Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Curso de Álgebra – Nível 2 Aula 0

Professores: Cleber Assis, Samuel Barbosa e Tiago Miranda

POTI 2015

Curso Básico

Álgebra

Este material compila os arquivos do projeto Portal da Matemática, disponível em

`http://matematica.obmep.org.br/`

e serve como introdução aos tópicos iniciais de um curso de treinamento olímpico. Em geral, os assuntos são independentes e podem ser estudados em qualquer ordem. Neles, o leitor encontrará muitos exercícios escolares mesclados com problemas elementares de olimpíadas, todos com respostas e soluções. Além disso, no endereço do Portal da Matemática, existem vídeos que podem ser acessados gratuitamente cobrindo todo o conteúdo abaixo. Bons estudos!

Sumário

Versão: 83 (Data: 27 de abril de 2015.)

1 Potenciação

Problema 1. Calcule o valor das expressões:

a) 3^5. b) $2^2 + 3^2$. c) 5^4. d) $2^3 + 3^3$. e) $\frac{1}{2} \cdot 2^4 \cdot 3$.

Problema 2. Calcule o valor das expressões:

a) $(0,01)^3$. b) $100 \cdot \frac{1}{5^2}$. c) $80 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$. d) $\frac{1}{3} \cdot (0,3)^2$. e) $200 \cdot (0,04)^4$.

Problema 3. Se $a = 2$ e $b = 3$, calcule o valor das expressões:

a) $\frac{a^3 b}{b^2}$. b) a^b. c) $a^3 b^2$. d) $(ab^2)^2$. e) $(b + a)^2 - a^2$.

Problema 4. Escreva como um única potência:

a) $\frac{2^4 \cdot 2^6}{3^7 \cdot 3^3}$. b) $\frac{4^6 \cdot 8^2}{16^3}$. c) $(-32)^{3^2}$. d) $\frac{10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10^{-7} \cdot 10^4}$. e) $8^3 : 2^{-5}$.

Problema 5. Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.

a) $a^n b^n = (a \cdot b)^n$. b) $a^{-n} = -a^n$. c) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a - b)^n$. d) $(a^n)^m = a^{nm}$. e) $(a^n)^m = a^{(n^m)}$.

Problema 6. Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$. b) $(a + b)^n = a^n + b^n$. c) $a^{n+m} = a^n + a^m$. d) $(a^n)^{-n} = a^0$. e) Se $a \neq 0$ então $a^0 = 1$.

Problema 7. Calcule as potências:

a) $(0,3)^2$. b) $(0,3)^{-2}$. c) $(-0,02)^3$. d) $(-3)^{-2}$. e) $(1,2)^3$

Problema 8. Escreva cada um dos seguintes números como uma potência de 2:

a) $(-0,5)^{-4}$. b) $[(-0,25)^2]^{-6}$. c) $16^2 : (0,25)^{-4}$. d) $32^{-2} : (0,25)^{-4}$. e) $0,16 \cdot 10^2$.

Problema 9. Determine, em cada item, qual dos números é o maior.

a) $2^{1/2}$ ou $2^{1/3}$. b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ ou $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$. c) $3^{1/5}$ ou $5^{1/3}$.

Problema 10. Dividindo-se o número 4^{4^2} por 4^4 obtemos o número:

a) 2 b) 4^3 c) 4^4 d) 4^8 e) 4^{12}

Problema 11. Definamos a operação $a \otimes b$ como sendo a^b. Por exemplo, $2 \otimes 3 = 8$. Determine o valor de:

$$\frac{2 \otimes (2 \otimes (2 \otimes 2))}{((2 \otimes 2) \otimes 2) \otimes 2}.$$

a) $\frac{1}{256}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 1 d) 4 e) 256

Problema 12. Para os inteiros a e b definimos $a * b = a^b + b^a$. Se $2 * x = 100$, a soma dos algarismos de $(4x)^4$ é igual a:

a) 20 b) 25 c) 30 d) 35 e) 27

Problema 13. Com quantos zeros termina o número $15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7$?

a) 10 b) 18 c) 26 d) 13 e) 5

Problema 14. As potências 2^n e 5^n, onde n é um inteiro positivo, começam com o mesmo algarismo d. Qual é este algarismo?

Problema 15. Se $a = 2^{40}$, $b = 3^{20}$ e $c = 7^{10}$, então:

a) $c < b < a$ b) $a < c < b$ c) $b < a < c$ d) $b < c < a$ e) $c < a < b$

Problema 16. Quanto vale $\sqrt{12^{12}}$?

a) 6^6 b) $2^{2\sqrt{3}}$ c) $2^{12} \cdot 3^6$ d) 6^{12} e) $\sqrt{12}^{\sqrt{12}}$

Problema 17. Se $2(2^{2x}) = 4^x + 64$, então x é igual a:

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2 e) 3

2 Números Racionais

Problema 18. Escreva os seguintes números na notação científica:

a) 45673. b) $0,0012345$. c) -555. d) $0,09$

Problema 19. Escreva o período dos decimais periódicos:

a) $0,342342342\ldots$. b) $58,6777\ldots$. c) $456,989898\ldots$.

Problema 20. Encontre a fração geratriz de:

a) $0,333\ldots$. b) $0,121212\ldots$ c) $6,\overline{5}$. d) $-0,666\ldots$.

Problema 21. Obtenha as geratrizes das seguintes dízimas periódicas:

a) $4,7222\ldots$. b) $1,8999\ldots$. c) $1,2010101\ldots$.

Problema 22. Sem efetuar a divisão, determine se a fração corresponde a um decimal exato ou a uma dízima periódica.

a) $\dfrac{321}{320}$. b) $\dfrac{15}{6}$. c) $\dfrac{41}{15}$. d) $\dfrac{3}{40}$.

Problema 23. Dizemos que um inteiro positivo x está escrito na notação científica se é da forma $x = m \cdot 10^k$ onde k é um inteiro e m satisfaz:

a) m é inteiro. b) $1 \leq |m| < 10$. c) $m < 1$. d) $1 \leq m < 10$. e) $0 < m < 1$.

Problema 24. Assinale qual o maior dentre os números seguintes:

a) $1,0\overline{1}$. b) $1,0\overline{12}$. c) $1,0\overline{102}$. d) $1,011\overline{25}$. e) $1,0\overline{11}$.

Problema 25. Considere o número

$$X = 1,01001000100001\ldots.$$

(O padrão se mantém, ou seja, a quantidade de zeros entre números uns consecutivos sempre aumenta exatamente uma unidade).

a) Qual é a sua 25^a casa decimal após a vírgula?

b) Qual é a sua 500^a casa decimal após a vírgula?

c) O número X é racional ou irracional?

Problema 26. Qual é o primeiro dígito não nulo após a vírgula na representação decimal da fração $\dfrac{1}{5^{12}}$?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 7

Problema 27. O valor da expressão

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot (0,666\ldots)} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{1}{(1,333\ldots)}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ b) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ c) $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ d) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ e) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Problema 28. Observe as multiplicações:

$$\begin{aligned}
142857 \cdot 1 &= 142857\\
142857 \cdot 2 &= 285714\\
142857 \cdot 3 &= 428571\\
142857 \cdot 4 &= 571428\\
142857 \cdot 5 &= 714285\\
142857 \cdot 6 &= 857142\\
142857 \cdot 7 &= 999999
\end{aligned}$$

Da última multiplicação, podemos concluir que $\dfrac{1}{7} = \dfrac{142857}{999999} = 0,\overline{142857}$. Veja que as seis primeiras multiplicações produzem números com os mesmos dígitos de 142857 e este é exatamente o período da representação decimal de $\dfrac{1}{7}$. Você consegue descobrir um número primo p maior que 7 tal que o período da dízima que representa $\dfrac{1}{p}$ possui $p-1$ casas decimais?

Problema 29. Considere um primo p que divide $10^n + 1$ para algum n inteiro positivo. Por exemplo, $p = 7$ divide $10^3 + 1$. Analisando o período da representação decimal de $\dfrac{1}{p}$, verifique que o número de vezes que o dígito i aparece é igual ao número de vezes que o dígito $9 - i$ aparece para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Problema 30. Considere um número primo p que não divide 10 e suponha que o período da representação decimal de $\dfrac{1}{p}$ seja $2k$. É sempre possível decompormos o período em dois blocos de dígitos consecutivos que somam $10^k - 1$? Por exemplo, o período de $\dfrac{1}{7}$ tem tamanho $6 = 2k$ pois é igual à 142857. Veja que $142 + 857 = 999 = 10^3 - 1 = 10^k - 1$.

3 Números Irracionais

Problema 31. No quadro abaixo, determine quais números são irracionais.

23	$5,345$	$\sqrt{2}$
$2,313131\ldots$	$\frac{1}{3}$	$0,01001000100001\ldots$

Problema 32. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

c) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

d) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$.

e) $\dfrac{35}{5} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

Problema 33. Represente em uma reta orientada os seguintes números:

$$3,5 \quad -\frac{9}{4} \quad 0 \quad \frac{14}{7} \quad 5,\overline{2} \quad -\frac{30}{7}$$

Problema 34. Utilizando a calculadora podemos obter que

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\ldots$$

Agora, também utilizando uma calculadora, calcule os valores abaixo, faça os registro e observe como o resultado se aproxima cada vez mais do número 2.

a) $1,4^2 =$

b) $1,41^2 =$

c) $1,414^2 =$

d) $1,4142^2 =$

Problema 35. Com base no exercício anterior, utilizando a calculadora, calcule $\sqrt{3}$. Faça o mesmo procedimento do item anterior, ou seja, calcule o o quadrado do número encontrado apenas com uma casa decimal, depois com duas casas, depois com três e finalmente com quatro casas. Registre os resultados e observe como eles se aproximam cada vez mais de $\sqrt{3}$.

Problema 36. Compare as raízes abaixo preenchendo os espaços pontilhadas com os símbolos $>$ ou $<$.

a) $\sqrt{2} \ldots\ldots \sqrt{3}$.

b) $\sqrt{81} \ldots\ldots \sqrt{121}$.

c) $\sqrt{\frac{4}{100}} \ldots\ldots \sqrt{\frac{16}{25}}$.

d) $\sqrt{0,64} \ldots\ldots \sqrt{0,1}$.

e) $\sqrt{n} \ldots\ldots \sqrt{n+1}$ com n número real não negativo.

Problema 37. Sem utilizar a calculadora, estime, com uma casa decimal, a melhor aproximação para $\sqrt{11}$.

Problema 38. Sem utilizar a calculadora, estime, com duas casas decimais, uma boa aproximação para $\sqrt{11}$.

Problema 39. Quantos números inteiros positivos existem entre $\sqrt{8}$ e $\sqrt{80}$?

Problema 40. Quantos números inteiros positivos existem entre $\sqrt{37}$ e $\sqrt{1226}$?

Problema 41. Quantos dos números abaixo são maiores que 10?

$$3\sqrt{11}\ ,\ 4\sqrt{7}\ ,\ 5\sqrt{5}\ ,\ 6\sqrt{3}\ ,\ 7\sqrt{2}.$$

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Problema 42. Explique porque entre dois números racionais sempre podemos encontrar um terceiro número racional.

Problema 43. Dados dois reais positivos, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.

Problema 44. O número $\sqrt{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}}$ está situado entre $\sqrt{n}$ e $\sqrt{n+2}$, onde n é inteiro positivo. Determine n.

Problema 45. Prove que não é possível escrever $\sqrt{2}$ como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Problema 46. Prove que não é possível escrever:

i $\sqrt{3}$ como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

ii $\sqrt{5}$ como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

iii $\sqrt{p}$ como uma fração de inteiros, sendo p um número primo. Ou seja, prove que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

Problema 47. É verdade que existem números irracionais A e B tais que A^B é racional?

Problema 48. A sequência F_n de Farey é uma sequência de conjuntos formados pelas frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ com $0 \leq a \leq b \leq n$ arranjados em ordem crescente. Exibimos abaixo os quatro primeiros termos da sequência de Farey.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \{0/1, 1/1\} \\
F_2 &= \{0/1, 1/2, 1/1\} \\
F_3 &= \{0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1\} \\
F_4 &= \{0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1\}
\end{aligned}
$$

Qual deve ser o conjunto F_5?

Problema 49. É possível mostrar que se duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são vizinhas na sequência de Farey F_n (veja o exercício anterior) então $ad - bc = \pm 1$. Sabendo disso, você consegue determinar que fração $\frac{a}{b}$ está imediatamente à esquerda de $\frac{5}{7}$ em F_7 sem calcular todos os seus elementos?

Problema 50. Considere dois tambores de capacidade suficientemente grande.

a) Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido de um dos tambores no outro usando dois baldes, um com capacidade de 5 e o outro com capacidade de 7 litros.

b) Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido de um dos tambores no outro usando dois baldes, um com capacidade de $2 - \sqrt{2}$ e o outro com capacidade de $\sqrt{2}$ litros.

Problema 51. Achar o menor inteiro positivo n tal que as 73 frações

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots, \frac{91}{n+93}$$

sejam todas irredutíveis.

4 Radiciação e Expressões Algébricas

Problema 52. Simplifique as expressões envolvendo radicais:

a) $\sqrt[3]{x^4}$. b) $(\sqrt[3]{8})^2$. c) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$. d) $\sqrt{32}+\sqrt{162}$. e) $(4a^6b^4)^{3/2}$.

Problema 53. Transforme a expressão dada em outra sem radicais no denominador como indica o exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}.$$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. c) $\sqrt[9]{\dfrac{1}{a^2}}$. d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$. e) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$.

Problema 54. Elimine os expoentes negativos das expressões abaixo:

a) $\dfrac{x^{-3}y^4}{x^5y^{-3}}$. b) $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$. c) $\left(\dfrac{ba^{-4}}{ab^{-3}}\right)^{-2}$. d) $\dfrac{a^{-3}}{b^{-2}} \cdot \dfrac{a^{-5}}{b^{-3}}$.

Problema 55. Simplificando a expressão $\dfrac{3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}{3\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{3}{2}}$, obtemos:

a) $-\dfrac{6}{7}$. b) $-\dfrac{7}{6}$. c) $\dfrac{6}{7}$. d) $\dfrac{7}{6}$. e) $-\dfrac{5}{7}$.

Problema 56. Simplifique a expressão:

$$\frac{\left(\dfrac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2}{\left(\dfrac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3}$$

Problema 57. Simplifique as expressões:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64x^{24}}}$. b) $\sqrt[4]{x^4y^8z^2}$. c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$.

Problema 58. Determine o valor da expressão abaixo quando $a = 2014$ e $n = 1000$.

$$\frac{1}{a^{-n}+1}+\frac{1}{a^{-n+1}+1}+\ldots+\frac{1}{a^{-1}+1}+\frac{1}{a^0+1}+\frac{1}{a^n+1}+\frac{1}{1+a^{-n+1}}+\ldots+\frac{1}{a^1+1}.$$

a) 1000^{2013} b) 2013^{1000} c) 2013 d) $\dfrac{2001}{2}$ e) 1000.

Problema 59. Ao efetuar a soma $13^1+13^2+13^3+\ldots+13^{2006}+13^{2007}$, obtemos um número inteiro. Qual o algarismo das unidades desse número?

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9.

Problema 60. Efetuando as operações indicadas na expressão

$$\left(\frac{2^{2007}+2^{2005}}{2^{2006}+2^{2004}}\right)\cdot 2006$$

obtemos um número de quatro algarismos. Qual é a soma dos algarismos desse número?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Problema 61. Sejam a, b e c inteiros e positivos. Entre as opções abaixo, a expressão que não pode representar o número 24 é:

a) ab^3 b) a^2b^3 c) a^cb^c d) ab^2c^3 e) $a^bb^cc^a$.

Problema 62. Calcule o valor de

$$A=\frac{1001\cdot 1002\cdot 1003\cdot \ldots \cdot 2000}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 1999}$$

a) 2^{1000} b) 2^{999} c) 1000 d) 999 e) 2.

5 Introdução aos Polinômios

Problema 63. Seja n um número natural. Indique por meio de expressões algébricas:

a) o dobro de n.

b) 20% de n.

c) o sucessor de n.

d) a metade da soma entre n e 3.

e) o cubo de n.

Problema 64. Determine a área de um retângulo cujas dimensões (comprimento e largura) são:

a) $2x$ e x.

b) $2x$ e $(x+1)$.

c) $(x-1)$ e $(x+2)$.

Problema 65. Escreva os graus de cada monômio:

a) $2x^5y^3$.

b) $-\frac{4}{5}m^2n$.

c) $\sqrt{5}p^5qr^5$.

d) a^mb^ncd.

Problema 66. Considere os monômios A = $8x^3y^2$ e B = $4xy$. Determine:

a) $A \cdot B$.

b) $\dfrac{A}{B}$.

Problema 67. Sejam os polinômios $P = 3x^2 + 4x - 8$ e $Q = x^2 + 1$, determine:

a) $P + Q$.

b) $P - Q$.

c) $P \cdot Q$.

Problema 68. Efetue as multiplicações:

a) $(a+1)(a^2 - 6a + 4)$.

b) $(3a - b)(3ab + 2a - b)$.

c) $\dfrac{a^2}{4}\left(1,2a^2 + 1,6a + \dfrac{8}{3}\right)$.

Problema 69. Um taxista cobra, por corrida, $R\$3,00$ como preço fixo inicial e mais $R\$2,50$ para cada km rodado.

a) Determine a expressão que representa quanto será cobrado por uma corrida de x km.

b) Quanto custa uma corrida de $9km$?

Problema 70. Os produtos algébricos da forma $(x+a)(x+b)$, onde x é variárel e a e b são números reais quaisquer, podem ser calculados usando-se a distributividade, obtemos assim $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$. Veja que o coeficiente de x é a soma de a e b e o coeficiente independete de x é ab. Por exemplo, $(x+2)(x+5) = x^2 + 7x + 10$. Utilize este princípio e calcule os produtos:

a) $(x+1)(x+2)$

b) $(x+3)(x+9)$.

c) $(x-2)(x+3)$.

d) $(x-4)(x+4)$.

e) $(x+5)(x+5)$.

f) $(x-4)(x-4)$.

g) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$.

Problema 71. O **Teorema do Resto** diz que o resto da divisão de um polinômio P de uma variável x por outro polinômio da forma $(x+a)$ é igual ao valor de P quando substituimos x por $-a$. Use este teorema para calcular o resto da divisão de $x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ por:

a) $x - 1$.

b) $x + 1$.

c) $x - 3$.

d) $x + 4$.

e) $x - \dfrac{1}{2}$.

Problema 72. Use o *Teorema do Resto* para verificar se $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$ é divisível por:

a) $x - 1$. b) $x + 1$. c) $x + 2$. d) $x - 2$. e) $x + 3$.

Problema 73. Em um jogo de perguntas e respostas, ganham-se 5 pontos por acerto e perdem-se 3 pontos por erro.

a) Determine a expressão que representa o número de pontos obtidos por alguém que acertou x perguntas e errou y perguntas.

b) Qual a pontuação de Maycon, se ele acertou 8 e errou 2 perguntas?

Problema 74. Um tanque de combustível possui a capacidade máxima de 50 litros. Se já existem x litros de combustível neste tanque, determine:

a) A expressão que da quantidade de litros que faltam para completá-lo.

b) A expressão que determina do quanto será gasto para completá-lo, se o litro de combustível custa $R\$3,00$.

Problema 75. Simplifique as expressões:

a) $a^9 \cdot a^{-5}$. b) $(3y^2)(4y^5)$. c) $\dfrac{(2x^3)^2(3x^4)}{(x^3)^4}$. d) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$. e) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4$.

Problema 76. Elimine os expoentes negativos das expressões abaixo:

a) $\dfrac{x^{-3}y^4}{x^5y^{-3}}$. b) $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$. c) $\left(\dfrac{ba^{-4}}{ab^{-3}}\right)^{-2}$. d) $\dfrac{a^{-3}}{b^{-2}} \cdot \dfrac{a^{-5}}{b^{-3}}$.

Problema 77. Simplifique a expressão:

$$\frac{\left(\dfrac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2}{\left(\dfrac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3}$$

Problema 78. Determine o grau dos monômios abaixo:

a) $5a^2b^7$.

b) $\frac{7}{2}a^{n+1}b^{n+2}$, onde n é um número natural.

c) $ab^2c^3d^4 \ldots z^{26}$ (onde é colocado em cada letra do alfabeto um expoente correspondendo à sua posição).

Problema 79. Determine o valor do inteiro positivo n para que o grau do monômio $5x^{n+1}y^{2n-1}$ seja 9.

Problema 80. Determine o valor de k para que o produto $(kx - 1)(2x + 1)$ seja um polinômio cuja soma dos coeficientes é 3.

Problema 81. Use a propriedade de distributividade da multiplicação e resolva os produtos:

a) $(x + a^n)(x - a^n)$. b) $(x + a^{2n})(x + a^{2n})$. c) $(x - 2a)^2$.

Problema 82. Determine o quociente e o resto das divisões:

a) $(x^2 - a^2) \div (x - a)$. b) $(x^2 + 2xa + a^2) \div (x + a)$. c) $(x^3 + a^3) \div (x + a)$.

