2 + e_3 + e_4 + E_5 = 6.$$

Para calcularmos o número de soluções inteiras não negativas, teremos:

i) pelas combinações completas,

$$CR_{5,6} = C_{5+6-1,6} = C_{10,6} = 210 \text{ maneiras; ou}$$

ii) pelo método das permutações em $P_{10}^{6,4} = 210$ ocupações dos espaços.

Agora, com os espaços escolhidos, vamos permutar as letras nessas escolhas de $P_9^2 = 181440$ modos. Por fim,

$$210 \times 181440 = 38102400 \text{ anagramas.}$$

Outra solução:
Podemos começar posicionando as letras diferentes de "A".

$$\square \; P \; \square \; R \; \square \; M \; \square \; E \; \square \; T \; \square \; R \; \square \; I \; \square \; Z \; \square \; D \; \square$$

Agora, a permutação das letras diferentes de "A" pode ser feita de

$$P_9^2 = 181440 \text{ modos.}$$

Para escolher quais espaços entre as letras serão ocupados pelos "A's" (para separá-los) teremos $C_{10,4} = 210$ formas.
Por fim, serão $210 \times 181440 = 38102400$ anagramas.

123. Para resolver $x + y + z = 5$ no universo dos naturais deveremos fazer $P_7^{2,5} = 21$.
Por fim, 21 soluções.

124. Primeiro devemos observar as possibilidades de incógnita nula (3 formas: ou x ou y ou z) e depois resolver a nova equação (por exemplo, com $x = 0$) que será $y + z = 4$ que possui $P_5^4 = 5$ soluções naturais. Por fim, temos

$$3 \times 5 = 15 \text{ soluções inteiras não negativas.}$$

125. Sejam d_i a quantidade de anéis em cada dedo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Vamos calcular o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 6.$$

Ela possui $P_9^{6,3} = 84$ soluções naturais não nulas (maneiras de distribuir os anéis).

126. (Extraído do concurso do IBGE)
Podemos tentar seguir listando os casos, como o enunciado ilustra ou buscar um método direto. Sendo assim, seja C_i a quantidade de cadernos na gaveta $i \in \{1, 2, 3\}$, então a solução do problema será através do número de soluções naturais da equação

$$C_1 + C_2 + C_3 = 3$$

que pode ser resolvida de $CR_{3,3} = C_{5,3} = P_5^{2,3} = 10$ modos distintos (soluções inteiras não negativas).

127. (Extraído do vestibular da UNIRIO)
Seja C_i a quantidade de balas recebidas pela criança $i \in \{1, 2, 3\}$ e c_i a quantidade acima de 1 que cada uma recebe, ou seja $C_i = c_i + 1$. Donde seguem as equações

$$C_1 + C_2 + C_3 = 12 \quad \text{e} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 9.$$

A última possui $P_{11}^{9,2} = 55$ soluções inteiras não negativas. Então há 55 maneiras diferentes de distribuir as balas.

128. (Adaptado do concurso para o Banco do Brasil)
Seja S_i a quantidade de chocolates de cada sabor $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. O problema equivale a calcular o número de soluções naturais da equação

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 3$$

que possui $P_6^{3,3} = 20$ soluções inteiras não negativas distintas. Logo, $n = 20$ modos.

129. (Adaptado do concurso para o Banco do Brasil - 2012)
Seja S_i a quantidade de balas de cada sabor $i \in \{1, 2, 3\}$ e s_i a quantidade acima de 3 que cada uma recebe, ou seja $S_i = s_i + 3$. O que segue as equações

$$S_1 + S_2 + S_3 = 13 \quad \text{e} \quad s_1 + s_2 + s_3 = 4.$$

Essa última possui $P_6^{4,2} = 15$ soluções inteiras não negativas.
Logo, ficamos com 15 montagens distintas.

130. Uma solução:
Para calcular o número de soluções naturais de

$$x + y + z \leq 6$$

deveremos calcular o número de soluções naturais das equações:

i) $x + y + z = 0 \implies P_2^2 = 1$;

ii) $x + y + z = 1 \implies P_3^2 = 3$;

iii) $x + y + z = 2 \implies P_4^{2,2} = 6$;

iv) $x + y + z = 3 \implies P_5^{2,3} = 10$;

v) $x + y + z = 4 \implies P_6^{2,4} = 15$;

vi) $x + y + z = 5 \implies P_7^{2,5} = 21$; e

vii) $x + y + z = 6 \implies P_8^{2,6} = 28$.