Problema 83. Determine o valor de $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ quando:

a) $a = 1; b = 4; c = 4.$

b) $a = 1; b = -2; c = -8.$

c) $a = 1; b = 5; c = 0.$

Problema 84. Determine k para que o polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + k$ seja divisível por:

a) $x - 1$

b) $x + 1$

c) $x - 2.$

Problema 85. De uma cartolina quadrada de $50cm$ de lado, retira-se através de cortes um quadrado de x cm de lado de cada um dos quatro cantos da cartolina, sendo $0 \leq x \leq 25$. Determine:

a) A expressão que determina a área da cartolina após os cortes.

b) A área da cartolina cortada se $x = 5cm$.

c) Suponha que a cartolina cortada é usada para formar uma caixa sem tampa dobrando-se ao longo das retas determinadas pelos cortes. Qual a expressão envolvendo x fornece o volume de tal caixa?

Problema 86. Simplifique a expressão:

$$\frac{(x^{2n+1}+x)(x^{2n+1}-x)-(x^4)^{(n+1/2)}}{(x^n+x)^2-x^{2n}-2x^{n+1}},$$

definida para $x \neq 0$.

Problema 87. Sejam $A = x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ e $B = x^2 - 1$, polinômios. Determine o quociente e o resto de A na divisão por B.

Problema 88. Leila foi avisada em dezembro de 2012, que a mensalidade escolar de seus filhos para o ano de 2013 teria um aumento de 80%. Ela não concordou com o aumento e procurou o PROCON que, após analisar o caso, determinou que a escola reduzisse este último valor em 30%. A escola acatou a decisão do PROCON. Além disso, como Leila tem 3 filhos matriculados, a escola decidiu lhe dar 10% de desconto nas mensalidades de cada um de seus filhos. Determine:

a) A expressão que determina o preço da mensalidade de cada filho de Leila em 2013.

b) Quanto Leila gastará com mensalidades em 2013, se a mensalidade, em 2012, era R$ 800,00.

Problema 89. A expressão $\sqrt[3]{-(x-1)^6}$ é um número real. Determine:

a) O valor da expressão para $x = 2$.

b) O maior valor possível para a expressão.

Problema 90. a) Calcule o valor de:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

b) Calcule o valor de:

$$\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{x+98}\right)$$

Problema 91. a) Calcule o valor de

$$A = \frac{1001 \cdot 1002 \cdot 1003 \cdot \ldots \cdot 2000}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1999}$$

b) Se x é um inteiro positivo, calcule o valor de:

$$B = \frac{(x+1)(x+2)(x+3) \cdot \ldots \cdot (2x)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2x-1)}$$

6 Produtos Notáveis

Problema 92. Siga o modelo e calcule os produtos notáveis:

$$\begin{aligned}(x+5)^2 &= x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2\\ &= x^2 + 10x + 25\end{aligned}$$

a) $(x+1)^2$. b) $(4+x)^2$. c) $(x+\sqrt{3})^2$. d) $(3x+1)^2$. e) $(4x+2)^2$.

Problema 93. Calcule os produtos notáveis:

a) $(2x+3)^2$. b) $(2x+3y)^2$. c) $(x^2+3)^2$. d) $(a^2+3b^2)^2$. e) $(x^4+3^2)^2$.

Problema 94. Veja o seguinte exemplo para calcular o quadrado de um número:

$$\begin{aligned}42^2 &= (40+2)^2\\ &= 40^2 + 2\cdot 40\cdot 2 + 2^2\\ &= 1600 + 160 + 4\\ &= 1764\end{aligned}$$

Calcule os quadrados de 13, 41 e 19 sem usar a calculadora.

Problema 95. Calcule o valor das expressões:

a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab}$.

b) $(x+1)^2 + (x-1)^2$.

c) $(a+1)^2 + 2(a+1)a + a^2 + 2(2a+1) + 1$.

Problema 96. Calcule as expressões:

a) $(-a-b)^2$. b) $(-2a+b)^2$. c) $(2ab+3c)^2$. d) $(2a-2b)^2$.

Problema 97. Calcule os produtos:

a) $(x-1)(x+1)$.

b) $(4-a)(4+a)$.

c) $(x^2-3z)(x^2+3z)$.

d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$

Problema 98. Siga o modelo abaixo e calcule o valor das expressões dadas.

$$\begin{aligned}27\cdot 33 &= (30-3)(30+3)\\ &= 30^2 - 3^2\\ &= 891\end{aligned}$$

a) $99\cdot 101$. b) $1998\cdot 2002$. c) $5\cdot 15 + 25$

Problema 99. Ao efetuarmos a multiplicação $(a+b)(a+b)$ usando a distributividade, quantas operações de multiplicação faremos?

Problema 100. Repita o exercício anterior com a multiplicação $(a+b)(a+b)(a+b)$. Em seguida, determine quantas cópias de a^2b aparecem no resultado. Finalmente, conclua com argumentos de contagem que:

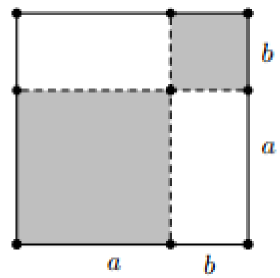
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Problema 101. Encontre uma figura que explique geometricamente, através do uso de áreas, a equação:

$$1+2+3+4+5+6=\frac{6\cdot 7}{2}.$$

Problema 102. A figura abaixo explica geometricamente, usando áreas, o desenvolvimento do produto notável

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2.$$



Você conseguiria obter uma figura que explicasse geometricamente, também usando áreas, a equação

$$(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)?$$

Problema 103. Encontre uma figura que explique geometricamente, através do uso de áreas, a equação:

$$1+3+5+\ldots+17=9^2$$

Problema 104. O professor Medialdo acaba de explicar a seus alunos que a média aritmética de dois números a e b é $\dfrac{a+b}{2}$ e a média geométrica é $\sqrt{ab}$. Antes de entregar as notas de duas provas aplicadas anteriormente, ele decidiu testar o conhecimento dos seus alunos perguntando se eles prefeririam que cada um recebesse a média geométrica ou a média aritmética das duas notas. Considerando que os alunos desejam a maior nota possível no boletim, o que eles devem dizer ao professor Medialdo?

Problema 105. Sejam a e b números reais.

a) Verifique que $(a+b)^2 \geq 4ab$.

b) Verifique que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$.

c) Verifique que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c}+\dfrac{16}{d} \geq \dfrac{64}{a+b+c+d}$.

Problema 106. João deseja construir um retângulo usando um arame com 2 metros de comprimento. Qual é a maior área possível de tal retângulo?

Problema 107. Sejam:

$$A=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \text{ e } B=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

Quanto vale $A\cdot B$?

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 1 d) $2+\sqrt{2}$ e) $2+\sqrt{3}$.

Problema 108. Calcule o valor do número:

$$20142013^2 - 2(20142013)(20142012)+20142012^2$$

Problema 109. Se x, y, a e b são reais tais que $\sqrt{x-y} = a$ e $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$, determine o valor de $\sqrt{xy}$.

a) $\dfrac{b^4 - a^4}{4b^2}$ b) $\dfrac{a^2}{b}$ c) $\dfrac{a^2 + b^2}{b}$ d) $\dfrac{1}{b}$ e) a^2.

Problema 110. João está ajudando seu pai com as finanças de sua loja. Como a quantidade de produtos ofertados estava influenciando a quantidade de produtos vendidos, ele decidiu procurar algum padrão que pudesse ajudá-lo a descobrir qual a quantidade ideal de produtos que deveriam ser ofertadas para maximizar a quantidade de produtos vendidos. Depois de um bom tempo "quebrando a cabeça", ele percebeu que se "a" produtos eram ofertados, então a loja vendia "$a(10-a)$" itens. Em seguida, com a ajuda de um produto notável semelhante a essa expressão, foi possível achar a quantidade ideal de produtos que deveriam ser vendidos. Como ele fez isso?

Problema 111. O pai de João (veja o problema anterior), percebendo a astúcia do filho, decidiu desafiá-lo a fazer o mesmo com uma fórmula bem diferente e supondo agora que a é um número real qualquer. Nesse novo problema, dado "a" real, ele deve tentar achar o valor máximo de $4a - a^4$. Novamente usando produtos notáveis, João conseguiu descobrir que o máximo de tal expressão é 3. Você consegue descobrir como ele fez isso?

7 Fatoração de Expressões Algébricas

Problema 112. Siga o modelo e fatore as expressões:

$$\boxed{3a + ba = a(3 + b)}$$

a) $5a + ba$. b) $am + an$. c) $xa + xb + xc$. d) $ax + a$. e) $ab + bc + abc$.

Problema 113. Simplifique as frações fatorando o denominador e o numerador.

a) $\dfrac{3a + 5b}{6a + 10b}$. b) $\dfrac{3x + 3y}{8x + 8y}$. c) $\dfrac{3a^2 + 5a}{6a + 10}$. d) $\dfrac{a(x + y) + b(x + y)}{(a - b)x + (a - b)y}$. e) $\dfrac{x^4 + x^3}{x^2 + x}$.

Problema 114. Fatore por agrupamento as seguintes expressões:

a) $a^2 + ab + ac + bc$. b) $ax - bx + ay - by$. c) $2ab + 2a + b + 1$. d) $ax - bx + 2a - 2b$ e) $10ab - 2b + 15a - 3$

Problema 115. Fatore o numerador e o denominador e simplifique cada expressão dada:

a) $\dfrac{m^4 + m^2}{m^2 + 1}$. b) $\dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x^2}$. c) $\dfrac{m^4 + 3m^3 + 2m + 6}{(m + 3)^2}$.

Problema 116. Fatore as expressões abaixo usando a diferença de quadrados:

a) $a^2 - 25b^2$. b) $4x^2 - 1$. c) $7 - x^2$. d) $a^2x^2 - b^2y^2$. e) $a^4 - b^4$

Problema 117. Para cada um dos itens abaixo, decida se a expressão dada é o quadrado de um binômio, isto é, se pode ser escrita na forma:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ ou como } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

a) $x^2 - 4x + 3$. b) $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$. c) $y^2 + 6y + 18$. d) $4z^2 - 12zy + 9y^2$. e) $3z^2 + 6z + 3$.

Em caso afirmativo, escreva o binômio.

Problema 118. Fatore completamente as expressões abaixo:

a) $x^4 - 2x^2 + 1$. b) $5a^2 - 10a + 5$. c) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.

Problema 119. Efetue as multiplicações e divisões indicadas como no exemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{2ab}{3ax} \cdot \frac{5xy}{7by} &= \frac{2\cancel{a}\cancel{b}}{3\cancel{a}\cancel{x}} \cdot \frac{5\cancel{x}\cancel{y}}{7\cancel{b}\cancel{y}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \\
&= \frac{10}{21}
\end{aligned}$$

a) $\dfrac{4a}{b} \cdot \dfrac{5b}{a}$. b) $\dfrac{x^3 + x}{3y} \div \dfrac{x^2 + 1}{y^2}$. c) $\dfrac{yx + x}{(x + 1)^2} \cdot \dfrac{xy + y}{(y + 1)^2}$.

Problema 120. Se $xy = 6$ e $x + y = 7$, quanto vale $x^2y + y^2x$?

Problema 121. Se, ao adicionarmos x ao numerador e subtrairmos x do denominador da fração $\dfrac{a}{b}$, com a e b reais, obtemos a fração $\dfrac{c}{d}$, com c e d reais e $c \neq -d$, qual o valor de x?

Problema 122. Fatore as expressões:

a) $a^2b - b^3$. b) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$. c) $a^4 - 32a^2 + 256$.

Problema 123. Verifique que:
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$
Em seguida, fatore $x^3 - 8$.

Problema 124. No exercício anterior, o que acontece se trocarmos y por $-z$?

Problema 125. A soma de dois números é 4 e seu produto é 1. Encontre a soma dos cubos desses números.

Problema 126. Se $xy = x + y = 3$, calcule $x^3 + y^3$.

Problema 127. Seja x um número real tal que $x + \dfrac{1}{x} = 2$, calcule $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Problema 128. Qual a forma mais simplificada da expressão $(a - b)^2 + (-a + b)^2 + 2(a - b)(b - a)$?

Problema 129. Simplifique a expressão

$$(\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7})(-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}).$$

Problema 130. Fatore completamente $x^4 + 4$.

Problema 131. Verifique que

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n(n + 3) + 1)^2$$

Problema 132. Calcule o valor de:

$$\sqrt{(2014)(2015)(2016)(2017) + 1}$$

Problema 133. Fatore $p^4 - 1$.

Problema 134. Se $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{3 + \sqrt{8}}$, mostre que x é um inteiro negativo.

Problema 135. Fatore $n^5 + n^4 + 1$.

Problema 136. Qual é o menor inteior positivo n tal que $\sqrt{n} - \sqrt{n - 1} < 0,01$

Problema 137. Encontre o quociente da divisão de $a^{32} - b^{32}$ por

$$(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$$

Problema 138. Verifique que
$$\frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1)\ldots(100^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1)\ldots(100^3 + 1)} = \frac{3367}{5050}.$$

Problema 139. A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $F_1 = F_2 = 1$. Determine o valor de:

$$\left(1 - \frac{F_2^2}{F_3^2}\right)\left(1 - \frac{F_3^2}{F_4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right)$$

a) $\dfrac{F_{2016}}{F_{2013}^2}$ b) $\dfrac{F_{2014}}{F_{2013}}$ c) $\dfrac{F_{2015}^2}{F_{2013}^2}$ d) $\dfrac{F_{2015}}{2}$ e) $\dfrac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}$.

Problema 140. Se $x + y + z = 0$, verifique que:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

Problema 141. Define-se o conjunto de 100 números $\{1, 1/2, 1/3, ..., 1/100\}$. Eliminamos dois elementos quaisquer a e b deste conjunto e se inclui, no conjunto, o número $a + b + ab$ ficando assim um conjunto com um elemento a menos. Depois de 99 destas operações, ficamos só com um número. Que valores pode ter esse número?

Problema 142. Verifique que

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z).$$

Problema 143. Verifique que:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Problema 144. Fatore a expressão

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3.$$

Problema 145. Sejam a, b, c, x, y, z reais distintos tais que $ax + by + cz = 0$. Verifique que

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2}$$

não depende de x, nem de y, nem de z.

8 Sentenças Matemáticas e Notação Algébrica

Problema 146. Nos parênteses dos ítens abaixo, marque A, caso a sentença seja aberta, ou F, caso a sentença seja fechada.

a) (____) $4^2 = 15 + 1$.

b) (____) $2x - 1 = x + 4$.

c) (____) $\sqrt{1} < 2$.

d) (____) $2a - 1 = b$.

e) (____) $7 \in \mathbb{N}$.

f) (____) $\dfrac{1}{x+1} = 2x$.

g) (____) $x^2 = 5$.

Problema 147. Quais das sentenças fechadas abaixo são verdadeiras?

a) $5^2 = 4^2 + 3^2$.

b) $7 - 13 = -6$.

c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{5}$.

d) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

e) $-6 \in \mathbb{N}$.

f) $\sqrt{16} > 4$.

g) $\sqrt{25} \in \mathbb{Q}$.

h) $\sqrt[3]{-8} \notin \mathbb{Z}$.

i) $-\dfrac{1}{2} < -\dfrac{1}{3}$.

Problema 148. Utilize símbolos matemáticos e letras para representar as grandezas e reescrever as sentenças abaixo.

a) O perímetro de um quadrado é o quádruplo da medida do seu lado.

b) A área de um quadrado é o quadrado da medida do seu lado.

c) A soma das idades de Luiz e Luísa é dezesseis.

d) A metade da raiz quadrada de um número é menor que o triplo desse número.

e) O salário de Rodrigo é setecentos reais mais vinte por cento do valor de suas vendas.

f) A área de um retângulo cuja altura é o dobro da base é o dobro do quadrado da base.

Problema 149. Seja l a medida da aresta de um cubo. Determine as expressões correspondentes

a) a sua área A.

b) ao seu volume V.

c) à soma S das medidas de todas as arestas.

Problema 150. Diz a lenda que no túmulo de Diofanto (matemático grego da antiguidade) havia o seguinte problema:
Viajante, aqui estão as cinzas de Diofanto. É milagroso que os números possam medir a extensão de sua vida: $1/6$ *dela foi uma bela infância; depois de* $1/12$ *de sua vida, sua barba cresceu;* $1/7$ *de sua vida passou em um casamento sem filhos; cinco anos após isso nasceu seu primeiro filho, que viveu metade da vida de seu pai; e, em profundo pesar, o pobre velho terminou seus dias na terra quatro anos após perder seu filho. Quantos anos viveu Diofanto?*
Construa uma equação, utilizando os dados do túmulo, na qual seja possível calcular a idade de Diofanto e a resolva.

Problema 151. A figura abaixo é o desenho de um terreno retangular dividido em três retângulos menores. Determine:

a) uma expressão que representa o perímetro P do terreno.

b) uma expressão que representa a quantidade Q de cerca gasta, se todos os retângulos serão cercados e lados comuns recebem cerca apenas uma vez.

c) uma expressão que representa a área A do terreno.

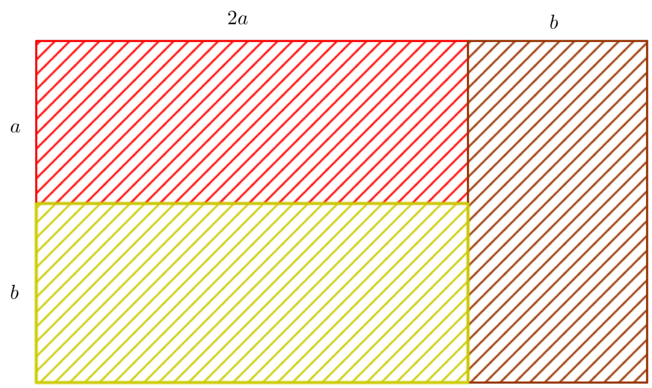


Figura 1

Problema 152. O retângulo $ABCD$ abaixo representa um terreno. Deve-se passar uma cerca que o divida de maneira que a área do polígono $CDEF$ seja o dobro da área do polígono $ABFE$. Sobre o lado AD essa cerca começa a 5m do vértice A e sobre o lado BC essa cerca termina a x metros do vértice B.

a) Represente algebricamente a área dos dois polígonos separados pela cerca.

b) Determine o valor de x.

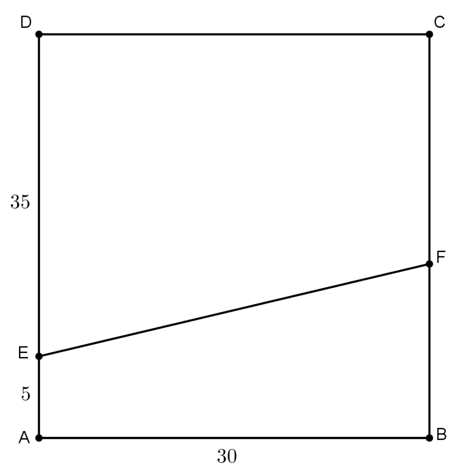


Figura 3

9 Equações de 1° grau

Problema 153. Determine o valor numérico de cada uma das expressões abaixo.

a) $2x+1$, para $x=1$.

b) $x-3y$, para $x=4$ e $y=1$.

c) x^2-y^3, para $x=3$ e $y=-1$.

d) xy^2-yx^2, para $x=2$ e $y=3$.

e) $\dfrac{x-5y}{4}$, para $x=5$ e $y=3$.

f) $x^2+2xy+y^2$, para $x=4$ e $y=2$.

Problema 154. Um edifício tem 12 andares, com 4 apartamentos por andar. Cada apartamento possui 6 janelas, que possuem, cada uma, um vidro retangular de dimensões a e b. Dê a expressão algébrica que representa a área total de vidro utilizado.

Problema 155. A figura abaixo representa um terreno dividido em duas partes retangulares.

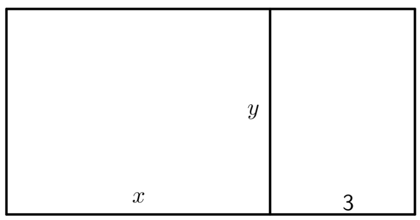


Figura 5

Determine:

a) a expressão que representa a área do terreno.

b) a área do terreno para $x=20m$ e $y=15m$.

Problema 156. Para calcular a média bimestral de seus alunos, um professor usa o seguinte critério: multiplica a nota da prova por 2, soma o resultado com a nota de um trabalho e divide a soma obtida por 3. Se você representar por n o número que expressa a média, por p a nota da prova e por t a nota do trabalho, qual será a fórmula matemática para calcular a média bimestral?

Problema 157. Se numa fração diminuirmos o numerador em 40% e o denominador em 60%, a fração inicial ficará:

a) diminuída em 20%.

b) aumentada em 20%.

c) diminuída em 50%.

d) aumentada em 50%.

e) aumentada em 30%.

Problema 158. Uma piscina, em forma de paralelepípedo, tem como dimensões, em metros, x de largura, $2x$ de comprimento e y de altura. Determine:

a) a expressão que representa o seu volume.

b) a expressão que representa sua área total.

c) a quantidade, em litros, necessária para enchê-la completamente, sendo $x=3m$ e $y=2m$.

Problema 159. A figura abaixo representa uma quadra de tênis, na qual seus dois lados separados pela rede são simétricos.

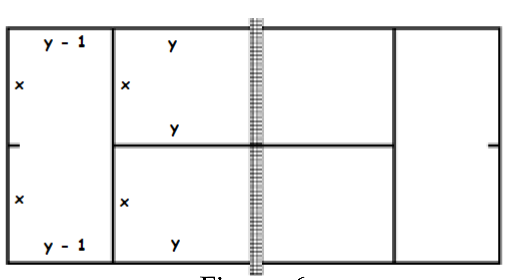


Figura 6

Determine:

a) a expressão que representa o perímetro da quadra.

b) a expressão que representa a soma dos comprimentos das linhas (internas e externas).

c) a área da quadra, sendo $x=2m$ e $y=2,5m$.

Problema 160. Abaixo, figuras com a mesma forma representam objetos de mesma massa. Quantos quadrados são necessários para que a última balança fique equilibrada?

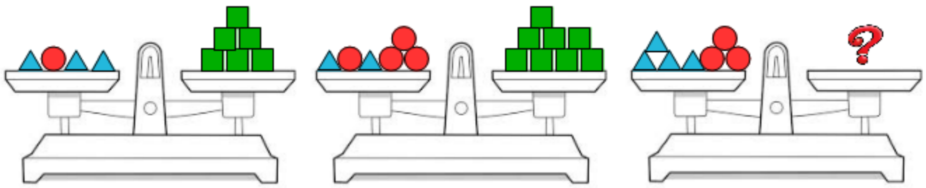


Figura 7

Problema 161. A figura abaixo é o projeto de um quarto com uma porta de 1m de largura e uma porta dupla de 2m de largura. As dimensões externas desse quarto são 5m x 3m. Se a espessura das paredes é x, determine:

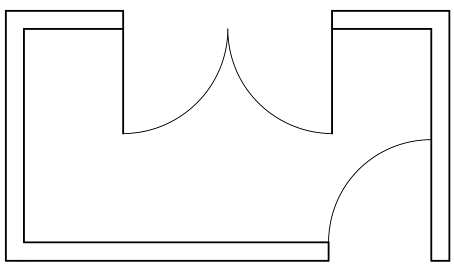


Figura 9

a) o perímetro interno desse quarto.

b) a área interna desse quarto, desconsiderando o vão deixado pelas portas.

c) se a altura das portas é $2m$ e a altura das paredes é $3m$, determine a área interna das paredes, desconsiderando as portas.

Problema 162. Para qualquer número positivo x, dizemos que os números $x+1$ e $\dfrac{x}{x+1}$ são irmãos e filhos de x. Encontre um irmão de $\dfrac{5}{7}$.

Problema 163. Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento x no comprimento e y na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5-x)(3-y)$. Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

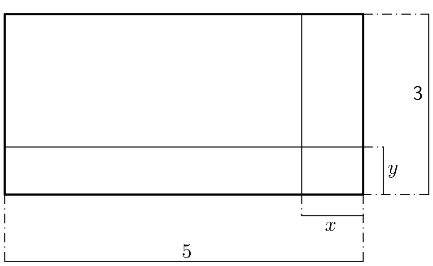


Figura 10

a) $2xy$.

b) $15-3x$.

c) $15-5y$.

d) $-5y-3x$.

e) $5y+3x-xy$.

Problema 164. Um professor ensinou a seus alunos a seguinte identidade:

Para quaisquer inteiros a e b,

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Conhecendo esta identidade, determine:

a) $100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2$.

b) dois números inteiros maiores que 1 cujo produto é 999991.

Problema 165. Um feirante tinha uma cesta de ovos para vender e atendeu sucessivamente a 3 fregueses. Cada freguês levou a metade dos ovos e mais meio ovo do total de ovos existentes na cesta. Se o feirante não precisou quebrar nenhum ovo e sobraram 10 ovos na cesta, quantos ovos havia inicialmente?

10 Sistemas de Equações do 1° Grau

Problema 166. Resolva os sistemas de equações abaixo.

a) $\begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y = 10 \\ x-y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y = 10 \\ x = y+6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = y+18 \\ x = 2y \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y = 5 \\ x-y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y = 3/2 \\ x-y = 1/2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y = 5 \\ 2x-y = 4. \end{cases}$

i) $\begin{cases} 5x-y = 34 \\ 3x-4y = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x-2y = 11 \\ -x+5y = 5 \end{cases}$

Problema 167. Resolva um sistema de equações no qual a soma de dois números é 70 e a diferença é 28.

Problema 168. Pedro e Mariano têm juntos 195 bolinhas de gude. Se Pedro tem 45 bolinhas de gude a mais que Mariano, quantas cada um tem?

Problema 169. Guilherme e Santiago juntaram suas economias para comprar um videogame. Guilherme conseguiu juntar o dobro da quantia de Santiago. Além disso, a diferença entre as economias de ambos é $R\$350,00$. Quanto cada um conseguiu guardar?

Problema 170. Rúbia comprou um sapato e uma blusa, pagando o total da compra com uma nota de $R\$50,00$ e duas notas de $R\$20,00$. Sabendo que ela recebeu de troco uma nota de $R\$10,00$, uma nota de $R\$5,00$, três moedas de $R\$1,00$ e que a blusa é $R\$10,00$ mais cara que o sapato, quanto custou cada um dos produtos?

Problema 171. O cientista M. A. Luco tem duas provetas (recipientes para líquidos) e cada uma delas está cheia com uma substância química (plutônio ou patetônio). Se a capacidade dos dois recipientes somadas é $375ml$ e sua diferença é $75ml$, quanto ele possui de cada substância, sabendo que ele possui mais plutônio que patetônio?

Problema 172. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} 13p-92q = 237 \\ 12p-91q = 237. \end{cases}$$

Problema 173. Benzildo cria gansos e hipopótamos (que convivem harmoniosamente bem). Se o total de animais é 50 e o total de patas é 140, qual a quantidade de cada um deles?

Problema 174. Um estacionamento possui 47 veículos, entre carros e motos, num total de 164 rodas. Quantos são os carros e quantas são as motos? (Lembre-se que carros possuem quatro rodas e motos, duas)

Problema 175. L. Santana retirou de um caixa eletrônico $R\$330,00$ entre cédulas de $R\$50,00$ e $R\$10,00$, num total de 17 cédulas. Qual a quantidade de cada um dos tipos de cédulas?

Problema 176. A sequência $(2, x, y, 29)$ é chamada de progressão aritmética pois a diferença entre cada termo, com exceção do primeiro, e seu antecessor é constante. Determine x e y.

Problema 177. Encontre todas as soluções dos sistemas abaixo.

a) $\begin{cases} 5/x - 3/y &= -1 \\ 15/x + 7/y &= 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} &= 13 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 8. \end{cases}$

Problema 178. Encontre todos os possíveis valores dos números reais positivos a e b sabendo que a soma das raízes desses números vale 17 e a raiz de a é o triplo da raiz de b acrescido de três unidades.

Problema 179. Resolva graficamente os sistemas abaixo.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

Problema 180. Encontre as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{r} + 9\sqrt{s} &= 21 \\ 10\sqrt[3]{r} - \sqrt{s} &= 28. \end{cases}$$

Problema 181. Usando uma balança de dois pratos, verificamos que 4 abacates pesam o mesmo que 9 bananas e que 3 bananas pesam o mesmo que 2 laranjas. Se colocarmos 9 laranjas num prato da balança, quantos abacates deveremos colocar no outro prato, para equilibrar a balança?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6.

Problema 182. Quando João vai para a escola a pé e volta de ônibus, ele gasta uma hora e quinze minutos; quando vai e volta de ônibus, ele gasta meia hora. Para cada meio de transporte, o tempo gasto na ida é igual ao tempo gasto na volta. Quanto tempo ele gasta quando vai e volta a pé?

a) uma hora e meia.

b) uma hora e quarenta e cinco minutos.

c) duas horas.

d) duas horas e quinze minutos.

e) duas horas e meia.

Problema 183. Oito vasos iguais, encaixados, formam uma pilha de $36cm$ de altura. Dezesseis vasos iguais aos primeiros, também encaixados, formam outra pilha de $60cm$ de altura. Qual é a altura de cada vaso?

a) $15cm$ b) $16cm$ c) $18cm$ d) $20cm$ e) $22cm$.

Problema 184. Um dia, curiosamente, Tiago percebeu que havia veículos de 1, 2, 3 e 4 rodas na garagem de seu prédio: carrinhos de mão, bicicletas, triciclos e automóveis. Ele, o irmão e o pai decidiram contar o número de rodas que estavam na garagem. Tiago contou 26 rodas mas esqueceu-se de contar as dos automóveis. O irmão dele contou também 26 rodas, mas não contou as dos triciclos e o pai contou 26 rodas mas não contou as rodas das bicicletas. Determine a quantidade de veículos que estavam na garagem.

Problema 185. João e Ana são irmãos. João tem cinco irmãos a mais do que irmãs. Quantos irmãos Ana tem a mais do que irmãs?

a) 2 b) 3 c) 5 d) 6 e) 7.

Problema 186. As massas de todos os pares possíveis formados com 5 estudantes são 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg e 101 kg. Qual é a massa do estudante de massa intermediária?

a) $52kg$ b) $51kg$ c) $49kg$ d) $48kg$ e) a^2

Problema 187. Rosa resolveu distribuir $R\$250,00$ para seus sobrinhos, dando a mesma quantia inteira (sem centavos) para cada um e percebeu que sobrariam $R\$10,00$. Então, ela pensou em diminuir em $R\$1,00$ a quantia de cada um e descobriu que sobrariam $R\$22,00$. Por fim, ela resolveu distribuir apenas $R\$240,00$. Quanto ganhou cada sobrinho?

a) 5 reais. b) 10 reais. c) 12 reais. d) 15 reais. e) 20 reais.

Problema 188. Se x, y, a e b são reais positivos tais que $\sqrt{x-y} = a$ e $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$, determine o valor de $\sqrt{xy}$.

a) $\dfrac{b^4 - a^4}{4b^2}$ b) $\dfrac{a^2}{b}$ c) $\dfrac{a^2 + b^2}{b}$ d) $\dfrac{1}{b}$ e) a^2

Problema 189. Uma balança de dois pratos está equilibrada, onde de um lado estão dois copos cheios e do outro três copos pela metade. Os copos são idênticos e contêm, ao todo, 1400 gramas de farinha. Qual é o peso, em gramas de um copo vazio?

a) 50 b) 125 c) 175 d) 200 e) 250.

Problema 190. Certo dia, Isabela e Ana Beatriz saíram para vender pastéis na praia. Elas tinham juntas 460 pastéis. No final do dia, verificou-se que Isabela conseguiu vender $3/5$ dos pastéis que levara e Ana Beatriz, $5/8$ dos pastéis que levara. Ao final do dia, o número de pastéis que restou para Ana Beatriz era a metade do número de pastéis que restou para Isabela. Se Ana Beatriz, levou x pastéis para vender, então a soma dos algarismos de x é

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

Problema 191. Calcule $\dfrac{x}{y}$, sabendo que $\begin{cases} x + 1/y & = & 4 \\ y + 1/x & = & 1/4. \end{cases}$

Problema 192. Hoje, dia 29 de julho de 2012, José tem o dobro da idade que Luiz tinha quando José tinha a idade que Luiz tem. Quando Luiz tiver a idade que José tem, a soma das idades deles será 90 anos. Em 29 de julho de 2017, a razão entre as idades de José e Luiz, nessa ordem, será

a) $\dfrac{6}{5}$ b) $\dfrac{9}{7}$ c) $\dfrac{5}{4}$ d) $\dfrac{27}{20}$

Problema 193. Pitágoras e Tales possuem hoje, cada um, certa quantia em reais. Se Pitágoras desse para Tales $R\$50,00$, eles ficariam com a mesma quantia em reais, cada um. Porém, se Tales desse para Pitágoras $R\$100,00$, Tales passaria a ter $\frac{1}{4}$ da quantia de Pitágoras. Dessa forma é correto afirmar que

a) a quantia que os dois possuem hoje, juntos, é menor que $R\$600,00$.

b) Pitágoras possui hoje $\frac{2}{3}$ do que Tales possui.

c) Tales possui hoje mais de $R\$220,00$.

d) a diferença entre os valores que eles possuem hoje é menor que $R\$100,00$.

Problema 194. Na fabricação de um produto é utilizado o ingrediente A ou B. Sabe-se que, para cada 100 kg do ingrediente A devem ser utilizados 10 kg do ingrediente B. Se, reunindo x kg do ingrediente A com y kg do ingrediente B resulta 44000 g do produto, então

a) $y^x = 2^{60}$ b) $\sqrt{xy} = 5\sqrt{10}$ c) $\sqrt[10]{y^x} = 256$ d) $\sqrt[4]{x^y} = 20$ e) $\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 2\sqrt{5}$.

Problema 195. Dado que a e b são números reais não nulos, com b diferente de $4a$, e tais que

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{2}{ab} & = & 5 \\ \dfrac{5-2b^2}{4a-b} & = & 4a+b, \end{cases}$$

qual é o valor de $16a^4b^2 - 8a^3b^3 + a^2b^4$?

a) 4 b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{12}$ d) 18 e) $\frac{1}{4}$

Problema 196. Resolva os sistemas de equações abaixo.

a) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 48 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 96. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6 \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2 \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

11 Equações do 2º grau

Problema 197. A equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e a, b e c constantes, é denominada equação do segundo grau na variável x. Os números a, b e c são os coeficientes da equação. Observe os modelos abaixo e identifique-os.

i) $2x^2 - 9x + 3 = 0$, então $a = 2$, $b = -9$ e $c = 3$.

ii) $x^2 + 2x - 6 = 0$, então $a = 1$, $b = 2$ e $c = -6$.

iii) $-x^2 + 5x + 3 = 0$, então $a = -1$, $b = 5$ e $c = 3$.

a) $x^2 - 2x + 6 = 0$

b) $2x^2 + 3x - 8 = 0$

c) $-x^2 + 4x - 3 = 0$

d) $-4x^2 + 7x - 12 = 0$

e) $x^2 + x = 0$

f) $x^2 - 25 = 0$

Problema 198. Siga o modelo e, após o desenvolvimento dos produtos notáveis, identifique os valores dos coeficientes a, b e c nas equações do 2° grau resultantes das operações.

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (x-2)^2 &= (x+3)^2 \\ x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 &= x^2 + 6x + 9 \\ 2x^2 - 2x + 5 - x^2 - 6x - 9 &= 0 \\ x^2 - 8x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Então $a = 1$, $b = -8$ e $c = -4$.

a) $(x-1)^2 + (x+2)^2 = (x-3)^2$

b) $(2x-5)^2 + (x-2)(x+2) = x + (x+7)^2$

c) $(x-1)^2 + x(x+1) = 2x - (x+3)^2$

Problema 199. Faça a expansão dos produtos indicados como no exemplo abaixo.

$$\begin{aligned} (x+2)(x+3) &= x^2 + 3x + 2x + 2 \cdot 3 \\ &= x^2 + 5x + 6. \end{aligned}$$

a) $x(x+7)$.

b) $(x+2)(x+5)$.

c) $(x-2)(x+3)$.

Problema 200. O discriminante da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é o número $\Delta = b^2 - 4ac$. Calcule-o em cada um dos itens abaixo.

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $5x^2 + 3x - 2 = 0$

c) $-x^2 + x + 30 = 0$

d) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

e) $-x^2 - 2x - 1 = 0$

f) $2x^2 + 6x - 8 = 0$

g) $x^2 + 3x + 9 = 0$

h) $x^2 + 9x = 0$

i) $-x^2 + 16 = 0$

Problema 201. Sejam m e n números tais que

$$(x-m)(x-n) = x^2 - 7x + 10.$$

a) Determine o valor de $m + n$.

b) Determine o valor de mn.

c) Encontre m e n que satisfazem a soma e o produto encontrados nos itens anteriores.

d) Encontre as soluções da equação.

Problema 202. Observe os modelos e resolva as equações do 2° grau no universo dos números reais.

i) Modelo 1.

$$\begin{aligned} x^2 + 9x &= 0 \\ x(x+9) &= 0 \end{aligned}$$

Numa multiplicação com resultado nulo, ao menos um dos fatores deve ser zero, isto é:

$$a \cdot b = 0 \text{ então } a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Logo, $x = 0$ ou $x + 9 = 0$. Portanto, o conjunto solução é $S = \{-9, 0\}$.

ii) Modelo 2.

$$\begin{aligned} x^2 - 64 &= 0 \\ x^2 &= 64 \\ x &= \pm\sqrt{64} \\ x &= \pm 8 \end{aligned}$$

Logo, as raízes são $x = 8$ ou $x = -8$ e o conjunto solução é $S = \{-8, 8\}$.

a) $x^2 - 4x = 0$

b) $x^2 - 4 = 0$

c) $x^2 + 9x = 0$

d) $x^2 + 9 = 0$

e) $-x^2 - 7x = 0$

f) $-x^2 + 121 = 0$

Problema 203. Verifique se -1, 2 ou 5 são raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Problema 204. Qual o valor de m para que -3 seja raiz da equação $-mx^2 - 4mx + 21 = 0$?

Problema 205. As raízes da equação do 2° grau, $ax^2 + bx + c = 0$, podem ser encontradas através da fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

na qual a expressão $b^2 - 4ac$ é normalmente chamada de discriminante e representada pela letra grega Δ. Verifique em quais equações abaixo o discriminante é positivo, negativo ou nulo.

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $x^2 - x - 6 = 0$

c) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

d) $x^2 + 2x + 10 = 0$

e) $-3x^2 + x + 4 = 0$

f) $x^2 + x + 4 = 0$

g) $x^2 + 16x + 64 = 0$

Problema 206. A partir da fórmula de Bhaskara, observando o modelo abaixo, calcule as raízes de cada uma das equações que seguem.

$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

Tem-se $\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 4 + 32 = 36$ e, portanto, as raízes são: Daí, $\sqrt{\Delta} = 6$ e

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2+6}{4} \\ &= 1 \\ x_2 &= \frac{-2-6}{4} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{-2, 1\}$.

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$

c) $2x^2 + 1x - 10 = 0$

d) $-3x^2 + 1x - 10 = 0$

e) $x^2 + 4x + 4 = 0$

f) $5x^2 + 2x + 2 = 0$

g) $3x^2 + 5x + 7 = 0$

Problema 207. A partir da fórmula geral das soluções de uma equação do segundo grau

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

analise a quantidade de raízes reais em função do discriminante Δ.

Problema 208. Sendo h a maior raiz da equação $x^2 + x - 1 = 0$. Então qual o valor de $\dfrac{h^5}{1-h} + \dfrac{2h^6}{(1-h)^2}$?

Problema 209. Um grupo de jovens aluga, por 342 reais, uma van para um passeio, sendo que três deles saíram sem pagar. Por isso, os outros tiveram que completar o total pagando, cada um deles, 19 reais a mais. Qual o número inicial de jovens no grupo?

Problema 210. Os primeiros dígitos da representação decimal do número a são $2,45$. Determine se $a^2 - 5a + 6$ é positivo ou negativo.

Problema 211. Encontre os valores de a para os quais a equação $x^2 - ax + 1 = 0$ não possui raízes reais.

Problema 212. Encontre todos os valores de k para os quais a equação $x^2 + 2(k-1)x + (k+5) = 0$ possui pelo menos uma raiz positiva.

Problema 213. Qual a maior raiz da equação $-2x^2 + 3x + 5 = 0$?

Problema 214. Calcule as soluções da equação $2x^2 - 4x + 2 = 0$.

Problema 215. O número -3 é a raiz da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$. Nessas condições, determine o valor do coeficiente c.

Problema 216. Seja x um número real não nulo tal que $x + \dfrac{1}{x} = 2$. Calcule o valor de $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Problema 217. Qual o conjunto solução da equação no universo dos reais. $\sqrt{3x-2} = \sqrt{x} + 2$?

Problema 218. A equação $ax^4 + bx^2 + c$, com $a \neq 0$, é denominada equação biquadrada. É possível encontrar suas soluções fazendo a mudança de variável $x^2 = y$ e assim transformando-a em uma equação do segundo grau. Por exemplo, para encontrarmos as raízes de $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$, trocamos x^2 por y obtendo:

$$\begin{aligned} x^4 - 18x^2 + 32 &= 0 \\ y^2 - 18y + 32 &= 0 \\ y &= \frac{18 \pm \sqrt{196}}{2} \\ y &= 9 \pm 7. \end{aligned}$$

Analisamos agora separadamente cada um dos possíveis valores para x. No primeiro caso, se $y = 9 + 7 = 4^2$, então $x = \pm 4$. No segundo caso, se $y = 9 - 7 = (\sqrt{2})^2$, então $x = \pm\sqrt{2}$. Portanto, o conjunto solução é

$$S = \{-4, 4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

Em alguns casos, pode ocorrer que o valor encontrado para y seja negativo e consequentemente não existiriam valores no conjunto dos números reais correspondentes para x. Seguindo o modelo anterior, encontre as raízes reais das equações abaixo:

a) $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$.   b) $x^4 + 4x^2 - 60 = 0$.   c) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$.

Problema 219. Encontre $x^2 + y^2$ se $x, y \in \mathbb{Z}$ e

$$\begin{cases} xy + x + y = 71 \\ x^2y + xy^2 = 880. \end{cases}$$

Problema 220. Resolva a equação

$$(x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1=x.$$

Problema 221. Encontre as soluções de:

$$\sqrt{4+2x-x^2}=x-2.$$

Problema 222. Encontre as soluções de:

$$\sqrt{x^2+2ax-a}=x-1.$$

Problema 223. Para quais valores de a a equação

$$(a^2-3a+2)x^2-(a^2-5a+4)x+a-a^2=0$$

possui mais que duas raízes?

Problema 224. Mostre que se a, b e c são inteiros ímpares, a equação $ax^2+bx+c=0$ não tem raiz racional.