Por fim, obtemos

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84 \text{ soluções naturais.}$$

Comentário para professores: Na questão 130 ficamos com a soma

$$S = P_2^2 + P_3^2 + P_4^{2,2} + P_5^{2,3} + P_6^{2,4} + P_7^{2,5} + P_8^{2,6}.$$

Uma expressão equivalente a seria

$$S = C_{2,2} + C_{3,2} + C_{4,2} + P_{5,2} + C_{6,2} + C_{7,2} + C_{8,2}$$

que pode ser resolvido pelo "Teorema das Colunas"

$$C_{2,2} + C_{3,2} + C_{4,2} + P_{5,2} + C_{6,2} + C_{7,2} + C_{8,2} = C_{9,3}.$$

Daí, esse tipo de problema pode ser resolvido com menos contas.

130. Outra solução:
Defina para cada solução, no universo $\mathbb{N}$, de $x + y + z \leq 6$ o conceito "*folga*" da solução como o valor

$$f = 6 - x - y - z.$$

Observe o quadro abaixo para entender a utilidade da *folga* em alguns exemplos de soluções.

x	y	z	$x+y+z$	f
3	2	1	6	0
2	0	1	3	3
1	1	1	3	3
0	1	0	1	4

Utilizando a *folga* poderemos transformar a inequação inicial na equação

$$x + y + z + f = 6$$

que possui, pelo método,

$$P_9^{6,3} = 84 \text{ soluções naturais.}$$

131. Separando os casos pela quantidade de algarismos, com {W,X,Y,Z,...} os algarismos utilizados, sendo W o de maior ordem, $W > 0$, $W = w + 1$, obtemos as equações e a quantidade de soluções inteiros em cada indicarão o valor procurado.

i) $W = 6 \Rightarrow w = 5 \Rightarrow P_5^5 = 1$

ii) $W + X = 6 \Rightarrow w + Y = 5 \Rightarrow P_6^{5,1} = 6$

iii) $W + X + Y = 6 \Rightarrow w + X + Y = 5 \Rightarrow P_7^{5,2} = 21$

iv) $W + X + Y + Z = 6 \Rightarrow w + X + Y + Z = 5 \Rightarrow P_8^{5,3} = 56$

Por fim, temos $1 + 6 + 21 + 56 = 84$ números naturais.

132. Para escolher os 4 elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ podemos pensar em relacionar cada elemento escolhido com um mais $(+)$ e cada um dos excluídos com um menos $(-)$. Seguem alguns exemplos:

i) $\{1,3,5,7\} \implies \{+,-,+,-,+,-,+,-,-\}$

ii) $\{1,4,6,8\} \implies \{+,-,-,+,-,+,-,+,-\}$

iii) $\{2,4,7,9\} \implies \{-,+,-,+,-,-,+,-,+\}$

Portanto, estamos permutando 4 sinais de $+$ e 5 de $-$ e o solicitado é que não haja dois sinais de mais $(+)$ seguidos.

$$\boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?}$$

Por fim, dentro os 6 espaços livres ($\boxed{?}$) devemos escolher 4 para os sinais de $+$ e isso pode ser feito de $C_{6,4} = 15$ maneiras.

Observação: Esse resultado ilustra (com exemplo) o *Primeiro Lema de Kaplansky*.

133. Vamos tentar reduzir o problema atual para o método do Primeiro Lema de Kaplansky.

i) Caso o elemento 1 seja escolhido, faltarão 3 elementos no conjunto que sairão de $\{3,4,5,6,7,8,9\}$, não perca de vista que os vizinhos não poderão ficar juntos. Algumas soluções seriam:

   i) $\{3,5,7\} \implies \{+,-,+,-,+,-,-\}$

   ii) $\{3,6,8\} \implies \{+,-,-,+,-,+,-\}$

   iii) $\{4,7,9\} \implies \{-,+,-,-,+,-,+\}$

   Portanto, estamos permutando 3 sinais de $+$ e 4 de $-$ e o solicitado é que não haja dois sinais de $+$ seguidos.