Problema 225. Encontre todas as soluções reais de:

$$x=2+\sqrt{2+\sqrt{x}}.$$

Problema 226. A calculadora $MK-97$ pode efetuar as seguintes três operações com números em sua memória:

a) Determinar se dois números escolhidos são iguais;

b) Adicionar dois números escolhidos;

c) Para os números escolhidos a e b, determinar as raízes reais da equação $x^2+ax+b=0$ ou anunciar que tal equação não possui raízes reais.

Os resultados de cada operação são acumulados em sua memória. Inicialmente a memória contém apenas o número z que é desconhecido por seus usuários. Como podemos determinar, usando a calculadora $MK-97$, se z é igual a 1?

Problema 227. Encontre todas as soluções reais de

$$\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{5-x}=2.$$

Problema 228. Resolva a equação $\sqrt{5-\sqrt{5-x}}=x$, com $0<x<5$.

Problema 229. Para quais valores de r vale que:

$$(r^2+5r-24)(r^2-3r+2)=(4r-10)(r^2+5r-24)?$$

Problema 230. Sendo a e b inteiros não nulos, resolva a equação

$$(ax-b)^2+(bx-a)^2=x$$

sabendo que uma de suas raízes é um inteiro positivo.

Problema 231. Encontre as raízes das equações:

a) $x^2-|x|-2=0$.

b) $x^2+5|x|+4=0$.

Problema 232. Determine todos os y tais que

$$(y^2 + y - 6)(y^2 - 6y + 9) - 2(y^2 - 9) = 0.$$

Dica: Tente fatorar as expressões dadas.

Problema 233. Na equação $x^2 + px + q = 0$, os coeficientes p e q podem assumir qualquer valor no intervalo $[-1, 1]$. Quais são os possíveis valores das raízes de tal equação?

Problema 234. Encontre as soluções de:

$$2(x - 3) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

Problema 235. Encontre todas as soluções reais de:

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 12$$

Problema 236. Deduza a formula para as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, em função dos coeficientes da equação.

Problema 237. Suponha que $ax^2 + bx + c = mx^2 + nx + p$ para três valores reais distintos da variável x. É verdade que $a = m$, $b = n$ e $c = p$?

12 Relações entre Coeficientes e Raízes

Problema 238. Fazendo as operações de soma e de produto entre as raízes x_1 e x_2 em uma equação do 2° grau, ficamos com:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{b^2-(\Delta)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Em resumo, $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$. Agora, calcule a soma e o produto das raízes das equações abaixo.

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $2x^2 + 7x + 5 = 0$

c) $-3x^2 + 12x = 0$

d) $-x^2 + 8x - 12 = 0$

e) $7x^2 - 3x + 1 = 0$

Problema 239. Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 + 5x + 7 = 0$, determine o valor de $(x_1 + 3)(x_2 + 3)$.

Problema 240. Sabendo que a e $a + 1$ são as raízes de $x^2 - (p - 1)x + p$, determine o valor de p.

Problema 241. Qual o valor de b na equação $x^2 + bx - 25 = 0$ para que suas raízes sejam simétricas? Para tal valor, veja que 5 e -5 são raízes da equação.

Problema 242. Determine a soma e o produto das raízes das equações abaixo:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $-x^2 + 7x - 10 = 0$

c) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

d) $x^2 - x - 20 = 0$

Problema 243. Determine m para que a equação

$$2x^2 - 8x + m = 0$$

admita raízes iguais.

Problema 244. Determine m para que a equação

$$3x^2 + 6x + m = 0$$

admita raízes reais distintas.

Problema 245. Determine os possíveis valores de p para que a equação

$$x^2 + p^2x + 3px - 8 = 0$$

admita raízes simétricas[1].

Problema 246. Determine m na equação $2x^2 - 12x + 2m = 0$ de modo que uma de suas raízes seja igual ao dobro da outra.

Problema 247. Se a média aritmética de dois números reais a e b é 5 e a média geométrica entre eles é 8, escreva uma equação do segundo grau que admite a e b como raízes.

[1] Dizemos que x e y são simétricos se $x = -y$.

Problema 248. Qual o valor de p na equação $(p+3)x^2 + x + p^2 - p = 0$ para que uma raiz seja inversa da outra?

Problema 249. Qual o valor de m na equação $x^2 + (m-2)x + 2m - 8 = 0$ para que os quadrados de suas raízes sejam iguais?

Problema 250. Um aluno resolveu corretamente a equação do 2º grau $x^2 + Ax + B = 0$ e encontrou as raízes 1 e -3. Nessas condições, determine as soluções da equação $x^2 + Bx + A = 0$.

Problema 251. Determine uma equação do 2º grau com a soma das suas raízes igual a 4 e o produto das suas raízes igual a -12.

Problema 252. Se a equação quadrática $x^2 - 2nx + n + 3 = 0$ tem como conjunto solução $\left\{\dfrac{b}{a}+1, \dfrac{a}{b}+1\right\}$. Qual o valor de n^2?

Problema 253. Uma equação do 2º grau possui a soma das suas raízes igual a 4 e o produto das suas raízes igual a -12. A partir desses dados, sendo x_1 e x_2 as raízes de tal equação, calcule o que se pede.

a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

b) $x_1^2 + x_2^2$.

c) $|x_1 - x_2|$.

Problema 254. Suponha que x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 + x - 7 = 0$. Encontre os valores das expressões abaixo sem encontrar explicitamente as raízes:

a) $x_1^2 + x_2^2$.

b) $x_1^3 + x_2^3$.

c) $x_1^4 + x_2^4$.

Problema 255. Se a e b são as raízes de $2x^2 - x + 3 = 0$, encontre o valor de $(2a-1)(2b-1) + 8$.

Problema 256. Sabendo que a equação $4x^2 + (3m+1)x + (n+3) = 0$ possui as mesmas raízes de $2x^2 + 5x + 8 = 0$, determine m e n.

Problema 257. Os números reais p e q são as raízes da equação $15x^2 - 11x + 2 = 0$. Qual o valor de $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$?

Problema 258. Determine o valor de p para que as raízes x_1 e x_2 da equação $2x^2 - px - 1 = 0$ satisfaçam a relação $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Problema 259. Determine a soma das raízes da equação

$$x^2 + 18x + 30 = 2 \cdot \sqrt{x^2 + 18x + 45}.$$

Problema 260. Sejam a e b números reais não nulos tais que a equação $x^2 + ax + b = 0$ possui soluções a e b. Determine $a - b$.

Problema 261. (Olimpíada Cearense) As raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ são R e S. Determine a equação do segundo grau cujas raízes são $aR + b$ e $aS + b$.

Problema 262. Mostre que a equação $x^2 + bx + 17 = 0$ não possui raiz inteira positiva, se b é um inteiro não negativo.

Problema 263. Dentre os trinômios do segundo grau da forma $x^2 + px + q$, onde p e q são inteiros e $1 \le p, q \le 1997$, qual conjunto é maior: o conjunto A dos trinômios que possuem raízes inteiras ou o conjunto B daqueles que não possuem raízes reais?

Problema 264. a, b, c e d são números reais distintos tais que a e b são raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$ e c e d são raízes da equação $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Calcule a soma $a + b + c + d$.

Problema 265. Se a e b são raízes da equação $x^2 - 2014x - 2004 = 0$, determine o valor de

$$a^2 + b^2 + a^2b^2 + 2ab(a + b + 1).$$

Problema 266. Determine um valor do número real m para o qual a soma das quartas potências das raízes de $x^2 - mx - 1 = 0$ seja mínima.

Problema 267. Seja a a maior raiz de $x^2 + x - 1$. Determine o valor de $a^5 - 5a$.

a) -1 b) -2 c) -3 d) 1 e) 2.

Problema 268. Determine os valores do número real k para que diferença entre as raízes da equação em x dada por $x^2 - (k+2)x + k - 1 = 0$ seja mínima.

Problema 269. Observe:

$$(x-r)(x-s) = x^2 - (r+s)x + rs.$$

Assim, substituindo x por r e por s, obtemos

$$\begin{cases} r^2 - (r+s)r + rs &= 0 \\ s^2 - (r+s)s + rs &= 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $a \cdot r^n$ e a segunda por $b \cdot s^n$, temos:

$$\begin{cases} a(r^{n+2} - (r+s)r^{n+1} + rs \cdot r^n) &= 0 \\ b(s^{n+2} - (r+s)s^{n+1} + rs \cdot s^n) &= 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações e sendo $S_n = a \cdot r^n + b \cdot s^n$, verifica-se que

$$S_{n+2} = (r+s)S_{n+1} - rsS_n.$$

Dados que $S_1 = ar + bs = 1$, $S_2 = ar^2 + bs^2 = 2$, $S_3 = ar^3 + bs^3 = 5$ e $ar^4 + bs^4 = 6$, determine $S_5 = ar^5 + bs^5$.

13 Equações Fracionárias

Problema 270. Resolva a equação

$$\frac{3}{x} - 2 = 7 + \frac{2}{x}$$

Problema 271. Resolva a equação

$$\frac{x}{x-1} + \frac{2}{3} = \frac{2}{x-1}.$$

Problema 272. Resolva a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{2x}{x-1} = 2$$

Problema 273. Calcule

$$\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}$$

Problema 274. Resolva as equações fracionárias:

a) $\dfrac{x+6}{x} = \dfrac{3}{2}$.

b) $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x-1}{x+2}$.

c) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-3x+4}{x^2-x}$.

Problema 275. Resolva a equação:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5-x^2}{x^2-1}.$$

Problema 276. Resolva a equação:

$$\frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{x^2-4}.$$

Problema 277. Resolva a equação

$$\frac{3}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = 4.$$

Problema 278. Encontre as soluções de

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}.$$

Problema 279. Resolva a equação

$$\frac{3x-1}{2x-1} + \frac{3x+2}{2x+1} = 3 - \frac{1}{4x^2-1}.$$

Problema 280. Supondo $a^2 - b^2 \neq 0$ e $b \neq 0$, determine o valor de z na equação

$$\frac{5a}{a-b} - \frac{5a}{a+b} = \frac{2bz}{a^2-b^2}.$$

Problema 281. Determine o valor de x, em função a, de modo que

$$\frac{x}{a-3} = \frac{1}{a+3} - \frac{x}{a^2-9}.$$

Problema 282. Determine o valor de x em função dos inteiros m e n de modo que

$$\frac{x}{m+n} - \frac{x+1}{m-n} = \frac{x-3}{m^2-n^2}.$$

Problema 283. Encontre o número de valores de x que satisfazem a equação:

$$\frac{2x^2-10x}{x^2-5x} = x-3.$$

Problema 284. Dados os números reais positivos m, n, p, q e r, resolva a equação em x:

$$\frac{x-m}{n+p+q+r} + \frac{x-n-p}{q+r+m} + \frac{x-q-r}{m+n+p} = 3.$$

Problema 285. Encontre os valores de x que satisfazem a equação

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2} = 0.$$

Problema 286. Se $ab \neq 0$ e $|a| \neq |b|$, o número de valores distintos de x que satisfazem a equação:

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$$

é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4.

Problema 287. Os números N_1 e N_2 são inteiros tais que a equação

$$\frac{35x-29}{x^2-3x+2} = \frac{N_1}{x-1} + \frac{N_2}{x-2}$$

possui infinitas soluções. Qual o valor de N_1N_2?

Problema 288. Prove que a equação

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f} = 1$$

não admite soluções com todos os números sendo ímpares.

Problema 289. Seja B_n a quantidade de $n-uplas$ ordenadas de inteiros positivos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tais que

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} = 1$$

Determine se B_{10} é par ou ímpar.

Problema 290. Encontre todas as soluções de

$$\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{(x+b)(x+c)}{(x-b)(x-c)} + \frac{(x+c)(x+a)}{(x-c)(x-a)} = 3,$$

onde a, b e c são parâmetros reais positivos.

Problema 291. Encontre todas as soluções reais de

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 12.$$

14 Sistema de Equações Fracionárias

Problema 292. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + 3y &= 6 \\ \dfrac{2}{x} - 5y &= 1. \end{cases}$$

Problema 293. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+y} &= \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{4}{x-y} &= -2. \end{cases}$$

Problema 294. Encontre todos os pares (x, y) tais que

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} &= -\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{4}{y} &= 9. \end{cases}$$

Problema 295. Determine as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} &= 1 \\ \dfrac{12}{y} - \dfrac{3}{x} &= 5 \end{cases}$$

Problema 296. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{y} &= -18 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} &= -7. \end{cases}$$

Problema 297. Encontre todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - 3 &= \dfrac{2}{y} \\ 2x - 9y &= -8. \end{cases}$$

Problema 298. Encontre as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} &= 11 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{z} &= 12 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} &= 13 \end{cases}$$

Problema 299. Se x e y são números não nulos tais que $x = 1 + \frac{1}{y}$ e $y = 1 + \frac{1}{x}$, então y é igual à:

a) $x - 1$ b) $1 - x$ c) $1 + x$ d) $-x$ e) x.

Problema 300. Calcule $\frac{x}{y}$ se

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} & = & 4 \\ y + \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Problema 301. Encontre todos os pares ordenados (x, y) tais que

$$\begin{cases} \dfrac{3x - 4y}{xy} & = & -8 \\ \dfrac{2x + 7y}{xy} & = & 43 \end{cases}$$

Problema 302. Encontre soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} & = & 12 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} & = & \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Problema 303. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x + y} & = & 2 \\ \dfrac{xyz}{y + z} & = & \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{xyz}{z + x} & = & \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Problema 304. Dado que todos os números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são positivos, encontre as soluções do sistema de equações abaixo nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} \dfrac{x_2 x_3 \ldots x_n}{x_1} & = & a_1 \\ \dfrac{x_1 x_3 \ldots x_n}{x_1} & = & a_2 \\ \ldots & & \ldots \\ \dfrac{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}{x_n} & = & a_n \end{cases}$$

Problema 305. Supondo que $a, b, c \neq 0$ e que o sistema abaixo tem solução, determine o valor de x.

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x + y} & = & a \\ \dfrac{xz}{x + z} & = & b \\ \dfrac{yz}{y + z} & = & c. \end{cases}$$

Problema 306. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2a^2}{1+a^2} &= b \\ \dfrac{2b^2}{1+b^2} &= c \\ \dfrac{2c^2}{1+c^2} &= a \end{cases}$$

Problema 307. Em sua velocidade usual, um homem desce um rio de 15 quilômetros de comprimento em 5 horas a menos que o tempo que ele gasta nadando no mesmo rio percorrendo o caminho contrário. Se ele dobrar a sua velocidade usual, ele passa a descer o rio gastando apenas 1 hora a menos que o tempo gasto na volta. Considerando que a velocidade da correnteza do rio se mantém constante durante os trajetos, qual o seu valor km/h?

a) 2 b) 5/2 c) 3 d) 7/2 e) 4.

Dica: Quando o homem nada no sentido da correnteza, a sua velocidade relativa deve ser somada com a do rio e, quando nada no sentido contrário ao da correnteza, a velocidade do rio deve ser subtraída de sua velocidade.

Respostas e Soluções.

1.

a) 243.
b) $4+9=13$.
c) 625.
d) $8+27=35$.
e) $2^{4-1}\cdot 3=24$.

2.

a) $0,000001$.
b) 4.
c) $80\cdot\dfrac{125}{8}=1250$.
d) $\dfrac{1}{3}\cdot 0,09=0,03$.
e) $200\cdot\dfrac{256}{10000}=5,12$.

3.

a) $\dfrac{8}{3}$.
b) 8.
c) 72.
d) 324.
e) $5^2-2^2=21$.

4.

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$.
b) 2^6
c) -2^{45}.
d) 10^6.
e) 2^{13}.

5.

a) Verdadeiro.

b) Falso. Por exemplo, $2^{-1}=\dfrac{1}{2}\neq -2$.

c) Falso. Por exemplo, $\left(\dfrac{2}{1}\right)^2=4\neq(2-1)^2=1$.

d) Verdadeiro.

e) Falso. Por exemplo, $(2^2)^3=64\neq 256=2^{(2^3)}$.

6.

a) Verdadeiro.

b) Falso. Por exemplo, $(1+2)^3=27\neq 9=1^3+2^3$.

c) Falso. Por exemplo, $2^{2+1}=8\neq 5=2^2+2^1$.

d) Falso. Por exemplo, $(2^2)^{-2}=\dfrac{1}{16}\neq 1=2^0$.

e) Verdadeiro.

7.

a) $0,09$.
b) $\dfrac{100}{9}$.
c) $-0,000008$.
d) $\dfrac{1}{9}$.
e) $1,728$.

8.

a) $2^4=16$.
b) 2^{24}.
c) 1.
d) 2^{-18}.
e) 2^4.

9.

a) Como $2^3>2^2$, segue que $2^{1/2}=(2^3)^{1/6}>(2^2)^{1/6}=2^{1/3}$.

b) Pelo item anterior, $2^{1/2}>2^{1/3}$ e consequentemente $\dfrac{1}{2^{1/2}}<\dfrac{1}{2^{1/3}}$.

c) Como $3^3<5^5$, segue que $3^{1/5}=(3^3)^{1/15}<(5^5)^{1/15}=5^{1/3}$.

10. $4^{4^2} : 4^4 = 4^{4^2-4} = 4^{12}$. Resposta E.

11. Fazendo o desenvolvimento segundo a regra definida no enunciado chegaremos a:

$$\begin{aligned}\frac{2 \otimes (2 \otimes (2 \otimes 2))}{((2 \otimes 2) \otimes 2) \otimes 2} &= \frac{2 \otimes (2 \otimes 4)}{(4 \otimes 2) \otimes 2}\\ &= \frac{2 \otimes 16}{16 \otimes 2}\\ &= \frac{2^{16}}{16^2}\\ &= 2^8.\end{aligned}$$

Resposta E.

12. Como $2 * x = 2^x + x^2$ e x é inteiro, devemos ter $x^2 \in \{1^2, 2^2, \dots, 10^2\}$. Dentre os elementos listados, o único possível para o qual $100 - x^2$ é uma potência de 2 é $x^2 = 36$ pois nesse caso $x = 6$ e $100 - x^2 = 64 = 2^6$. Consequentemente $(4x)^4 = 256x^4 = 256 \cdot 1296 = 331776$. Resposta E.

13. Utilizando as propriedades de potências teremos que:

$$\begin{aligned}15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7 &= (3^6 \cdot 5^6) \cdot (2^{10} \cdot 7^5) \cdot (5^7 \cdot 11^7)\\ &= 3^6 \cdot 11^7 \cdot 5^3 \cdot 10^{10}\end{aligned}$$

Logo, o número termina em 10 zeros. Resposta A.

14. Representemos os dígitos desconhecidos de 2^n e 5^n com asteriscos. Se k e l são as quantidades de algarismos de cada um deles, temos:

$$\begin{aligned}d \cdot 10^k < d * * * \ldots * &= 2^n < (d+1) \cdot 10^k\\ d \cdot 10^l < d * * * \ldots * &= 5^n < (d+1) \cdot 10^l\end{aligned}$$

Multiplicando ambas as inequações, obtemos $10^{k+l} \cdot d^2 < 10^n < 10^{k+l} \cdot (d+1)^2$. Cancelando 10^{k+l} em ambos os lados, concluímos que existe uma potência de 10 entre d^2 e $(d+1)^2$. Analisando os quadrados dos dígitos de 1 até 9, percebemos que isso ocorre apenas para $d = 3(\, 3^2 < 10 < 4^2)$.

15. $a = 2^{40} = 16^{10}$, $b = 3^{20} = 9^{10}$ e $c = 7^{10}$. Como $16 > 9 > 7$, temos $a > b > c$. Resposta A.

16. $\sqrt{12^{12}} = 12^6 = (2^2 \cdot 3)^6 = 2^{12} \cdot 3^6$. Resposta C.

17.

$$\begin{aligned}64 &= 2(2^{2x}) - 4^x\\ &= 2 \cdot 2^{2x} - 2^{2x}\\ &= 2^{2x}.\end{aligned}$$

Como $64 = 2^6$, temos $2x = 6$ e $x = 3$. Resposta E.

18.

a) $4,5673 \cdot 10^4$. b) $1,2345 \cdot 10^{-3}$. c) $-5,55 \cdot 10^2$. d) $9 \cdot 10^{-2}$.

19.

a) 342. b) 7. c) 98.

20.

a)

$$\begin{aligned} x &= 0,333\ldots \\ 10x &= 3,333\ldots \\ 9x &= 3 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

b)

$$\begin{aligned} x &= 0,121212\ldots \\ 100x &= 12,121212\ldots \\ 99x &= 12 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{12}{99} = \dfrac{4}{33}$.

c)

$$\begin{aligned} x &= 6,555\ldots \\ 10x &= 65,555\ldots \\ 9x &= 59 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{59}{9}$.

d)

$$\begin{aligned} x &= -0,666\ldots \\ 10x &= -6,666\ldots \\ 9x &= -6 \end{aligned}$$

Logo, $x = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3}$.

21.

a)

$$\begin{aligned} x &= 4,7222\ldots \\ 10x &= 47,222\ldots \\ 100x &= 472,222\ldots \\ 90x &= 425 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{425}{90} = \dfrac{85}{18}$.

b)

$$\begin{aligned} x &= 1,8999\ldots \\ 10x &= 18,999\ldots \\ 100x &= 189,999\ldots \\ 90x &= 171 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{171}{90} = \dfrac{19}{10}$.

c)

$$\begin{aligned} x &= 1,2010101\ldots \\ 10x &= 12,010101\ldots \\ 1000x &= 1201,010101\ldots \\ 990x &= 1189 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{1189}{990}$.