$$\boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?}$$

   Por fim, dentro os 5 espaços livres ($\boxed{?}$) devemos escolher 3 para os sinais de $+$ e isso pode ser feito de $C_{5,3} = 20$ maneiras.

ii) Caso o elemento 1 não seja escolhido teremos a escolha de 4 elementos no conjunto $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, não perca de vista que os vizinhos não poderão ficar juntos. Algumas soluções seriam:

   i) $\{2,4,7,10\} \implies \{+,-,+,-,-,+,-,-,+\}$

   ii) $\{3,5,7,9\} \implies \{-,+,-,+,-,+,-,+,-\}$

   Portanto, estamos permutando 4 sinais de $+$ e 5 de $-$ e o solicitado é que não haja dois sinais de $+$ seguidos.

$$\boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?} - \boxed{?}$$

   Daí, dentro os 6 espaços livres ($\boxed{?}$) devemos escolher 4 para os sinais de $+$ e isso pode ser feito de $C_{6,4} = 15$ maneiras.

Por fim, $20 + 15 = 35$ maneiras.

Observação: Esse resultado ilustra (com exemplo) o *Segundo Lema de Kaplansky*.

134. Fica claro que a semana poderia ser disposta num círculo a partir de Segunda (por exemplo) e "finalizando" no Domingo (no caso específico) e recomeçando ciclicamente.
Vamos tentar, outra vez, reduzir o problema ao raciocínio do Primeiro Lema de Kaplansky.

i) Caso ele vá Segunda para a academia, portanto faltam 2 dias no conjunto {Quarta, Quinta, Sexta, Sábado}, precisamos escolher dois deles sem ser sequenciados. Ou seja,

$$\boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?}$$

Daí, dentro os 3 espaços livres devemos escolher 2 para os sinais de $+$ e isso pode ser feito de $C_{3,2} = 3$ maneiras.

ii) Caso ele não vá Segunda para a academia, portanto escolherá 3 dias no conjunto {Terça, Quarta, Quinta, Sexta, Sába precisamos escolher três deles sem ser sequenciados. Ou seja,

$$\boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?}$$

Daí, dentre os 4 espaços livres devemos escolher 3 para os sinais de $+$ e isso pode ser feito de $C_{4,3} = 4$ maneiras.

Por fim, $3 + 4 = 7$ maneiras.

Observação: Outra ilustração do *Segundo Lema de Kaplansky*.

Comentário para professores: Os Lemas de Kaplansky possuem fórmulas que reduzem substancialmente os cálculos anteriores, contudo, ficou claro que com atenção e uso dos recursos (procedimentos de contagem) é possível resolver os problemas. Esses Lemas preparam o terreno para resolver o Problema de Lucas que enuncia-se com:
De quantas maneiras n casais podem sentar em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?
Cuja resolução não será feita aqui!

135.

a) Para cada elemento $i_m \in I_m$ temos n opções de imagem em I_n, portanto serão

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{\text{m fatores iguas a n}} = n^m \text{ funções.}$$

b) Para o elemento $i_1 \in I_m$ temos n opções de imagem em I_n, para i_2 são $n-1$ opções, para 3 são $n-2, \ldots,$ para o elemento m são $n - m + 1$, portanto serão

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ funções.}$$

c) Devemos escolher os elementos que farão parte da imagem e isso pode ser feito de $C_{n,m}$, a ordenação deles será de modo crescente associando o menor $y_i \in I_n$ destacado como a imagem de 1 e segundo menor como imagem de 2 e assim por diante.

d) Seja Y_i a quantidade de domínios associados ao elemento $i \in I_n$, fica claro que o somatório desses $Y's$ deve ser igual a quantidade de elementos do conjunto I_m, isto é, m.

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = m$$

e o número de soluções dessa equação é calculado como $CR_{n,m} = C_{n+m-1,m} = P^{m,n-1}_{m+n-1}$, a ordenação deles será de modo não decrescente associando o menor $y_i \in I_n$ destacado como a imagem de 1 e segundo menor ou igual, como imagem de 2 e assim por diante.

136. Sejam d_i a quantidade de anéis em cada dedo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Primeiro, vamos escolher os dedos e a quantidade de anéis em cada dedo e isso é feito observando as soluções naturais da equação $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 6$, que são $P_9^{6,3} = 84$.
Segundo, os anéis são diferentes, sendo assim, podem ser permutados de $6! = 720$ maneiras. Portanto, obtemos

$$84 \times 720 = 60480 \text{ colocações.}$$

137. (Extraído do vestibular do IME)
Vamos separar em casos a partir de um determinado cavaleiro como referência (seja o 1), agora no sentido horário chame os demais de 2, 3, $\cdots$, 12 (observe que 1 e 12 são vizinhos).
i) se 1 for escolhido restam 4 vagas entre os cavaleiros $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, usando o raciocínio de itens anteriores, serão cinco $-$ e quatro $+$, de modo que dois sinais de $+$ sempre serão separados.

$$\boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?}$$

Ou seja, vamos escolher 4 espaços vazios ($\boxed{?}$) dentro os seis disponíveis de $C_{6,4} = 15$ modos.
ii) se 1 não for escolhido ficam as 5 vagas entre os cavaleiros $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, usando o raciocínio de itens anteriores, serão seis $-$ e cinco $+$, de modo que dois sinais de $+$ sempre serão separados.

$$\boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?} \quad - \quad \boxed{?}$$

Ou seja, vamos escolher 5 espaços vazios ($\boxed{?}$) dentre os sete disponíveis de $C_{7,5} = 21$ modos. Por fim, serão

$$15 + 21 = 36 \text{ grupos.}$$

138. Como há 12 signos do zodíaco, basta $n = 13$ para que duas pessoas tenham o mesmo signo.
A ideia é pensar nos Signos como as casas e nas pessoas como os pombos.

$\bullet$
Pombo sem casa, o 13° elemento.

$$\underset{\text{Casa 1}}{\boxed{\bullet}} \quad \underset{\text{Casa 2}}{\boxed{\bullet}} \quad \underset{\text{Casa 3}}{\boxed{\bullet}} \quad \cdots \quad \underset{\text{Casa 12}}{\boxed{\bullet}}$$

Logo, há 12 casas, e para que alguma das casas tenha dois pombos, basta ter $n = 12 + 1$ pombos.

139. Vamos pensar na quantidade de frutos como as casas e nas jaqueiras como os pombos ($\bullet$)

$$0, 1, 2, \cdots, 600$$

$$\underset{\text{0 fruto}}{\boxed{\bullet}} \quad \underset{\text{1 fruto}}{\boxed{\bullet}} \quad \underset{\text{2 frutos}}{\boxed{\bullet}} \quad \cdots \quad \underset{\text{600 frutos}}{\boxed{\bullet}}$$

Agora coloquemos as jaqueiras (que serão os pombos) nas respectivas casas que representam suas quantidades de frutos.

$\bullet$ $\searrow$

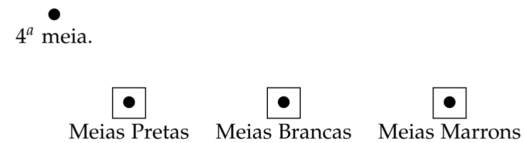
Caso ocupemos todas as casas, ainda haverá
399 jaqueiras a serem distribuídas.

$$\underset{\text{0 fruto}}{\boxed{\bullet}} \quad \underset{\text{1 fruto}}{\boxed{\bullet}} \quad \underset{\text{2 frutos}}{\boxed{\bullet}} \quad \cdots \quad \underset{\text{600 frutos}}{\boxed{\bullet}}$$

Como $1000 > 601$, o PCP garante que alguma casa terá dois pombos. O que prova o que foi pedido! $\blacksquare$

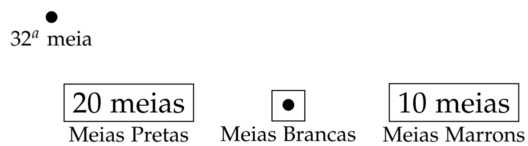
140. Considere as três cores como sendo as casas e as meias retiradas como os pombos.

a) Pelo Princípio da Casa dos Pombos, se retirarmos 4 meias, pelo menos duas delas terão a mesma cor. Para ver que esse é o número mínimo, note que é possível pegarmos uma meia de cada cor nas três primeiras retiradas e não formarmos um par.