22.

a) Decimal exato. Isso ocorre pois o denominador só possui fatores primos 2 e 5.

b) Decimal exato. Isso ocorre pois $\dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$ e o denominador só possui fator 2.

c) Dízima periódica. Trata-se de uma fração irredutível com um fator primo no denominador que não é 2 e nem 5. De fato, $\dfrac{41}{15} = 2,7333\ldots$.

d) Decimal exato. Isso ocorre pois o denominador só possui fatores primos 2 e 5.

23. Resposta B.

24. Resposta B.

25.

a) 0.

b) Um grupo de k zeros é separado de um grupo seguinte de $k+1$ zeros por exatamente um número 1. Assim, contando até o dígito 1 que sucede um grupo de k zeros, temos:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{\text{algarismos zeros}} + \underbrace{k}_{\text{algarismos uns}} = \frac{k(k+3)}{2}.$$

Se $k = 30$, já teremos $\dfrac{30(33)}{2} = 495$. Consequentemente a 500^a casa decimal vale *zero* pois está no grupo com 31 zeros.

c) O número X não é racional porque sua representação decimal não é periódica uma vez que a quantidade de algarismos zeros entre dois 1's consecutivos sempre está aumentando.

26. Multiplicando a fração inicial por $\dfrac{2^{12}}{2^{12}}$ teremos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{5^{12}} &= \frac{1}{5^{12}} \cdot \frac{2^{12}}{2^{12}} \\ &= \frac{2^{12}}{10^{12}}\end{aligned}$$

Como $2^{12} = 4096$, o primeiro dígito não nulo após a vírgula é 4. Resposta C.

27. Veja que

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot (0{,}666\ldots)} &= \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{6}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6^2 \cdot 9}} \\ &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{1}{1{,}333\ldots}} &= \sqrt{1 - \frac{1}{12/9}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{9}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{12}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Assim, o valor da expressão procurada é:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{18} + \frac{1}{2}\right]^{-1/2} &= \left[\frac{10}{18}\right]^{-1/2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

Resposta E

28. Um valor possível para p é 17 pois:

$$\frac{1}{17} = 0,\overline{0588235294117647}.$$

Todos os primos menores que 100 que satisfazem essa propriedade são:

$$7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97.$$

Comentário para professores: Seja p um número primo que não divide 10 e seja n um inteiro com $0 < n < p$. Se d é o menor inteiro positivo tal que $10^d - 1$ é múltiplo de p, é possível mostrar que o período da representação decimal de $\dfrac{n}{p}$ é exatamente d. No exemplo anterior, como 7 não divide $10^1 - 1, 10^2 - 1, \ldots, 10^5 - 1$ e divide $10^6 - 1$, temos $d = 6$.

29. Podemos escrever $10^n + 1 = p \cdot a$ onde a é um número com não mais que n dígitos na base 10, digamos $a = a_1 a_2 \dots a_n$. Queremos dizer com isso que cada número a_i é um dos dígitos de a. Mesmo que ele possua estritamente menos que n dígitos, podemos colocar alguns a_i's da esquerda como sendo 0. Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{a}{a \cdot p} \\ &= \frac{a}{10^n + 1} \\ &= \frac{a(10^n - 1)}{10^{2n} - 1} \\ &= \frac{[10^n(a-1) + (10^n - 1) - (a-1)]}{10^{2n} - 1} \end{aligned}$$

O número $10^n - 1$ é constituído por n números iguais a 9 e a diferença $(10^n - 1) - (a - 1)$ reduz cada um desses dígitos 9 por um dígito de a. Assim, a representação decimal do numerador é:

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n - 1)(9 - a_1)(9 - a_2)\dots(9 - a_{n-1})(10 - a_n).$$

O numero anterior representa o período da representação de $\dfrac{1}{p}$ e cada dígito i pode ser pareado com um outro dígito da forma $9 - i$. Assim, as quantidades de aparições de tais dígitos são iguais. No exemplo do enunciado, o período de $1/7$ é 142857 e temos os seguintes pareamentos:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 8 \\ 4 &\rightarrow 5 \\ 2 &\rightarrow 7 \end{aligned}$$

30. Como $10^{2k} - 1 = (10^k - 1)(10^k + 1)$ e p é primo, um dentre $10^k - 1$ e $10^k + 1$ é múltiplo de p. Não podemos ter $10^k - 1$ múltiplo de p pois caso contrário poderíamos escrever $\dfrac{1}{p} = \dfrac{(10^k - 1)/p}{10^k - 1}$ e obteríamos uma dízima periódica com período menor do que $2k$. Sendo assim, p divide $10^k + 1$ e podemos usar repetir a solução anterior para concluir que o período da representação decimal de $1/p$ é da forma:

$$a_1 a_2 \dots a_{k-1}(a_k - 1)(9 - a_1)(9 - a_2)\dots(9 - a_{k-1})(10 - a_k).$$

Somando o número formado pelos k primeiros dígitos com o número formado pelos k últimos, obtemos

$$\underbrace{99\dots9}_{k \text{ vezes}} = 10^k - 1.$$

31. Números irracionais são aqueles que possuem representação decimal infinita e não periódica. Sendo assim, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$ e $0,01001000100001\ldots \in \mathbb{Q}'$ pois possuem representações decimais não periódicas; ao passo que $23 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, $5,345 \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $2,313131... \in \mathbb{Q}$ possuem representações decimais periódicas.

Comentário para professores: Pode ser difícil convencer o aluno em um primeiro contato com os números irracionais que $\sqrt{2}$ é irracional e consequentemente nos primeiros exercícios o aluno deverá assumir tal fato. Deixamos a demonstração desta afirmação para o final deste bloco de exercícios e sugerimos que o professor faça o mesmo até seus alunos terem mais familiaridade com as distinções entre os conjuntos numéricos.

32. Já sabemos que valem as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Assim:

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.Verdadeira!

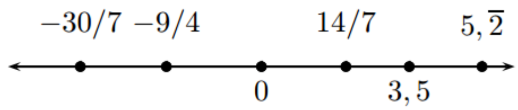
b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.Verdadeira!

c) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.Falsa, pois $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ é o conjunto das frações não inteiras.

d) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$. Verdadeira!

e) $\dfrac{35}{5} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. Falsa, pois $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ é o conjunto das frações não inteiras e $\frac{35}{5} = 7$.

33. Uma representação seria:



34. Resposta com o uso da calculadora.

a) $1,4^2 = 1,96$.

b) $1,41^2 = 1,9881$.

c) $1,414^2 = 1,999396$.

d) $1,4142^2 = 1,99996164$.

35. Resposta com o uso da calculadora.

$$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415059\ldots$$

a) $1,7^2 = 2,89$.

b) $1,73^2 = 2,9929$.

c) $1,732^2 = 2,999824$.

d) $1,7320^2 = 2,999824$.

36.

a) $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

b) $\sqrt{81} < \sqrt{121}$.

c) $\sqrt{\frac{4}{100}} < \sqrt{\frac{16}{25}}$.

d) $\sqrt{0,64} > \sqrt{0,1}$.

e) $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ com n.

37. Observe que $\sqrt{9} = 3 < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4$.
Agora tentemos descobrir a primeira casa decimal após a vírgula:

i $3,1^2 = 9,61$.

ii $3,2^2 = 10,24$.

iii $3,3^2 = 10,89$.

iv $3,4^2 = 11,56$.

Logo, para apenas a descobrirmos a primeira casa decimal, basta observarmos que:

$$\begin{gathered} 3,3^2 < 11 < 3,4^2 \\ 10,89 < 11 < 11,56, \end{gathered}$$

Então a melhor aproximação com uma casa decimal será o $3,3$.

38. Observe que $\sqrt{11}$ com uma casa decimal foi aproximado para $3,3$. Agora para a casa do centésimo, basta considerarmos os quadradados:

$$(3,30)^2, (3,31)^2, (3,32)^2, \ldots, (3,39)^2, (3,40)^2.$$

Repetindo o procedimento do exercício anterior, a melhor aproximação será $3,31$.

39. Como $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$ e $\sqrt{64} = 8 < \sqrt{80} < \sqrt{81} = 9$. O primeiro inteiro positivo maior que $\sqrt{8}$ é 3 e o último inteiro menor que $\sqrt{80}$ é 8. Sendo assim, teremos 6 inteiros positivos, a saber $\{3,4,5,6,7,8\}$.

40. Temos:

$$\begin{aligned} 6 &= \sqrt{36} \\ &< \sqrt{37} \\ &< \sqrt{49} \\ &= 7; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 35 &= \sqrt{1225} \\ &< \sqrt{1226} \\ &< \sqrt{1296} \\ &= 36. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que o primeiro inteiro positivo maior que $\sqrt{37}$ é 7 e o último inteiro positivo menor que $\sqrt{1226}$ é o 35. Logo, teremos: $35 - 7 + 1 = 29$ inteiros positivos compreendidos entre os números do problema, a saber: $\{7, 8, 9, \ldots, 34, 35\}$.

41. Os quadrados dos números são respectivamente: 99, 112, 125, 108 e 98. Destes, apenas o primeiro e o último são menores que o quadrado de 10 que é 100. Assim, os três números do meio são maiores que 10. Resposta C.

42. Dados dois racionais a e b, somando a aos dois lados da desigualdade, temos:

$$\begin{aligned} a &< b \\ a + a &< b + a \\ 2a &< a + b \\ a &< \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento, agora com b, temos:

$$\begin{aligned} a &< b \\ a + b &< b + b \\ a + b &< 2b \\ \frac{a+b}{2} &< b \end{aligned}$$

O que resulta em: $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ Como $\dfrac{a+b}{2}$ também é um racional, isso mostra que existe um racional entre a e b.

Comentário para professores: É bom enfatizar que se a construção acima for reiterada com os racionais a e $\dfrac{a+b}{2}$ (ou com $\dfrac{a+b}{2}$ e b) o aluno poderá mostrar que existe uma infinidade de racionais entre a e b. Outros comentários comentários que poderiam instigar os alunos sobre a distribuição dos racionais e dos irracionais na reta seria questioná-los se qualquer intervalo contém números racionais e irracionais.

43. (Extraído da UNICAMP)
Uma boa estratégia seria eliminar os radicais elevando ambos números a uma potência múltipla de 3 e 4. Veja que:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{3})^{12} &= 3^4 \\ &= 81 \\ &> 64 \\ &= 4^3 \\ &= (\sqrt[4]{4})^{12} \end{aligned}$$

Portanto, como $(\sqrt[3]{3})^{12} > (\sqrt[4]{4})^{12}$, segue que $\sqrt[3]{3}$ é o maior.

44. (Extraído do Colégio Naval)

Façamos uma primeira estimativa:

$$\begin{gathered} 1 < 4 < 8 \\ 1^3 < 4 < 2^3 \\ \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8} \\ 1 < \sqrt[3]{4} < 2 \end{gathered}$$

Segunda estimativa:

$$\begin{gathered} 8 < 16 < 27 \\ 2^3 < 16 < 3^3 \\ \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{27} \\ 2 < \sqrt[3]{16} < 3 \end{gathered}$$

Finalmente, somando as duas últimas desigulddades obtidas, temos:

$$\begin{gathered} 3 < \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < 5 \\ 4 < 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < 6 \\ \sqrt{4} < \sqrt{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}} < \sqrt{6} \end{gathered}$$

Portanto, $n = 4$.

45. Vamos supor que é possível termos uma fração irredutível $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*$ tal que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Neste caso, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{m}{n} \\ (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{m}{n}\right)^2 \\ 2 &= \frac{m^2}{n^2} \\ 2n^2 &= m^2 \end{aligned}$$

Agora temos a seguinte situação, o membro da esquerda é par, portanto o da direita também o será. Contudo, não podemos ter m^2 par, se m também não for par. Sendo assim, $m = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e

$$\begin{aligned} m &= 2k \\ m^2 &= 4k^2 \end{aligned}$$

Agora, voltando à equação $2n^2 = m^2$ e substituindo o m^2 pelo $4k^2$, e ficamos com:

$$\begin{aligned} 2n^2 &= m^2 \\ 2n^2 &= 4k^2 \\ n^2 &= 2m^2. \end{aligned}$$

Pelo argumento anterior, n é par, isso contradiz nossa suposição inicial pois tínhamos assumido que a fração $\frac{m}{n}$ era irredutível. Essa contradição mostra que a suposição inicial é falsa, ou seja, $\sqrt{2}$ não é racional.

Comentário para professores: Este é um exemplo clássico de prova por absurdo. Quando mencionado em sala de aula, sugerimos que o professor comente exemplos cotidianos de afirmações que conduzem a absurdos para que os alunos se sintam mais confortáveis com tal demonstração.

46. Utilize o mesmo argumento da questão anterior.

47. Tome $A = B = \sqrt{2}$. Se o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional, o enunciado está satisfeito. Caso contrário, faça $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $B = \sqrt{2}$. Assim, $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ servirá como exemplo.

Comentário para professores: Já existe uma demonstração de que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é de fato irracional. Um exemplo mais construtivo usando fatos que não são estudados no oitavo ano seria escolher $A = \sqrt{10}$ e $B = \log_{10} 4$. Daí, $A^B = 2$ é um racional.

48. $F_5 = \{0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1\}$.

49. Usando a propriedade dada no enunciado, temos $7a - 5b = \pm 1$. Veja que $7a$ deve deixar resto 1 ou 6 na divisão por 5. Dentre os valores possíveis de a no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$, apenas 2 e 3 satisfazem tal condição. Se $a = 2$, temos $b = 3$. Se $a = 3$, teremos $b = 4$. Entretanto, como $\dfrac{2}{3} < \dfrac{5}{7} < \dfrac{3}{4}$, a fração procurada é $\dfrac{2}{3}$.

50.

a) Basta usar três vezes o balde de 5 litros e, em seguida, retirar duas vezes líquido do tambor usando o balde de 7 litros. Dessa forma, transportamos $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$ litro.

b) A quantidade a que podemos transportar de um tambor para o outro é da forma $k(2 - \sqrt{2}) + l(\sqrt{2})$ litros onde k e l são inteiros indicando quantas vezes tiramos ou colocamos líquidos usando cada um dos baldes. Se $l - k \neq 0$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a &= k(2-\sqrt{2}) + l\sqrt{2} \\ a - 2k &= \sqrt{2}(l-k) \\ \frac{a-2k}{l-k} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Assim, o número $\sqrt{2}$ seria o quociente de dois inteiros o que resultaria em um número racional. Sabemos que isso não pode acontecer porque $\sqrt{2}$ é irracional. Falta analisarmos o que acontece quando $l = k$. A equação se transforma em:

$$\begin{aligned} a &= k(2-\sqrt{2}) + l\sqrt{2} \\ &= k(2-\sqrt{2}) + k\sqrt{2} \\ &= 2k. \end{aligned}$$

Veja que $2k$ é par e assim não podemos levar um valor ímpar como $a = 1$. Em qualquer caso, não é possível colocar exatamente 1 litro usando os baldes com as capacidades dadas neste item.

51. (Extraído da prova da Cone Sul publicada na Revista Eureka número 5)
A fração $\frac{a}{b}$ é irredutível se e só se $\frac{a}{b-a}$ é irredutível (se a e b tem um fator comum, então a e $b - a$ têm um fator comum, e reciprocamente). O problema se transforma em achar o menor valor de n tal que as frações sejam todas irredutíveis. Observe que as frações anteirores possuem a forma $\dfrac{a}{n+a+2}$ e pelo critério anterior bastaria que $\dfrac{a}{n+2}$ fosse irredutível. Tendo isso em mente, se $n + 2$ é um primo maior que 91, todas as frações serão irredutíveis. Assim, um valor possível de n é 95 pois $n + 2 = 97$ é um número primo. Verifiquemos que é o menor possível.

(a) Se $n + 2 < 97$ e $n + 2$ é par, então n é par e há frações redutíveis como, por exemplo, $\frac{20}{n+2}$.

(b) Se $19 \leq n + 2 \leq 91$, obviamente há uma fração redutível.

(c) Se $n + 2 < 19$, então $n + 2$ tem um múltiplo entre 19 e 91 e, portanto, há uma fração redutível.

(d) Se $n + 2 = 93 = 3.31$, então $\frac{31}{n+2}$ é redutível.

(e) Se $n + 2 = 95 = 5.19$, então $\frac{19}{n+2}$ é redutível.

Logo, o valor mínimo de $n + 2$ é 97, que corresponde a $n = 95$.

52.

a) $x\sqrt[3]{x}$.

b) 4.

c) $3x^2y$.

d) $2\sqrt{2}+9\sqrt{2}=11\sqrt{2}$.

e) $(4a^6b^4)^{3/2}=\sqrt{2^6a^{18}b^{12}}=8a^9b^6$.

53.

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{x}$.

c) $\dfrac{\sqrt[9]{a^7}}{a}$.

d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{x}$.

e) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{a}$.

54.

a) $\dfrac{y^7}{x^8}$.

b) $\dfrac{3s^3}{t^6}$.

c) $\dfrac{a^{10}}{b^8}$.

d) $\dfrac{b^5}{a^8}$.

55.

$$\begin{aligned}\frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}{3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{3}{2}} &= \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{9}-\frac{3}{2}}\\ &= \frac{1}{-7/6}\\ &= -\frac{6}{7}.\end{aligned}$$

56.

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2}{\left(\frac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3} &= \frac{\frac{9x^4y^2}{a^6b^6}}{\frac{27x^3y^6}{8a^6b^6}}\\ &= \frac{8x}{3y^4}.\end{aligned}$$

57.

a) 2^2x^4.

b) $xy^2z^{1/2}$

c) $x^{1/8}$

58. Veja que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a^{-k}}+\frac{1}{1+a^k} &= \frac{1}{1+1/a^k}+\frac{1}{1+a^k}\\ &= \frac{a^k}{1+a^k}+\frac{1}{1+a^k}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Assim, se agruparmos a primeira fração com a última, a segunda com a penúltima e assim sucessivamente; sempre obteremos o número 1. A única fração que não fará parte de nenhum par é a do meio que vale $\dfrac{1}{1+a^0}=\dfrac{1}{2}$. Como a quantidade de pares é igual a n, a resposta é $1000+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2001}{2}$. Resposta D.

59. Indiquemos com uma seta o último dígito de um número. Assim,

$$13^1 \to 3 \quad 13^2 \to 9 \quad 13^3 \to 7 \quad 13^4 \to 1$$

$$13^5 \to 3 \quad 13^6 \to 9 \quad 13^7 \to 7 \quad 13^8 \to 1$$

$$\ldots$$

Como 13^4 termina em 1, sempre que multiplicarmos os números de uma linha por esse valor para obtermos os números da próxima, o último dígito se manterá. Podemos então agrupar os número de 4 em 4 e obtermos uma soma que termina em $3+9+7+1 \to 0$. Como $2007 = 501 \cdot 4 + 3$, teremos 501 grupos e sobrarão números com os dígitos 3, 9 e 7 cuja soma terminará em 9. Resposta E.

60.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2^{2007}+2^{2005}}{2^{2006}+2^{2004}}\right)\cdot 2006 &= \frac{2^{2005}(2^2+1)}{2^{2004}(2^2+1)}\cdot 2006 \\
&= 2\cdot 2006 \\
&= 4012.
\end{aligned}$$

A soma dos dígitos de 4012 é 7. Resposta D.

61. O número $24 = 2^3 \cdot 3$ tem somente dois divisores cubos perfeitos: 1 e 8. Assim, se é possível representar 24 na forma a^2b^3, então $b = 1$ ou $b = 2$ e, portanto, $a^2 = 24$ ou $a^2 = 3$, o que é impossível. Além disso, na alternativa a podemos tomar $a = 3$ e $b = 2$; na alternativa c, podemos tomar $a = 24$ e $b = c = 1$; na alternativa d, podemos tomar $a = 3$, $b = 1$ e $c = 2$; e na alternativa e, podemos tomar $a = 2$, $b = 3$ e $c = 1$. Resposta B.

62. Seja

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2^{1000}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000}{2^{1000}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000} \\
&= \frac{2^{1000}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2000}
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
A\cdot B &= \frac{2^{1000}\cdot 2000!}{2000!} \\
&= 2^{1000}
\end{aligned}$$

Como, $B = 1$, concluímos que $A = 2^{1000}$. Resposta C.

Observação: Estamos escrevendo 2000! no lugar de $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2000$.

63.

a) $2n$ b) $n/5$ c) $n+1$ d) $(n+3)/2$ e) n^3

64.

a) $2x\cdot x = 2x^2$. b) $2x\cdot(x+1) = 2x^2+2x$. c) $(x-1)(x+2) = x^2+x-2$.

65.

a) 8. b) 3. c) 11. d) $m + n + 2$.

66.

a) $32x^4y^3$.

b) $\dfrac{8x^3y^2}{4xy} = \dfrac{\cancel{8}\cancel{x^3}\cancel{y^2}}{\cancel{4}\cancel{x}\cancel{y}} = 2x^2y^2$

67.

a) $4x^2 + 4x - 7$. b) $2x^2 + 4x - 9$. c) $3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 4x - 8$.

68.

a) $a^3 - 5a^2 - 2a + 4$. b) $9a^2b + 6a^2 - 5ab - 3ab^2 + b^2$. c) $0,3a^4 + 0,4a^3 + \dfrac{a^2}{3}$.

69.

a) $3 + 2,5x$.

b) Para $x = 9$, teremos:

$$\begin{aligned} 3 + 2,5x &= 3 + 22,5 \\ &= R\$25,50. \end{aligned}$$

70.

a) $x^2 + 3x + 2$.

b) $x^2 + 12x + 27$.

c) $x^2 + x - 6$.

d) $x^2 - 16$.

e) $x^2 + 10x + 25$.

f) $x^2 - 8x + 16$.

g) $x^2 + 2x + \dfrac{3}{4}$.

71.

a) 1 b) -11 c) 5 d) -149 e) $5/8$

Comentário para professores: É interessante instigar os alunos a calcularem em alguns exemplos numéricos simples o resto da divisão de um polinômio em x por $x + a$ e compararem com o valor obtido de tal polinômio quando avaliado em $-a$. Isto poderá ajudá-los a intuir e a compreender melhor a demonstração do Teorema dos Restos que segue:

Se $P(X)$ possui quociente $Q(X)$ e resto $R(x)$ ao ser dividido por $x + a$, então:

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x)(x + a) + R(x) \\ P(-a) &= Q(-a)(-a + a) + R(-a) \\ P(-a) &= R(-a) \end{aligned}$$

Como $R(x)$ é um polinômio constante pois $x + a$ possui grau 1, podemos concluir que $R(x) = P(-a)$.

72. As expressões das letras (b), (c) e (d) são divisíveis pelos polinômios dados enquanto que as expressões em (a) e (e) não o são.

73.

a) $5x - 3y$.

b) $5 \cdot 8 - 3 \cdot 2 = 34$.

74.

a) $50 - x$, para $0 \leq x \leq 50$.

b) $150 - 3x$, para $0 \leq x \leq 50$.

75.

a) a^4.

b) $12y^7$.

c)

$$\begin{aligned} \frac{(2x^3)^2(3x^4)}{(x^3)^4} &= \frac{(4x^6)(3x^4)}{x^{12}} \\ &= \frac{12x^{10}}{x^{12}} \\ &= 12x^{-2}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} (2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) \\ &= 54a^6b^{14}. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \left(\frac{x^3}{y^3}\right)\cdot\left(\frac{y^8x^4}{z^4}\right) \\ &= \frac{x^7y^5}{z^4} \end{aligned}$$

76.

a) y^7/x^8

b) $3s^3/t^6$

c) a^{10}/b^8

d) b^5/a^8

77.

$$\begin{aligned} \frac{\left(\dfrac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2}{\left(\dfrac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3} &= \frac{\dfrac{9x^4y^2}{a^6b^6}}{\dfrac{27x^3y^6}{8a^6b^6}} \\ &= \frac{8x}{3y^4}. \end{aligned}$$

78.

a) 9.

b) $2n + 3$.

c) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 26 = 351$.

79. Devemos ter $9 = (n+1) + (2n-1) = 3n$. Portanto, $n = 3$.

80. Pela propriedade de distributividade:

$$\begin{aligned} (kx-1)(2x+1) &= 2kx^2 + kx - 2x - 1 \\ &= 2kx^2 + x(k-2) - 1. \end{aligned}$$

A soma dos coeficientes é $2k + (k-2) - 1 = 3k - 3$. Tal soma vale 3 apenas quando $k = 2$.

81.

a) $x^2 - a^{2n}$.

b) $x^2 + 2xa^{2n} + a^{4n}$.

c) $x^2 - 4xa + 4a^2$.

82. Pelo Teorema dos Restos, todas as divisões anteriores são exatas. Além disso, como:

$$\begin{aligned} (x^2 - a^2) &= (x+a)(x-a) \\ (x^2 + 2xa + a^2) &= (x+a)(x+a) \\ (x^3 + a^3) &= (x+a)(x^2 - ax + a^2). \end{aligned}$$

Os quocientes são: $(x+a)$, $(x+a)$ e $x^2 - ax + a^2$, respectivamente.

83.

a) $x = -2$

b) $x = 4$

c) $x = 0$.

84. Pelo Teorema dos Restos, basta que $P(1)$, $P(-1)$ e $P(2)$ sejam nulos.

a) Calculando $P(1)$ teremos

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 - 2 + 3 + k \\ &= 2 + k \\ &= 0; \end{aligned}$$

b) Calculando $P(-1)$ teremos

$$\begin{aligned} P(-1) &= -1 - 2 - 3 + k \\ &= -6 + k \\ &= 0; \end{aligned}$$

c) Calculando $P(2)$ teremos

$$\begin{aligned} P(2) &= 8 - 8 + 6 + k \\ &= 6 + k \\ &= 0; \end{aligned}$$

Os valores de k devem ser -2, 6 e -6, respectivamente.

85.

a) $(2500 - 4x^2)cm$.

b) $(2500 - 4 \cdot 25) = 2400cm^2$.

c) Será formado uma caixa sem tampa cujo fundo é um quadrado de $50 - 2x$cm de lado e cujas alturas medem $x$cm. Portanto, o volume de tal caixa é $x(50 - 2x)^2$.

86. (Adaptado do exame do EPCAR − 2012)
Temos:

$$\begin{aligned} \frac{(x^{2n+1} + x)(x^{2n+1} - x) - (x^4)^{(n+1/2)}}{(x^n + x)^2 - x^{2n} - 2x^{n+1}} &= \\ \frac{(x^{4n+2} - x^{2n+2} + x^{2n+2} - x^2) - x^{4n+2}}{x^{2n} + 2x^{n+1} + x^2 - x^{2n} - 2x^{n+1}} &= \\ \frac{-x^2}{x^2} &= \\ -1 \end{aligned}$$

87. Pelo algoritmo da divisão, temos:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 - 2x + 4 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x & \\ \hline 6x^2 - x + 4 & x + 6 \\ -6x^2 + 6 & \\ \hline -x + 10 & \end{array}$$

Assim, o quociente vale $x + 6$ e o resto $-x + 10$.

88. (Adaptado do exame do EPCAR − 2014)

a) Seja x a mensalidade em 2012. Após o aumento de 80%, o valor da mensalidade passou para:

$$100\%x + 80\%x = 1,8x.$$

A redução de 30% transformou a mensalidade em $1,8x \cdot 0,7$. Finalmente, com o desconto de 10%, esse valor passou para:

$$x \cdot 1,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 \quad = \quad 1,134x$$

b) Basta substituirmos o valor de x e multiplicarmos pela quantidade de meses do ano obtendo:

$$1,134 \cdot 800 \cdot 12 = R\$10.886,40.$$

89. (Adaptado do exame de acesso do Colégio Naval − 2011)

a) $\sqrt[3]{-(2-1)^6} = \sqrt[3]{-1} = -1.$

b) Como todo quadrado de um número real é não negativo, temos $(x-1)^6 \geq 0$. Assim, $-(x-1)^6 \leq 0$ e $\sqrt[3]{-(x-1)^6} \leq 0$.

Como $\sqrt[3]{-(1-1)^6} = 0$, em virtude da última desigualdade, podemos concluir que o valor máximo da expressão é 0.

90.

a)

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{99}\right) &= \\
\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{99} &= \\
\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{\cancel{99}} &= \\
\frac{100}{2} &= 50.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x+98}\right) &= \\
\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x+3}{x+2}\cdot\frac{x+4}{x+3}\cdot\ldots\cdot\frac{x+99}{x+98} &= \\
\frac{\cancel{x+2}}{x+1}\cdot\frac{\cancel{x+3}}{\cancel{x+2}}\cdot\frac{\cancel{x+4}}{\cancel{x+3}}\cdot\ldots\cdot\frac{x+99}{\cancel{x+98}} &= \\
\frac{x+99}{x+1}. &
\end{aligned}$$

91.

a) Seja

$$\begin{aligned}
C &= \frac{2^{1000}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000}{2^{1000}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000} \\
&= \frac{2^{1000}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2000}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A\cdot C &= \frac{2^{1000}\cdot 2000!}{2000!} \\
&= 2^{1000}.
\end{aligned}$$

Como, $C = 1$, concluímos que $A = 2^{1000}$.

b) Como no item anterior, considere um número auxiliar:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{2^x\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x}{2^x\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x} \\
&= \frac{2^x\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2x}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
B\cdot D &= \frac{2^x\cdot(2x)!}{(2x)!} \\
&= 2^x.
\end{aligned}$$

Como, $D = 1$, concluímos que $D = 2^x$.

Observação: Estamos escrevendo $n!$ no lugar de $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

92.

a) $x^2 + 2x + 1$. b) $16 + 8x + x^2$. c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$. d) $9x^2 + 6x + 1$. e) $16x^2 + 16x + 4$.

93.

a) $4x^2 + 12x + 9$.

b) $4x^2 + 12xy + 9y^2$.

c) $x^4 + 6x^2 + 9$.

d) $a^4 + 6a^2b^2 + 9b^4$.

e) $x^8 + 18x^4 + 81$.

94.

a) Cálculo do valor de 13^2.

$$\begin{aligned} 13^2 &= (10+3)^2 \\ &= 100 + 60 + 9 \\ &= 169; \end{aligned}$$

b) Cálculo do valor de 41^2.

$$\begin{aligned} 41^2 &= (40+1)^2 \\ &= 1600 + 80 + 1 \\ &= 1681; \end{aligned}$$

c) Cálculo do valor de 19^2.

$$\begin{aligned} 19^2 &= (20-1)^2 \\ &= 400 - 40 + 1 \\ &= 361. \end{aligned}$$

95.

a)

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} &= \\ a + 2\sqrt{ab} + b - 2\sqrt{ab} &= \\ a + b. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (x-1)^2 &= \\ (x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1) &= \\ 2x^2 + 2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (a+1)^2 + 2(a+1)a + a^2 + 2(2a+1) + 1 &= \\ ((a+1) + a)^2 + 2(2a+1) + 1^2 &= \\ (2a+2)^2. \end{aligned}$$

96.

a) $a^2 + 2ab + b^2$. b) $4a^2 - 4ab + b^2$. c) $4a^2b^2 + 12abc + 9c^2$. d) $4a^2 - 8ab + 4b^2$.

97.

a) $x^2 - 1$.

b) $16 - a^2$.

c) $x^4 - 9z^2$.

d)

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y) &= \\ (x-y)(x+y) &= \\ (x^2 - y^2) \end{aligned}$$

98.

a) $100^2 - 1^2 = 9999$. b) $2000^2 - 4 = 3999996$. c) $10^2 - 5^2 + 5^2 = 100$.

99. Cada termo obtido após usarmos a distributividade teve um de seus membros vindo de alguma letra entre os primeiros parênteses e o segundo vindo de alguma entre os segundos parênteses. Assim, como temos duas possibilidade de escolhas em cada um deles, teremos no total 2×2 termos possíveis na múltiplicação. Isso pode também pode ser facilmente visualizado se momentaneamente colocarmos um índice para distinguirmos de qual parêntese veio cada letra. Por exemplo:

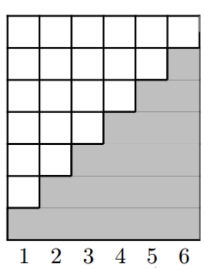
$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) &= \\ a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2 & \end{aligned}$$

100. Como temos três parênteses e em cada um deles temos duas escolhas, o número de termos é $2 \times 2 \times 2 = 8$. Para formarmos o termo a^2b, dois parênteses irão fornecer a letra "a" e o outro a letra b. Uma vez escolhido aquele que irá fornecer a letra "b", os demais estão determinados. Podemos fazer tal escoha de 3 formas e assim existirão três termos a^2b. O mesmo argumento se aplica ao termo ab^2. A única maneira de formarmos os termos a^3 e b^3 é escolhendo a mesma letra em todos os parênteses e isso só pode ser feito de uma forma. Assim,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

101. O retângulo 6×7 desenhando abaixo foi dividido em duas figuras na forma de escada. Em cada coluna, estamos escrevendo quantos quadrados foram pintados. Como as duas figuras são iguais, a soma dos quadrados pintados - que corresponde ao termo $1+2+3+4+5+6$ da equação -, deve ser igual à metade da área do retângulo, ou seja,

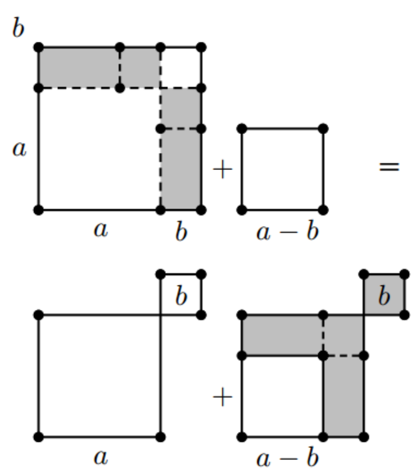
$$1+2+3+4+5+6 = \frac{6 \cdot 7}{2}.$$



Construindo um rentângulo $n \times (n+1)$, é possível mostrar que:

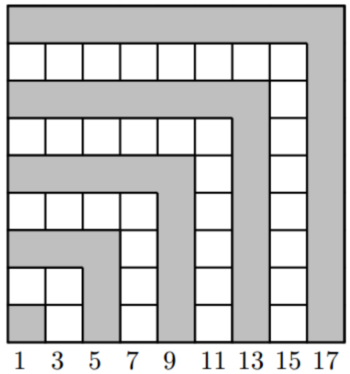
$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

102. Um exemplo seria:



Comentário para professores: O exemplo anterior é de Shirley Wakin e foi retirado do livro "*Proofs without words" escrito por Roger Nelsen. O leitor interessado poderá encontrar mais exemplos interessantes em tal fonte.*

103. Um exemplo seria:



Veja que área do quadrado maior de lado 9 é a soma das áreas das regiões destacadas e cada uma delas é da forma $2n+1$ onde n é o lado do quadrado que a região contorna. É possível construirmos quadrados cada vez maiores e mostrarmos que a soma dos k primeiros inteiros positivos ímpares é igual à k^2.

104. Como todo quandrado perfeito é um número não negativo, se a e b representam as notas de um aluno, temos:

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0\\ a-2\sqrt{ab}+b &\geq 0\\ a+b &\geq 2\sqrt{ab}\\ \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}\end{aligned}$$

Assim, é preferível escolher a média aritmética porque ela é sempre maior ou igual à média geométrica.

Comentário: Provamos que se a e b são não negativos, então:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Isso é um caso particular do resultado mais geral de que a média aritmética de n números reais não negativos é sempre maior ou igual à média geométrica de tais números.

105. Vamos usar novamente o fato de que todo quadrado é um número não negativo.

a) Sendo assim, teremos que

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &\geq 0\\ a^2-2ab+b^2 &\geq 0\\ a^2+2ab+b^2 &\geq 4ab\\ (a+b)^2 &\geq 4ab.\end{aligned}$$

b) Dividindo a expressão do item anterior por $ab(a+b)$ obtemos:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}\geq\frac{4}{a+b}.$$

c) Usaremos o item anterior três vezes:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} &\geq\\ \left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}\right)+\frac{16}{d} &\geq\\ \left(\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}\right) &\geq\\ \frac{64}{a+b+c+d}.\end{aligned}$$

106. Sejam a e b as dimensões do retângulo, devemos ter que $2a+2b=2$, ou seja, $a+b=1$. A área obtida será ab. Pelo exercício anterior,

$$ab=(\sqrt{ab})^2\leq(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}.$$

Assim, a área máxima é $\frac{1}{4}$. Podemos obtê-la construindo um quadrado de lado $\frac{1}{2}$.

107. Pela diferença de quadrados, temos:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

Apliquemos novamente a diferença de quadrados para obter o número:

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot B \\ &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Para terminar, veja que:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot C \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Resposta C

108. Se denotarmos por $a = 20142012$ o valor da expressão anterior pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} (a+1)^2 - 2(a+1)a + a^2 &= [(a+1)-a]^2 \\ &= 1^2. \end{aligned}$$

109. (Extraído da OBM 2014)
Usando a diferença de quadrados, podemos escrever:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = (x-y).$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x}-\sqrt{y} &= \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{a^2}{b} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} &= b \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema anterior, encontramos $\sqrt{x} = \dfrac{b^2+a^2}{2b}$ e $\sqrt{y} = \dfrac{b^2-a^2}{2b}$. Assim,

$$\sqrt{xy} = \frac{b^4-a^4}{4b^2}.$$

110. Note que:

$$\begin{aligned} a(10-a) &= 10a - a^2 \\ &= 25 - 25 + 10a - a^2 \\ &= 25 - (5-a)^2 \end{aligned}$$

Como $(5-a)^2$ é sempre um número não negativo, a última expressão é no máximo 25. Tal valor é atingido apenas quando $(5-a)^2 = 0$, ou seja, quando $a = 5$.

111.

$$\begin{aligned}4a - a^4 &= 4a - 2a^2 + 2a^2 - a^4\\ &= 4a + 1 - 2a^2 - 1 + 2a^2 - a^4\\ &= 4a + 1 - 2a^2 - (a^2-1)^2\\ &= 3 - 2 + 4a - 2a^2 - (a^2-1)^2\\ &= 3 - 2(a-1)^2 - (a^2-1)^2.\end{aligned}$$

Como $2(a-1)^2 + (a^2-1)^2$ é sempre um número não negativo por se tratar da soma de três quadrados, a expressão anterior é no máximo 3. Veja que tal valor pode ser atingido quando $a = 1$.

112.

a) $a(5+b)$. b) $a(m+n)$. c) $x(a+b+c)$. d) $a(x+1)$. e) $b(a+c+ac)$.

113.

a) $\dfrac{1}{2}$. b) $\dfrac{3}{8}$. c) $\dfrac{a}{2}$. d) $\dfrac{a+b}{a-b}$. e) x^2.

114.

a) $(a+b)(a+c)$. b) $(a-b)(x+y)$. c) $(2a+1)(b+1)$. d) $(a-b)(x+2)$. e) $(5a-1)(2b+3)$.

115.

a) m^2. b) $\dfrac{x^2+1}{x^2}$. c) $\dfrac{m^3+2}{m+3}$.

116.

a) $(a-5b)(a+5b)$. b) $(2x-1)(2x+1)$. c) $(\sqrt{7}-x)(\sqrt{7}+x)$. d) $(ax-by)(ax+by)$. e) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

117.

a) A expressão não representa um binômio perfeito. Se fosse $b^2 = 3$, deveríamos ter $b = \sqrt{3}$. Entretanto, $-4 \neq -2bx$.

b) $x^2 + x + \dfrac{1}{4} = (x+1/2)^2$.

c) A expressão não representa um binômio perfeito. Se fosse $b^2 = 18$, deveríamos ter $b = 3\sqrt{2}$. Entretanto, $6 \neq 2by$.

d) $4z^2 - 12zy + 9y^2 = (2z-3y)^2$.

e) $3z^2 + 6z + 3 = (\sqrt{3}z + \sqrt{3})^2$.

118.

a) $(x-1)^2(x+1)^2$. b) $5(a-1)^2$. c)

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 - 2bc - c^2 &=\\ a^2 - (b+c)^2 &=\\ (a-(b+c))(a+(b+c)) &=\\ (a-b-c)(a+b+c).\end{aligned}$$

119.

a) 20. b) $\dfrac{xy}{3}$. c) $\dfrac{xy}{(x+1)(y+1)}$.

120.

$$\begin{aligned} x^2y + y^2x &= xy(x+y) \\ &= 6 \cdot 7 \\ &= 42. \end{aligned}$$

121. (Extraído do vestibular da UNIVASF)
Temos

$$\begin{aligned} \frac{a+x}{b-x} &= \frac{c}{d} \\ &\Rightarrow \\ cb - xc &= ad + xd. \end{aligned}$$

Isolando os termos com x de um só lado e fatorando-o, obtemos: $cb - ad = xc + xd = x(c+d)$, ou seja, $x = \dfrac{bc - ad}{c+d}$.

122.

a) $b(a-b)(a+b)$.
b) $(x-y-3)(x-y+3)$.
c) $(a-4)^2(a+4)^2$

123. Pela distributividade, temos:

$$\begin{aligned} (x-y)(x^2+xy+y^2) &= \\ (x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2}) - (\cancel{yx^2} + \cancel{xy^2} + y^3) &= \\ x^3 - y^3 \end{aligned}$$

Usando a fatoração fornecida, temos:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4).$$

124. Se $y = -z$, temos:

$$\begin{aligned} x^3 + z^3 &= \\ x^3 + (-y)^3 &= \\ x^3 - y^3 &= \\ (x-y)(x^2+xy+y^2) &= \\ (x+z)(x^2-xz+z^2) \end{aligned}$$

Obtemos assim uma fatoração para a soma dos cubos dada por:

$$x^3 + z^3 = (x+z)(x^2 - xz + z^2).$$

125. Se x e y são esses números, temos:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) &= \\ (x+y)((x+y)^2 - 3xy) &= \\ 4 \cdot (4^2 - 3) &= \\ 52 \end{aligned}$$

126.

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) &= \\ (x+y)((x+y)^2 - 3xy) &= \\ 3 \cdot (3^2 - 3) &= 18 \end{aligned}$$

127.

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} &= \\ 2^2 - 2 &= 2 \end{aligned}$$

128. (Extraído da Olimpíada Cearense)

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (-a+b)^2 + 2(a-b)(b-a) &= \\ [(a-b) + (-a+b)]^2 &= 0. \end{aligned}$$

129. (Extraído da AIME) Aplicando a diferença de quadrados nos dois primeiros parênteses e nos dois últimos, temos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}) &= \\ ((\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 - 7) &= \\ (4 + 2\sqrt{30}) & \\ (\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{6}) &= \\ (7 - (\sqrt{5} - \sqrt{6})^2) &= \\ (-4 + 2\sqrt{30}) & \end{aligned}$$

Assim, o produto é igual à:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{30} + 4)(2\sqrt{30} - 4) &= \\ 4 \cdot 30 - 16 &= 104. \end{aligned}$$

130.