Resposta: 4 meias.

b) Observe que o cenário mais difícil para o objetivo é retirar todas as meias de cor preta, todas as meias de cor marrom e depois o par de cor branca. Para isso, deveremos retirar $20 + 10 + 2 = 32$ meias para garantir o par de cor branca.



Resposta: 32 meias.

141. Seja x_i a quantidade de aniversariantes no mês $i \in 1, 2, \ldots, 12$. Daí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} = 54.$$

Fazendo a média aritmética temos

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}}{12} = \frac{54}{12} = 4,5.$$

O número médio de aniversariantes por mês é $4,5$.

142.

a) Seja $x_i \in \mathbb{N}$ a quantidade de aniversariantes no mês $i \in 1, 2, \ldots, 12$. Daí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} = 54.$$

Fazendo a média aritmética temos

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}}{12} = \frac{54}{12} = 4,5.$$

O número médio de aniversariantes por mês é $4,5$, e pela proposição 1, ao menos um dos x_i será maior do que ou igual a média. Como x_i é natural, seu menor valor será, no mínimo, 5. ∎

b) As 4 primeiras questões podem ser respondidas de $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ maneiras. O número médio de candidatos para cada possível resposta é $\dfrac{40100}{625} = 64,16$. Pelo proposição 1, garante-se que ao menos 65 candidatos terão mesma resposta para as primeiras 4 questões.

c) As n primeiras questões podem ser respondidas de $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ maneiras. Para garantir que pelo menos 4 candidatos respondam a estas questões do mesmo modo, precisa-se ter pelo menos $3 \cdot 2^n + 1$ candidatos. Portanto, deve-se ter no mínimo

$$3 \cdot 2^n + 1 \leq 98305.$$

O que ocorre para $n \leq 15$. Por fim, o valor máximo é para $n = 15$.

143. Demonstração:
Dada a lista $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ com todos esses números menores que a média, isto é:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & < & \overline{x} \\ x_2 & < & \overline{x} \\ x_3 & < & \overline{x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & < & \overline{x} \end{array}$$

Somando todas as inequações obtemos:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & < & \underbrace{\overline{x} + \overline{x} + \overline{x} + \cdots + \overline{x}}_{n \text{ parcelas iguais a } \overline{x}.} \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & < & n \cdot \overline{x} \\ \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} & < & \overline{x} \\ \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} & < & \overline{x} \\ \overline{x} & < & \overline{x} \end{array}$$

Concluímos que a média aritmética é menor do que a média aritmética, **absurdo**. Portanto, não podemos ter todos os x_i, com $i \in \{1, 2..., n\}$, menores do que $\overline{x}$. Ou seja, ao menos um dos x_i é maior do que ou igual a $\overline{x}$. (Análogo para o caso de ter valores menores do que ou iguais a média aritmética.) ■

144. Seja x_i, com $i \in \{$Flamengo, Botafogo, Fluminense, Vasco$\}$ a quantidade de torcedores do time i.

$$x_{Flamengo} + x_{Botafogo} + x_{Fluminense} + x_{Vasco} = 90$$

e a média de torcedores por time fica:

$$\overline{x} = \frac{90}{4} = 22,5.$$

Portanto, utilizando a proposição 1, algum $x_i > 22,5$ e como $x_i \in \mathbb{N}$, há alguma torcida com, no mínimo, 23 integrantes. ■

145. Considere os candidatos como os pombos e as sequências de respostas como as casas. Como cada questão possui de 5 alternativas, a prova poderá ser respondida de

$$5 \times 5 \times 5 \times \cdots \times 5 = 5^{10} = 9765625 \text{ modos.}$$

Logo, pelo PCP, para que dois candidatos forneçam exatamente as mesmas respostas, deverão participar pelo menos 9765626 pessoas.

146. Como há 6 faces, para ter certeza que ao menos um delas saiu:

i) 2 vezes, deveremos ter ao menos 7 lançamentos;

ii) 3 vezes, deveremos ter ao menos 13 lançamentos;

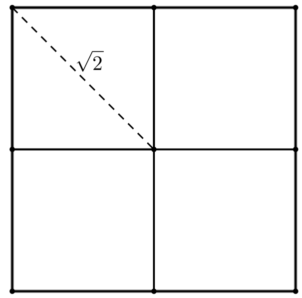
iii) 4 vezes, deveremos ter ao menos 19 lançamentos;

iv) 5 vezes, deveremos ter ao menos 26 lançamentos; e

v) 6 vezes, deveremos ter ao menos 31 lançamentos.