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ &= (x^2+2)^2 - 4x^2 \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2). \end{aligned}$$

131.

$$\begin{aligned} (n(n+3)+1)^2 &= n^2(n+3)^2 + 2n(n+3) + 1 \\ &= n(n+3)[n(n+3)+2] + 1 \\ &= n(n+3)[n^2 + 3n + 2] + 1 \\ &= n(n+3)[(n+1)(n+2)] + 1 \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 \end{aligned}$$

132. Usando o exercício anterior para $n = 2014$, obtemos $(2014)(2017) + 1$.

133.

$$\begin{aligned} p^4-1 &= (p^2-1)(p^2+1) \\ &= (p-1)(p+1)(p^2+1) \end{aligned}$$

134. (Extraída do vestibular da UFRJ)
Seja $y = \sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{3+\sqrt{8}}$. Claramente y é um inteiro positivo pois cada um dos radicais o é. Assim, o produto xy possui o mesmo sinal de x. Calculemos tal produto usando diferença de quadrados:

$$\begin{aligned} xy &= (3-\sqrt{8})-(3+\sqrt{8}) \\ &= -2\sqrt{8}. \end{aligned}$$

Portanto, como $-\sqrt{8}$ é negativo, x também o é.

135.

$$\begin{aligned} n^5+n^4+1 &= \\ n^5+n^4+n^3-n^3-n^2-n+n^2+n+1 &= \\ n^3(n^2+n+1)-n(n^2+n+1)+(n^2+n+1) &= \\ (n^2+n+1)(n^3-n+1). \end{aligned}$$

136. (Extraído da Olimpíada Cearense)
Usando diferença de quadrados, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}-\sqrt{n-1} &= \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

Para que o número anterior seja menor que $0,01$, devemos ter:

$$\sqrt{n}+\sqrt{n-1} > 100.$$

Se $n \leq 50^2$,

$$\begin{aligned} \sqrt{n}+\sqrt{n-1} &< 50+\sqrt{2499} \\ &< 100. \end{aligned}$$

Se $n = 50^2+1$,

$$\begin{aligned} \sqrt{n}+\sqrt{n-1} &= \sqrt{2501}+50 \\ &> 100. \end{aligned}$$

Logo, o menor inteiro positivo que satisfaz a desigualdade do enunciado é $n = 50^2+1$.

137. Aplicando a diferença de quadrados sucessivamente, temos:

$$\begin{aligned} a^{32}-b^{32} &= \\ (a^{16}+b^{16})(a^{16}-b^{16}) &= \\ (a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^8-b^8) &= \\ (a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^4-b^4) &= \\ (a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2) &= \end{aligned}$$

Assim, o quociente é a^2-b^2.

138. Note que $((x+1)^2 - (x+1) + 1) = (x^2 + x + 1)$.

Verifiquemos agora uma fração genérica do produto:

$$\begin{aligned} \frac{x^3-1}{x^3+1} &= \\ \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} &= \\ \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2-(x+1)+1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

A primeira parte da última expressão é uma fração onde o numerador e o denominador diferem por 2 e a segunda parte é um quociente de termos envonvendo a expressão $n^2 - n + 1$ quando n é $x+1$ e x. Vamos analisar a expressão anterior para cada valor de x no conjunto $\{2, 3, \ldots, 100\}$.

Primeiramente vejamos o que acontece quando multiplicarmos apenas as frações que constituem a primeira parte da expressão:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{7}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{98}}{100} \cdot \frac{\cancel{99}}{101} &= \\ \frac{2}{100 \cdot 101}. \end{aligned}$$

A segunda parte produz um cancelamento diferente:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{3^2-3+1}}{2^2-2+1} \cdot \frac{\cancel{4^2-4+1}}{\cancel{3^2-3+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{101^2-101+1}{\cancel{100^2-100+1}} &= \\ \frac{10101}{3}. \end{aligned}$$

Assim, o valor da expressão é:

$$\frac{2}{100 \cdot 101} \cdot \frac{10101}{3} = \frac{3367}{5050}.$$

139. (Extraído da OBM 2014)
Observe que:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{F_k^2}{F_{k+1}^2} &= \frac{F_{k+1}^2 - F_k^2}{F_{k+1}^2} \\ &= \frac{(F_{k+1} - F_k)(F_{k+1} + F_k)}{F_{k+1}^2} \\ &= \frac{F_{k-1}F_{k+2}}{F_{k+1}^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{F_2^2}{F_3^2}\right)\left(1 - \frac{F_3^2}{F_4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right) &= \\ \frac{F_1F_4}{F_3^2} \cdot \frac{F_2F_5}{F_4^2} \cdot \frac{F_3F_6}{F_5^2} \ldots \frac{F_{2012}F_{2015}}{F_{2014}^2} &= \\ \frac{F_1\cancel{F_4}}{\cancel{F_3^2}} \cdot \frac{F_2\cancel{F_5}}{\cancel{F_4^2}} \cdot \frac{\cancel{F_3}\cancel{F_6}}{\cancel{F_5^2}} \ldots \frac{\cancel{F_{2012}}F_{2015}}{\cancel{F_{2014}^2}} &= \\ \frac{F_1 \cdot F_2 \cdot F_{2015}}{F_3 \cdot F_{2013} \cdot F_{2014}} &= \\ \frac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}. \end{aligned}$$

Resposta E.

140. Na identidade anterior, podemos trocar a soma de quaisquer dois, pelo simétrico do terceiro obtendo:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &= \\ x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) &= \\ x^3 + y^3 + z^3 + 3(-z)(-y)(-x) &= \\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz. \end{aligned}$$

Como $(x+y+z)^3 = 0$, segue o resultado.

141. (Extraído da Olimpíada do Cone Sul)
Comecemos analisando alguma relação entre a, b e $a+b+ab$. O último termo lembra a fatoração:

$$(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1.$$

Em cada momento após realizarmos as operações, se analisarmos a quantidade que representa o produto de todos os números do conjunto acrescidos de uma unidade. A equação anterior nos diz que tal produto nunca se altera. Consequentemente, no final teremos um único número x tal que:

$$(1+1/2)(1+1/3)\ldots(1+1/100) = (1+x).$$

Ou seja, $x = 99/2$. Para entender melhor que quantidade estamos analisando, façamos um exemplo pequeno. Suponha que em um dado momento temos os números 2, 3 e 5, devemos analisar o número

$$(2+1)(3+1)(5+1).$$

Se trocarmos $a = 2$ e $b = 3$ por $ab + a + b = 11$ e fizermos o novo produto obteremos:

$$(11+1)(5+1).$$

Perceba que o valor continua sendo o mesmo.

142. Para fazer tal expansão, podemos considerar momentaneamente $x + y = w$ e a expressão que já conhecemos para o binômio:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &= \\ (w+z)^3 &= \\ w^3 + 3w^2z + 3wz^2 + z^3 & \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} w^3 &= \\ (x+y)^3 &= \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &= \\ x^3 + y^3 + 3xy(x+y) &= \\ x^3 + y^3 + 3xyw & \end{aligned}$$

Voltando para a expressão original, temos:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &= \\ x^3 + y^3 + z^3 + 3xyw + 3w^2z + 3wz^2. & \end{aligned}$$

Resta estudarmos o termo:

$$\begin{aligned} 3xyw + 3w^2z + 3wz^2 &= \\ 3w(xy + wz + z^2) &= \\ 3(x+y)(xy + xz + yz + z^2) &= \\ 3(x+y)(x+z)(y+z) & \end{aligned}$$

Com isso, podemos concluir que:

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z).$$

143. Para fazer tal expansão, podemos considerar momentaneamente $x + y = w$ e a expressão que já conhecemos para o binômio:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= \\ (w+z)^2 &= \\ w^2 + 2wz + +z^2 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} w^2 &= \\ (x+y)^2 &= \\ x^2 + 2xy + y^2. \end{aligned}$$

Voltando para a expressão original, temos:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2wz &= \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2(x+y)z &= \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x + 2yz \end{aligned}$$

Com isso, podemos concluir que:

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

144. Sejam $x = b - c$, $y = c - a$ e $z = a - b$. Pelo exercício anterior, como $x + y + z = 0$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} (b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 &= \\ x^3 + y^3 + z^3 &= \\ 3xyz &= \\ 3(b-c)(c-a)(a-b). \end{aligned}$$

145. Elevando ao quadrado a igualdade dada, temos

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(abxy + bcyz + cazx) \quad = \quad 0$$

E consequentemente:

$$-2(abxy + bcyz + cazx) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

Daí, a expressão $bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2$ é igual a

$$\begin{aligned} & x^2(ab+ac) + y^2(ba+bc) + z^2(ca+cb) \\ & -2(abxy + bcyz + cazx) \\ = \; & x^2(a^2+ab+ac) + y^2(ba+b^2+bc) + \\ & +z^2(ca+cb+c^2) \\ = \; & ax^2(a+b+c) + by^2(a+b+c) + \\ & +cz^2(a+b+c) \\ = \; & (ax^2+by^2+cz^2)(a+b+c). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2} = \frac{1}{a+b+c},$$

que independe de x, y e z.

146.

a) F.

b) A.

c) F.

d) A.

e) F.

f) A.

g) A.

147. a, b, d, g, i.

148.

a) $P = 4l$, sendo P o perímetro e l a medida do lado.

b) $A = l^2$, sendo A a área e l a medida do lado.

c) $L + l = 16$, sendo L a idade de Luiz e l a idade de Luísa.

d) $\dfrac{\sqrt{x}}{2} < 3x$, sendo x o referido número.

e) $S = 700 + \dfrac{20}{100} \cdot V = 700 + 0,2V$, sendo S o salário e V o valor das vendas.

f) $A = b \cdot 2b = 2b^2$, sendo A a área e b a medida da base.

149.

a) $A = 6l^2$.

b) $V = l^3$.

c) $S = 12l$.

150. (Extraído da Vídeo Aula)
Supondo que Diofanto tenha vivido x anos, temos $x = \dfrac{x}{6} + \dfrac{x}{12} + \dfrac{x}{7} + 5 + \dfrac{x}{2} + 4$. Para resolver esta equação, primeiramente encontraremos um denominador comum a todas as frações, sendo o menor deles (e mais fácil de se trabalhar) 84. Escrevendo agora as frações equivalentes, com denominador 84, a cada uma das frações da equação, temos $\dfrac{84x}{84} = \dfrac{14x}{84} + \dfrac{7x}{84} + \dfrac{12x}{84} + \dfrac{420}{84} + \dfrac{42x}{84} + \dfrac{336}{84}$. Fazendo as devidas simplificações, chegamos a $x = 84$, que é a quantidade de anos vividos por Diofanto.

151. (Extraído da Vídeo Aula)

a) $P = 2a + b + a + b + b + 2a + b + a = 6a + 4b$.

b) Basta somar ao perímetro encontrado no item anterior, as medidas internas de divisão do terreno. Assim, ficamos com $Q = 6a + 4b + a + b + 2a = 9a + 5b$.

c) Vamos calcular cada uma das áreas dos retângulos menores e somá-las. Temos então

$$A = 2a^2 + 2ab + ab + b^2 = 2a^2 + 3ab + b^2.$$

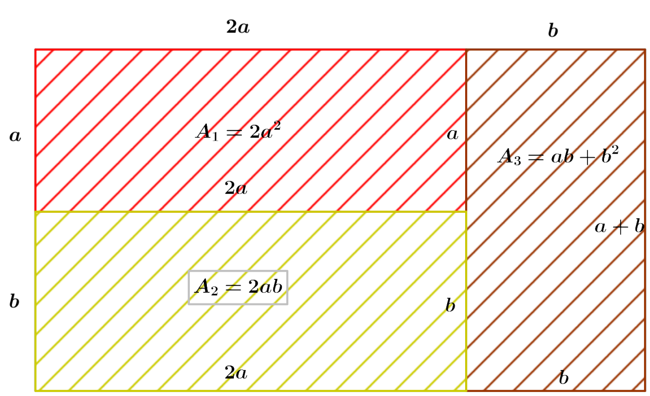


Figura 2

152.

a) Representaremos a área de um polígono $ABCD$ por $[ABCD]$. Os dois polígonos formados são trapézios, que possui uma fórmula para o cálculo direto de sua área, porém não a utilizaremos. Trace duas paralelas ao lado AB, uma pelo ponto E e outra pelo ponto F. Pronto! Dividimos cada trapézio em um retângulo e um triângulo. Vamos ao cálculo de suas áreas. $[ABFE] = 30 \cdot 5 + \dfrac{30 \cdot (x-5)}{2} = 75 + 15x$. $[CDEF] = 30 \cdot (40 - x) + \dfrac{30 \cdot (x-5)}{2} = 1125 - 15x$.

b) Como a $[CDEF]$ é o dobro de $[ABFE]$, temos:

$$\begin{aligned} [CDEF] &= 2[ABFE] \\ 1125 - 15x &= 150 + 30x \\ 45x &= 975 \\ x = \frac{65}{3}. \end{aligned}$$

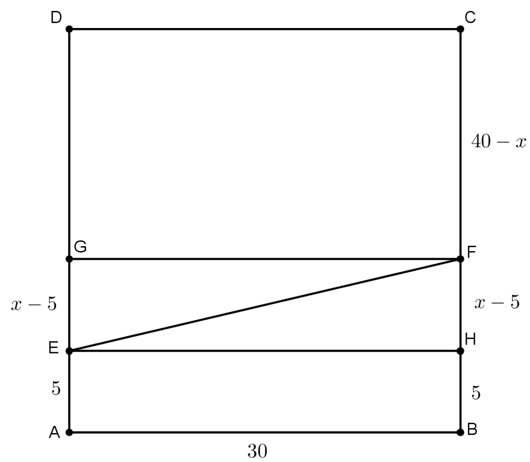


Figura 4

153.

a) $2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$.

b) $4 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$.

c) $3^2 - (-1)^3 = 9 + 1 = 10$.

d) $2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2^2 = 18 - 12 = 6$.

e) $\dfrac{5 - 5 \cdot 3}{4} = -\dfrac{5}{2}$.

f) $4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2^2 = 16 + 16 + 4 = 36$.

154. O total de janelas é $12 \cdot 4 \cdot 6 = 288$. Como cada vidro tem dimensões a e b, a área total de vidros é $288ab$.

155.

a) a área do terreno é $xy + 3y$.

b) $A = 20 \cdot 15 + 3 \cdot 15 = 300 + 45 = 345m^2$.

156. (Extraído da Vídeo Aula)
Multiplicando por dois a nota da prova ficaremos com $2p$, somando a nota do teste teremos $2p + t$, por fim, a dividindo por três chegaremos a nota final como

$$n = \frac{2p + t}{3}.$$

157. (Extraído da Vídeo Aula)
Seja $\frac{x}{y}$ a fração inicial e procedendo com as operações do enunciado teremos

$$\frac{x - 0,4x}{y - 0,6y} = \frac{0,6x}{0,4y} = \frac{3x}{2y} = 1,5 \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y} + 0,5 \cdot \frac{x}{y},$$

ou seja, chegamos a fração inicial aumentada em 50%, o que está na letra **d**.

158.

a) $V = x \cdot 2x \cdot y = 2yx^2$.

b) $A = 2 \cdot xy + 2 \cdot 2xy + 2x^2 = 2x^2 + 6xy$.

c) Se $x = 3m$ e $y = 2m$, então temos

$$V = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36m^3 = 36.000\ell.$$

159.

a) $P = 4x + 8y - 4$.

b) basta somarmos ao perímetro, os comprimentos das linhas internas. Temos então

$$S = (4x + 8y - 4) + (4x + 2y) = 8x + 10y - 4.$$

c) se $x = 2m$ e $y = 2,5m$, temos

$$A = 2x \cdot (4y - 2) = 4 \cdot 8 = 32m^2.$$

160. (Extraído da Vídeo Aula)
Inicialmente vamos chamar as balanças, de cima para baixo, de b_1, b_2 e b_3. Na balança b_2 temos dois triângulos e quatro círculos equilibrando com oito quadrados. Se tomarmos metade das figuras de cada lado, como na figura abaixo, a balança continuará em equilíbrio. Vamos chamar esta balança de b_4.

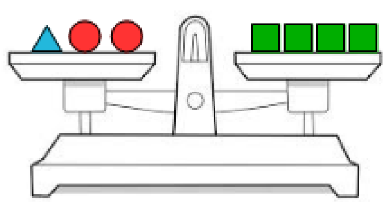


Figura 8

Perceba que, ao juntarmos as figuras do lado esquerdo da balança b_1 com as figuras do lado esquerdo da balança b_4, obtemos exatamente a quantidade de figuras do lado esquerdo da balança b_3, ou seja, para encontrarmos a quantidade de quadrados do lado direito da balança b_3, basta somarmos as quantidades de quadrados do lado direito da balança b_1 e da balança b_4. Portanto, essa quantidade é $6 + 4 = 10$.

161.

a) Como o comprimento interno é $5 - 2x$ e a largura interna é $3 - 2x$, o perímetro é

$$10 - 4x + 6 - 4x = 16 - 8x.$$

b) $(5 - 2x)(3 - 2x) = 15 - 16x + 4x^2$.

c) Basta multiplicar o perímetro pela altura do quarto e subtrair a área das portas. Temos então que a área interna das paredes é

$$3(16 - 8x) - 2 \cdot 3 = 48 - 24x - 6 = (42 - 24x)$$

metros quadrados.

162. (Extraído da Vídeo Aula)

Se $\dfrac{5}{7} = x + 1$, teríamos $x = \dfrac{5}{7} - 1 = -\dfrac{2}{7}$, porém x deve ser positivo. Temos então

$$\begin{aligned} \frac{5}{7} &= \frac{x}{x+1} \\ 5x + 5 &= 7x \\ x &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que o irmão de $\dfrac{5}{7}$ é

$$x + 1 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}.$$

163. (Extraído do ENEM)
A área perdida (A_p) é igual à área inicial (A_i) menos a área final (A_f). Temos então:

$$\begin{aligned} A_p &= A_i - A_f \\ &= 15 - (5 - x)(3 - y) \\ &= 15 - 15 + 3x + 5y - xy \\ &= 5y + 3x - xy. \end{aligned}$$

O que está na letra **e**.

164. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Observe que

$$\begin{aligned} 100^2 - 99^2 &= (100 + 99)(100 - 99) \\ &= 199 \\ 98^2 - 97^2 &= (98 + 97)(98 - 97) \\ &= 195 \\ 96^2 - 95^2 &= (96 + 95)(96 - 95) \\ &= 191 \\ &\vdots \\ 4^2 - 3^2 &= (4 + 3)(4 - 3) \\ &= 7 \\ 2^2 - 1^2 &= (2 + 1)(2 - 1) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Fazendo $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 2^2 - 1^2$, temos

$$\begin{aligned} S &= (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + ... + (2^2 - 1^2) \\ &= (100 + 99)(100 - 99) + ... + (2 + 1)(2 - 1) \\ &= 199 + 195 + 191 + ... + 3 \\ &= \frac{(3 \cdot 199) \cdot 50}{2} \\ &= 5050. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 999991 &= 1000000 - 9 \\ &= 1000^2 - 3^2 \\ &= (1000 + 3)(1000 - 3) \\ &= 1003 \cdot 997. \end{aligned}$$

Portanto, esses números podem ser 1003 e 997.

165. Chamando a quantidade inicial de ovos na cesta de x, temos:

i) *Primeiro cliente*: comprou a metade que havia mais meio ovo, ou seja, $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$, deixando para o feirante a metade menos meio ovo, ou seja, $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$;

ii) *Segundo cliente*: comprou a metade que havia mais meio ovo, ou seja, $\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{2}$, deixando para o feirante a metade menos meio ovo, ou seja, $\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2}$;

iii) *Segundo cliente*: comprou a metade que havia mais meio ovo, ou seja, $\frac{\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{2}$, deixando para o feirante a metade menos meio ovo, ou seja, $\frac{\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2}$;

Este último resultado deve ser igual a 10, pois foi o que restou para o feirante após a passagem do último freguês. Temos então:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2} &= 10\\
\frac{\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2}}{2} &= 10+\frac{1}{2}\\
\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2} &= 21\\
\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2} &= 21+\frac{1}{2}\\
\frac{x}{2}-\frac{1}{2} &= 43\\
\frac{x}{2} &= 43+\frac{1}{2}\\
\frac{x}{2} &= \frac{87}{2}\\
x &= 87.
\end{aligned}
$$

Portanto, a quantidade inicial de ovos era 87.

166.

a) Pela soma das equações, obtém-se $2x = 4$, portanto $x = 2$. Substituindo o valor de x em uma das equações, obtém-se $y = 1$. Assim, o conjunto-solução é $S = \{(2, 1)\}$.

b) Idem item a. $S = \{(9, 1)\}$.

c) Substituindo o valor de x da segunda equação na primeira, obtém-se $(y + 6) + y = 10$, ou seja, $y = 2$. Substituindo este valor de y na segunda equação, obtém-se $x = 2 + 6 = 8$. Assim, o conjunto-solução é $S = \{(8, 2)\}$.

d) Comparando as duas equações, tem-se $2y = y + 18$, ou seja, $y = 18$. Como $x = 2y$, então $x = 36$. Portanto, $S = \{(36, 18)\}$.

e) Idem item a. $S = \{(3, 2)\}$.

f) Idem item a. $S = \{(7/2, 1/2)\}$.

g) Idem item a. $S = \{(1, 1/2)\}$.

h) Idem item a. $S = \{(3, 2)\}$.

i) Para que seja possível a resolução pelo método da adição é necessário que a primeira equação seja multiplicada por -4, obtendo-se o sistema equivalente

$$
\begin{cases}
-20x+4y = -136\\
3x-4y = 0.
\end{cases}
$$

Pela soma das duas equações, obtém-se $-17x = -136$ e daí segue que $x = 8$. Substituindo o valor de x em qualquer uma das equações, chega-se a $y = 6$. Portanto, $S = \{(8, 6)\}$.

j) Idem item a. $S = \{(5, 2)\}$.