No mínimo, $d = 31$ lançamentos.
A ideia é pensar que o número em cada face representa uma casa (6 números = 6 casas). Queremos alguma casa com mais do que 5 pombos (lançamentos) então deve-se distribuir os resultados dos lançamentos nas respectivas casas, nosso objetivo é alcançar uma casa com mais de 5 repetições. Isso pode acontecer "no pior dos cenários" se todas as casas forem sendo preenchidas até chegar ao número 5, esse quadro será alcançado após 30 lançamentos. Portanto, no 31° lançamento teremos o objetivo alcançado!

147. Em um problema geométrico nem sempre é simples perceber como construir as casas dos pombos, mas é imediato concluir que os pontos representam os pombos. As casas deverão ser pensadas de modo a que em algum momento surja algum segmento de comprimento $\sqrt{2}$. Sendo assim, observe a construção abaixo:



e perceba que há quatro quadrados internos (surgiram as casas) de lado medindo 1 cm e diagonal medindo $\sqrt{2}$. Por fim, como são cinco pontos, ao menos uma das casa terá dois pontos e a distância entre eles será de, no máximo, $\sqrt{2}$. ∎

148. Sejam x_i, com $i \in 1,2,3,4,5$ as idades dos cinco estudantes, de modo que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 86 \text{ anos.}$$

Com 5 estudantes podemos formar $C_{5,3} = 10$ trios, de modo que cada estudante participe de $C_{4,2} = 6$ trios (uma das três vagas seria de x_1, por exemplo, e os outros 4 estudantes disputam as outras duas vagas). Podemos destacar todos os trios possíveis sendo somados em 10 expressões:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= \\
x_1 + x_2 + x_4 &= \\
x_1 + x_2 + x_5 &= \\
x_1 + x_3 + x_4 &= \\
x_1 + x_3 + x_5 &= \\
x_1 + x_4 + x_5 &= \\
x_2 + x_3 + x_4 &= \\
x_2 + x_3 + x_5 &= \\
x_2 + x_4 + x_5 &= \\
x_3 + x_4 + x_5 &= \quad \text{, somando-as, obtemos} \\
6 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) &= 6 \cdot 86 \quad = \quad 516.
\end{aligned}$$

Portanto, a média dos trios será $\dfrac{516}{10} = 51,6$ anos. Usando a proposição 1, ao menos um dos trios terá soma maior do que ou igual a 51. ∎

149. Numa divisão por oito existem os restos $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, portanto 8 opções (casas). Tomando os 9 inteiros (pombos), disporemos cada um na respectiva casa que representa o seu resto na divisão por 8. Sendo 9 pombos, pelo PCP, alguma casa terá dois deles e a diferença entre esses será divisível por 8. ∎

150.

a) Para as 5 primeiras questões há $4^5 = 1024$ gabaritos distintos. É possível termos 2048 candidatos de modo a cada gabarito se repetir duas vezes. Daí, se houver 2049 pessoas está garantido que alguma sequência de respostas foi repetida ao menos 3 vezes.

b) Para as n primeiras questões há 4^n gabaritos distintos. Entre 1000 candidatos garante-se que ao menos 2 responderam da mesma forma se
$$1000 \geq 4^n + 1,$$
ou seja $4^n \leq 999$, que, observando o item anterior, se resolve com no máximo $n = 4$.

151. (Extraído do Vestibular da PUC/RJ)
Pensando nos 12 meses como as casas e as n pessoas como os pombos. Se houver uma distribuição de 3 pessoas em cada mês não se chega ao objetivo do problema e já teriam sido observadas $12 \times 3 = 36$ pessoas no grupo. Agora basta que mais uma pessoa seja colocada em qualquer das casas para concluir o problema. Portanto, 37 pessoas num grupo garantem que ao menos 4 nasceram no mesmo mês.

152. (Extraído do Vestibular da UERJ/RJ - 2011)
10 cores = 10 casas. Busca-se uma casa com 4 pombos (bolas de mesma cor). Isso acontecerá, "no pior dos cenários", se todas as casas forem sendo preenchidas até chegar ao número 4, esse quadro será alcançado após 31 retiradas. Na 30^a retirada cada casa terá três pombos e no lançamento seguinte está garantido o objetivo alcançado!

153. Todo número inteiro pode ser escrito da forma $2^n \cdot b$, com b ímpar e n natural. Observando o conjunto percebemos que $b \in \{1, 3, 5, 7, 9, \cdot, 79\}$, subconjunto com 40 elementos (casas). Como serão escolhidos 41 números (pombos), ao menos dois deles , pelo PCP, terão o mesmo b ($x = 2^{n_1} \cdot b$ e $y = 2^{n_2} \cdot b$, com $x < y$). Daí concluímos que x divide y. ■

154. Vamos pensar na quantidade de conhecidos como as casas

$$0, 1, 2, \cdots, n-1$$

Agora coloquemos as pessoas (que serão os pombos) nas respectivas casas que representam suas quantidades de conhecidos. Há n pessoas e n gavetas, mas as gavetas 0 e $n-1$ não poderão ser preenchidas ao mesmo tempo, afinal, se alguém conhece $n-1$ dos presentes, não há como outra pessoa ficar sem conhecidos no grupo (e *vice-versa*). O que reduz a "quantidade prática" das gavetas para $n-1$. O PCP garante que alguma casa terá dois pombos. O que prova o que foi pedido! ■

155. A inequação simultânea $1 < \dfrac{y}{x} \leq 2$ pode ser reescrita como $x < y \leq 2x$. Vamos criar 6 conjuntos (casas) com elementos que verificam essa inequação. Para tal, construiremos conjuntos com os números de x até $2x$ como segue:

$$\begin{array}{l}
\{1, 2\} \\
\{3, 4, 5, 6\} \\
\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} \\
\{15, 16, 17, \cdots, 28, 29, 30\} \\
\{31, 32, 33, \cdots, 60, 61, 62\} \\
\{63, 64, 65, \cdots, 122, 123, 126\}
\end{array}$$

Qualquer dupla pertencente a um mesmo conjunto verifica a inequação. Se fossem 6 números (pombos), poderíamos escolher um de cada conjunto e a afirmação não seria verdadeira. Como são 7 números (pombos), pelo PCP, haverá dois deles pertencentes ao mesmo conjunto e isso demonstra o que foi pedido. ■

156. Construa os n subconjuntos de números consecutivos

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \cdots, \{2n-1, 2n\}$$

essas serão as casas. Como serão destacados $n+1$ elementos (pombos), pelo PCP, alguma dupla será escolhida no mesmo conjunto e será composta por números primos entre si. ■

157. Tome a sequência

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \cdots, \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}n+1\text{” uns.}}$$

Esses $n+1$ números (pombos), serão distribuídos nas n casas que representam os possíveis restos numa divisão por n. Pelo PCP, teremos dois pombos na mesma casa. A subtração entre esses números será:

$$\underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a\text{” uns.}} - \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}b\text{” uns.}} = \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a-b\text{” uns}}\underbrace{000\ldots000}_{\text{“}b\text{” zeros.}}$$

sendo “a” maior do que “b”. O que finaliza a demonstração. ∎

158. Tome a sequência

$$1, 11, 111, 1111, \cdots, 11111111$$

Esses 8 números (pombos), serão distribuídos nas 7 casas que representam os possíveis restos numa divisão por 7. Se algum deles estiver na casa do “zero”, então a demonstração acabou (isso ocorre com o 111111). Caso contrário, pelo PCP, teremos dois pombos na mesma casa. A subtração entre esses números será:

$$\underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a\text{” uns.}} - \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}b\text{” uns.}} = \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a-b\text{” uns}}\underbrace{000\ldots000}_{\text{“}b\text{” zeros.}}$$

sendo “a” maior do que “b”. Como

$$\underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a-b\text{” uns}}\underbrace{000\ldots000}_{\text{“}b\text{” zeros.}} = \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a-b\text{” uns}} \cdot 10^b.$$

que será múltiplo de 7, que, por sua vez, não divide 10^b, portando dividirá $\underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a-b\text{” uns}}$. ∎

Comentário para professores: O método desenvolvido no problema 158 poderá ser aplicado para qualquer número que seja relativamente primo com 10. Ou seja, qualquer número que não possua em sua fatoração o 2 ou o 5, possui um múltiplo apenas com algarismos iguais a 1.

159. (Extraído da OBM)
Considere todos os números da forma $199\ldots91$ (pombos) e observe os 1991 possíveis restos numa divisão por 1991 (casas). Como há mais pombos do que casas, teremos dois deles na mesma casa e a subtração entre eles será um múltiplo de 1991 da forma $199\ldots9980\ldots0$. Sendo $mdc(10, 1991) = 1$ podemos eliminar zeros à direita sem perder a divisibilidade por 1991. Façamos isso até chegarmos ao número $199\ldots998000$, agora, basta somarmos 1991 e chegamos a um número do tipo $199\ldots91$ ∎

160. (Extraído da IMO)
Seja C um conjunto com 10 elementos. Ele possui

$$2^{10} - 2 = 1022 \text{ subconjuntos}$$

diferentes de C e não vazios, serão os pombos. Como os elementos possuem dois dígitos, então:

i) a menor soma entre nove deles[1] será

$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 145$$

ii) e e a maior será

$$91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 = 855.$$

Os números de 145 até 855 representam as casas, isso resulta em

$$855 - 145 + 1 = 711 \text{ casas.}$$

Como há mais pombos do que casas teremos ao menos dois na mesma casa. Agora, tome os subconjuntos que geraram mesma soma (estão na mesma casa) e descarte os elementos comuns (criando assim os subconjuntos disjuntos). Pronto, chegamos aos dois conjuntos disjuntos com elementos somando o mesmo valor. ∎

[1]Não iremos usar os 10 elementos pois queremos dois subconjuntos disjuntos, sem interseção.

161. (Extraído da IMO)
Escolha uma pessoa do grupo, por exemplo, Maria. Ela se corresponde com 16 outras pessoas. Pelo PCP, Maria debaterá algum tópico com ao menos 6 pessoas, por exemplo o tema I. Se duas dessas 6 debaterem esse tema, esta demonstrado. Caso contrário, essas seis só debatem entre si os temas II e III. Seja uma delas o Paulo. Pelo PCP, das 5 pessoas restantes, ao menos 3 vão debater um dos tópicos restantes, suponha que seja o II. Se entre essas três tivermos um par que debate do tópico II entre si, então somamos Paulo e finalizamos a demonstração. Caso negativo, esses três elementos só debaterão entre si no tópico III e a demonstração acabou. ■

162. (Extraído do material do PROFMAT)
Em 11 semanas temos 77 dias. Defina S_i, $i \in 1, 2, \cdots, 77$ como sendo o número de partidas jogadas a partir do dia 1 até o dia i. Como ele joga ao menos uma partida por dia, temos

$$1 \leq S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_{77}.$$

Além disso, $S_{77} \leq 132$, pois ele não joga mais de 12 partidas por semana, ou seja, o total de jogos não atinge $11 \cdot 12 = 132$. Agora, chamando $S_0 = 0$, a quantidade de jogos entre os dias a e b, inclusive, é igual a $S_b - S_{a-1}$. Queremos mostrar que é possível determinar a e b de momo que $S_b - S_{a-1} = 20$. Considere os 154 números (que serão os pombos)

$$S_1, S_2, \ldots, \underbrace{S_{77}}_{\leq 132}, S_1 + 20, S_2 + 20, \ldots, \underbrace{S_{77} + 20}_{\leq 152}.$$

Eles pertencem a $\{1, 2, \ldots, 152\}$, que serão as casas. O PCP assegura que alguma casa terá dois pombos. Como

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_{77}$$

e, por consequência,

$$S_1 + 20 < S_2 + 20 < S_3 + 20 < \cdots < S_{77} + 20,$$

os números iguais deverão estar em metades diferentes da lista[2]. Então existem a' e b' tais que $S_{b'} = S_{a'} + 20$. O enxadrista joga 20 partidas entre os dias $b' + 1$ e a', inclusive. ■

[2]**Não** podemos concluir que para todo j e i, $j, i \in \{1, 2, \ldots, 77\}$, é verdade que $S_i < S_j + 20$. Se, por exemplo, $S_1 = 1$ e $S_14 = 22$, teríamos $S_14 > S_1 + 20$. Por isso não podemos fazer afirmações desse tipo sobre S_i e $S_j + 20$.