167. Sendo os dois números denotados por x e y, onde $x > y$, chega-se ao sistema de equações

$$\begin{cases} x + y &= 70 \\ x - y &= 28. \end{cases}$$

Pela soma das equações, obtém-se $2x = 98$, ou seja, $x = 49$. Como a soma dos números é 70, então $y = 21$.

168. Chamando a quantidade de bolinhas de Pedro de p e a quantidade de bolinhas de Mariano de m, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} p + m &= 195 \\ p &= m + 45. \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtém-se $(m + 45) + m = 195$, ou seja, $m = 75$. Assim, Mariano possui 75 bolinhas de gude e, como a soma das quantidades é 195, Pedro possui 120 bolinhas de gude.

169. Suponha que a quantidade obtida por Guilherme seja g e a quantidade obtida por Santiago s. Obtém-se o sistema

$$\begin{cases} g = s + 350 \\ g = 2s. \end{cases}$$

Por comparação das duas equações, obtém-se $2s = s + 350$ e daí segue que $s = 350$. Substituindo tal valor na segunda equação, $g = 2s = 700$. Assim, Guilherme juntou $R\$700,00$ e Santiago, $R\$350,00$.

170. Denotando o preço do sapato de s e o da blusa de b, obtemos o sistema

$$\begin{cases} s + b &= 72 \\ b &= s + 10. \end{cases}$$

Substituindo o valor de b na primeira equação, temos $s + s + 10 = 72$, segue que $s = 31$ e, por consequência, $b = 41$. Ou seja, a blusa custou $R\$41,00$ e o sapato, $R\$31,00$.

171. Sejam x a quantidade de plutônio e y a quantidade de patetônio. Analise o sistema de equações

$$\begin{cases} \text{x + y = 375} \\ \text{x} - \text{y = 75.} \end{cases}$$

Somando as equações, obtém-se $2x = 450$, segue que $x = 225$ e, por consequência, $y = 150$, ou seja, a quantidade de plutônio é $225ml$ e de patetônio é $150ml$.

172. Pela subtração das equações, encontra-se $p - q = 0$, ou seja, $p = q$. Utilizando este dado na primeira equação, temos $13p - 92p = -79p = 273$ e daí segue que $p = q = -273/79$.

173. Inicialmente, lembremo-nos que gansos possuem duas patas e, hipopótamos, quatro. Deonotando a quantidade de gansos por g e a quantidade de hipopótamos por h, obtém-se o sistema de equações

$$\begin{cases} g+h &= 50 \\ \\ 2g+4h &= 140 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (-2), obtém-se o sistema equivalente ao anterior, dado por:

$$\begin{cases} -2g-2h &= -100 \\ \\ 2g+4h &= 140. \end{cases}$$

Pela soma das equações, temos $2h = 40$ e daí segue que $h = 20$. Como o total de animais é 50, $g = 30$, ou seja, o número de gansos é 30 e o de hipopótamos é 20.

174. Sejam c a quantidade de carros e m a quantidade de motos. Pelas informações dadas, constrói-se o sistema

$$\begin{cases} c+m &= 47 \\ \\ 4c+2m &= 164 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -2c-2m &= -94 \\ \\ 4c+2m &= 164. \end{cases}$$

Somando as equações, obtém-se $2c = 70$ e daí segue que $c = 35$. Como o total de veículos é 47, tem-se $m = 47 - 35 = 12$, ou seja, a quantidade de carros é 35 e de motos, 12.

175. Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y &= 17 \\ \\ 50x+10y &= 330 \end{cases}$$

onde x representa a quantidade de cédulas de $R\$50,00$ e y, a de $R\$10,00$. Substituindo $x = 17 - y$ na segunda equação, obtém-se $50(17 - y) + 10y = 330$, ou seja, $y = 13$. Como o total de cédulas é 17, tem-se $x = 4$. Portanto, foram retiradas 13 cédulas de $R\$10,00$ e 4 cédulas de $R\$50,00$.

176. Pela definição de progressão aritmética, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x-2 &= y-x \\ \\ 29-y &= y-x \end{cases}$$

Pela primeira equação, obtém-se $y = 2x - 2$, donde, substituindo na segunda, chega-se a $2(2x - 2) - x = 29$ e daí segue que $x = 11$. Substituindo tal valor em qualquer uma das equações, obtém-se $y = 20$.

177.

a) Multiplicando a primeira equação por (-3) e somando-a com a segunda, obtemos $\dfrac{16}{y} = 8$. Segue que $y = 2$ e, consequentemente, $x = 10$. Portanto, $S = \{(10, 2)\}$.

b) Subtraindo as equações, obtemos $\sqrt{y} = 5$, donde $y = 25$ e, consequentemente, $x = 9$.

178. Vamos construir o sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b} &= 17 \\ \\ \sqrt{a} &= 3\sqrt{b} + 3. \end{cases}$$

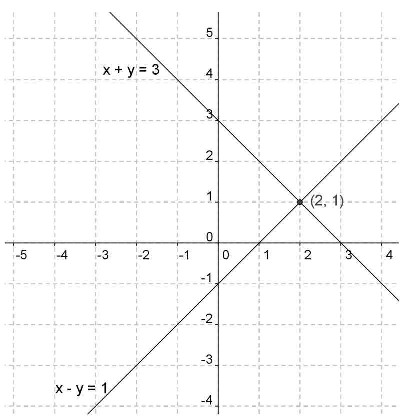
Substituindo $\sqrt{a}$ na primeira equação, obtemos $3\sqrt{b} + 3 + \sqrt{b} = 17$, segue que $\sqrt{b} = \frac{7}{2}$, ou seja, $b = 49/4$. Substituindo este valor na segunda equação, chegamos a $\sqrt{a} = 3 \cdot 7/2 + 3 = 27/2$, ou seja, $a = 729/4$.

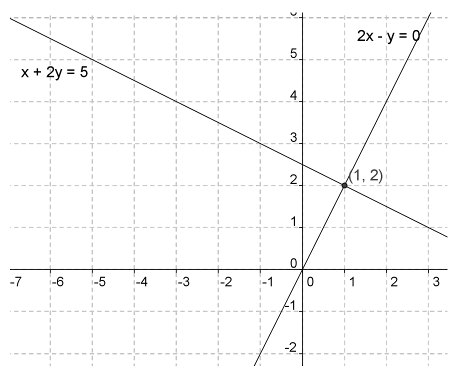
179.

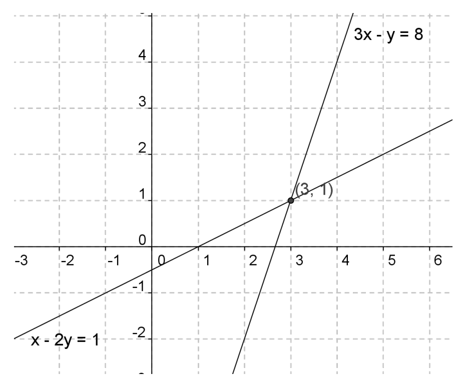
a) $S = \{(2, 1)\}$

b) $S = \{(1, 2)\}$

c) $S = \{(3, 1)\}$







180. Multiplicando a segunda equação por 9 e somando o resultado com a primeira, obtemos $91\sqrt[3]{r} = 273$, segue que $\sqrt[3]{r} = 3$, donde $r = 27$. Substituindo na segunda equação, obtemos $\sqrt{s} = 2$, donde $s = 4$. Portanto, $(r, s) = (27, 4)$.

181. (Extraído da OBMEP − 2005)
Chamando o peso de cada abacate de a, o das bananas de b e o das laranjas de l, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 4a = 9b \\ \\ 3b = 2l \\ \\ 9l = k, \end{cases}$$

onde k é o peso em de abacates que equilibra a terceira pesagem. Partindo da terceira equação, tem-se

$$2k = 18l = 27b = 12a,$$

ou seja, $2k = 12a$ e daí segue que $k = 6a$. Portanto, deverão ser 6 abacates. Resposta E.

182. (Extraído da OBMEP − 2011)
Suponhamos que o tempo de ida, ou volta, a pé seja x e o tempo de ida de ônibus seja y. Pelas informações, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x+y &= 1h15min \\ \\ 2y &= 30min \end{cases}$$

Pela segunda equação, $y = 15$. Substituindo tal valor na primeira, obtém-se $x = 75 - 15 = 60min$. Para ir e voltar a pé, o tempo gasto é $2x = 120min = 2h$. Resposta A.

183. (Extraído da OBMEP − 2011)
Dividamos cada vaso em duas partes: a parte de baixo de altura x e a parte de cima de altura y, ou seja, a altura de cada vaso é $x+y$. No caso de n vasos empilhados, a altura da pilha é $x+ny$. Assim, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x+8y &= 36 \\ \\ x+16y &= 60 \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações, obtém-se $8y = 24$, segue daí que $y = 3$ e, consequentemente, $x = 12$. Portanto, cada vaso tem $3+12 = 15cm$ de altura. Resposta A.

184. (Extraído do exame de acesso do PROFMAT)
Vamos denotar a quantidade de carrinhos de mão por c, a quantidade de bicicletas por b, a de triciclos por t e a de automóveis de a. Assim, teremos o sistema

$$\begin{cases} \text{c + 2b + 3t = 26} \\ \\ \text{c + 2b + 4a = 26} \\ \\ \text{c + 3t + 4a = 26} \end{cases}$$

A diferença entre as duas primeiras equações nos mostra que $4a = 3t$. Fazendo o mesmo processo entre a primeira e a última equação, obtemos $2b = 4a$. Por fim, as duas últimas equações nos mostram que $2b = 3t$, ou seja, $4a = 3t = 2b = k$. Como se tratam de valores inteiros positivos, k deve ser múltiplo de 3 e 4. Além disso,

$$2k = 2b+3t < c+2b+3t = 26,$$

ou seja, $k < 13$. Portanto, como existe apenas um múltiplo de 12 positivo e menor que 13, temos $k = 12$. Daí, $4a = 3t = 2b = 12$ e segue que $a = 3$, $b = 6$, $t = 4$ e $c = 2$. Finalmente, temos como total de veículos: $2+3+4+6 = 15$.

185. (Extraído da OBMEP − 2011)
Chamemos de Joana a mãe de João e Ana. Denotemos por h a quantidade de filhos de Joana e de m a quantidade de filhas. O enunciado nos diz que $h = m+6$. ”Tirando”Ana do cálculo, a equação anterior se transforma em $h = (m-1)+7$, ou seja, Ana tem 7 irmãos a mais que irmãs. Resposta E.

186. (Extraído da OBM − 2012)
A soma de todas as massas é $956/4 = 239$, já que cada estudante está presente em quatro pares. Sejam suas massas, da menor para a maior, a, b, c, d, e. Sabe-se que $a+b = 90$ e $d+e = 101$, ou seja, $a+b+d+e = 90+101 = 191$. Assim, a massa do estudante de massa intermediária é $239 - 191 = 48kg$. Resposta D.

187. (Extraído da OBM − 2014)
Supondo x a quantidade de sobrinhos e y a quantidade, em reais, que cada sobrinho deveria receber na primeira situação. Analisando as duas situações iniciais, chega-se ao sistema

$$\begin{cases} \text{xy} = 250 - 10 = 240 \\ \text{x(y} - 1) = 250 - 22 = 228 \end{cases}$$

Perceba que não se trata de um sistema de equações do primeiro grau, mas sua solução é simples. Pela segunda equação, temos $xy - x = 228$. Pela primeira equação, $xy = 240$ e assim obtemos $240 - x = 228$. Daí segue que $x = 12$. Como ela, depois de muitas indecisões, resolveu distribuir igualmente apenas $R\$240,00$, cada sobrinho recebeu $240/12 = R\$20,00$. Resposta E.

188. (Extraído da OBM − 2014)
Temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\ &= \frac{a^2}{b} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= b. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo a primeira e a terceira equação, segue que $\sqrt{x} = \dfrac{b^2 + a^2}{2b}$ e $\sqrt{y} = \dfrac{b^2 - a^2}{2b}$. Consequentemente, $\sqrt{xy} = \dfrac{b^4 - a^4}{4b^2}$. Resposta A.

189. (Adaptado da OBMEP − 2012)
Denotando o peso do copo vazio por x e o peso da quantidade de farinha que cabe em um copo por y, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 2y + \dfrac{3y}{2} = 1400 \\ 2x + 2y = 3x + \dfrac{3y}{2} \end{cases}$$

Pela primeira equação, $7y = 2800$. Segue que $y = 400$, ou seja, em cada copo cabe $400g$ de farinha. Substituindo o valor de y na segunda equação, obtém-se $x = 2y - \dfrac{3y}{2} = y/2 = 200$. Resposta D.

190. (Extraído de EA CPCAR − EPCAR − 2011)
Chamando de y a quantidade de pastéis que Isabela levou para vender, temos $x + y = 460$. Tem-se, então, que Isabela vendeu $3/5x$ e Ana Beatriz vendeu $5/8y$ pastéis. Como o número de pastéis que restou para Ana Beatriz era a metade do número de pastéis que restou para Isabela, tem-se $\dfrac{3x}{8} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5}y$, ou seja, $y = \dfrac{15}{8}x$. Substituindo este valor na equação $x + y = 460$, obtém-se $\dfrac{15x}{8} + x = 460$. Daí segue que $x = 160$ e, portanto, a soma dos algarismos de x é $1 + 6 + 0 = 7$. Resposta B.

191. Multiplicando a primeira equação por y e a segunda equação por x, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} xy + 1 = 4y \\ xy + 1 = \dfrac{x}{4} \end{cases}$$

Por comparação, $\dfrac{x}{4} = 4y$, ou seja, $\dfrac{x}{y} = 16$.

192. (Extraído de EA CPCAR − EPCAR − 2012)
Denotemos a idade que Luiz tinha por x. Assim, José possui o dobro, ou seja, $2x$. Se José possuía y anos, a idade atual de Luiz será y anos. No futuro, quando Luiz tiver a idade que José possui hoje, a idade de José será de $90 - 2x$ anos. A tabela abaixo reune essas conclusões:

	Passado	Presente	Futuro
José	y	$2x$	$90 - 2x$
Luis	x	y	$2x$

Como a diferença entre o presente e o passado é a mesma para ambos, bem como a diferença entre o futuro e o presente, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y &= 90 - 2x - 2x \\ y - x &= 2x - y. \end{cases}$$

Reduzindo termos semelhantes em ambas equações, obtém-se o sistema equivalente

$$\begin{cases} y &= 6x - 90 \\ 2y - 3x &= 0. \end{cases}$$

Substituindo o valor de y da primeira equação, na segunda equação, chega-se a $2(6x - 90) - 3x = 0$, donde se conclui que $x = 20$. Substituindo em uma das equações anteriores, obtém-se $y = 30$. Assim, a razão entre as idades de José e Luiz em 29 de julho de 2017 será

$$\frac{2x+5}{y+5} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}.$$

Resposta B.

193. (Extraído de EA CPCAR – EPCAR − 2012)
Denotando as quantias iniciais, em reais, de Tales e Pitágoras, respectivamente, por t e p, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} p - 50 &= t + 50 \\ \dfrac{p+100}{4} &= t - 100 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} p - t &= 100 \\ p - 4t &= -500 \end{cases}$$

Subtraindo as equações, chega-se a $3t = 600$ e daí segue que $t = 200$. Consequentemente, $p = 300$. Resposta A.

194. (Extraído de Colégio Naval − 2012)
Utilizando os pesos em kg, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x + y &= 44 \\ x &= 10y \end{cases}$$

Fazendo a substituição do valor de x na primeira equação, obtém-se $10y + y = 44$. Daí, segue que $y = 4$. Como $x = 10y$, então $x = 40$ e $\sqrt[10]{y^x} = \sqrt[10]{4^{40}} = 4^4 = 256$. Resposta C.

195. (Extraído de Colégio Naval − 2013)
A segunda equação pode ser reescrita como $16a^2 + b^2 = 5$ apenas multiplicando-a por $4a - b$. Pela primeira equação, podemos concluir que ab é $1/2$. Assim,

$$\begin{aligned} 16a^4b^2 + a^2b^4 - 8a^3b^3 &= (ab)^2(16a^2 + b^2) - 8(ab)^3 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 5 - \frac{8}{8} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Resposta E.

196.

a) Somando todas as equações, obtém-se:

$$6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 186,$$

ou seja, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31$. Nota-se que a primeira equação pode ser escrita como $x_1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 + 31 = 6$ e daí segue que $x_1 = -25$. De forma análoga, obtém-se os demais resultados repetindo o procendimento com as outras equações. Assim, $x_2 = -19$, $x_3 = -7$, $x_4 = 17$, $x_5 = 65$.

b) (Olimpíada Russa − 1946)
Somando todas as equações, temos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = \frac{0}{3} = 0$. Somando agora primeira, quarta e sétima equações, obtemos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_1 = 0 + x_1 = 6 - 3 - 2 = 1$, ou seja $x_1 = 1$. De forma análoga podemos obter as demais incógnitas. $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = -4$, $x_6 = -3$, $x_7 = -2$, $x_8 = -1$.

197.

a) Temos: $a = 1$, $b = -2$ e $c = 6$.

b) Temos: $a = 2$, $b = 3$ e $c = -8$.

c) Temos: $a = -1$, $b = 4$ e $c = -3$.

d) Temos: $a = -4$, $b = 7$ e $c = -12$.

e) Temos: $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0$.

f) Temos: $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$.

198.

a) $(x-1)^2+(x+2)^2=(x-3)^2$

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(x+2)^2 &= (x-3)^2\\ x^2-2x+1+x^2+4x+4 &= x^2-6x+9\\ 2x^2+2x+5-x^2+6x-9 &= 0\\ x^2+8x-4 &= 0\end{aligned}$$

Então $a=1$, $b=8$ e $c=-4$.

b) $(2x-5)^2+(x-2)(x+2)=x+(x+7)^2$

$$\begin{aligned}(2x-5)^2+(x-2)(x+2) &= x+(x+7)^2\\ 4x^2-20x+25+x^2-4 &= x+x^2+14x+49\\ 5x^2-20x+21-x-x^2-14x-49 &= 0\\ 4x^2-35x-28 &= 0\end{aligned}$$

Então $a=4$, $b=-35$ e $c=-28$.

c) $(x-1)^2+x(x+1)=2x-(x+3)^2$

$$\begin{aligned}(x-1)^2+x(x+1) &= 2x-(x+3)^2\\ x^2-2x+1+x^2+x &= 2x-(x^2+6x+9)\\ 2x^2-x+1 &= 2x-x^2-6x-9\\ 2x^2-x+1-2x+x^2+6x+9 &= 0\\ 3x^2+3x+10 &= 0\end{aligned}$$

Então $a=3$, $b=3$ e $c=10$.

199.

a) x^2+7x.

b) $x^2+7x+10$.

c) x^2+x-6.

200.

a) Tem-se $a=1$, $b=-5$ e $c=4$. Portanto, $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot1\cdot4=25-16=9$.

b) Tem-se $a=5$, $b=3$ e $c=-2$. Portanto, $\Delta=b^2-4ac=(3)^2-4\cdot5\cdot(-2)=9+40=49$.

c) Tem-se $a=-1$, $b=1$ e $c=30$. Portanto, $\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\cdot(-1)\cdot30=1+120=121$.

d) Tem-se $a=3$, $b=5$ e $c=1$. Portanto,$\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4\cdot3\cdot1=25-12=13$.

e) Tem-se $a=-1$, $b=-2$ e $c=-1$. Portanto, $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=4-4=0$.

f) Tem-se $a=2$, $b=6$ e $c=-8$. Portanto, $\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\cdot2\cdot(-8)=36+64=100$.

g) Tem-se $a=1$, $b=3$ e $c=9$. Portanto, $\Delta=b^2-4ac=(3)^2-4\cdot1\cdot9=9-36=-27$.

h) Tem-se $a=1$, $b=9$ e $c=0$. Portanto, $\Delta=b^2-4ac=(9)^2-4\cdot1\cdot0=81-0=81$.

i) Tem-se $a=-1$, $b=0$ e $c=16$. Portanto, $\Delta=b^2-4ac=(0)^2-4\cdot(-1)\cdot16=0+64=64$.

201. Desenvolvendo o produto, obtemos:

$$\begin{aligned}(x-m)(x-n) &= x^2 - nx - mx + mn\\ &= x^2 - (m+n)x + mn.\end{aligned}$$

Assim, $m+n=7$ e $mn=10$. Veja que $m=2$ e $n=5$ satisfazem a soma e o produto encontrados nos dois primeiros itens. Se $x=m$ ou $x=n$, o termo esquerdo será nulo e consequentemente podemos afirmar que m e n são as raízes da equação $x^2-7x+10$. Assim, 2 e 5 são as raízes procuradas e não existem outros números cuja soma é 7 e o produto é 10.

202.

a) $x^2-4x=0$

$$\begin{aligned}x^2-4x &= 0\\ x(x-4) &= 0\end{aligned}$$

Logo, $S=\{0,4\}$.

b) $x^2-4=0$

$$\begin{aligned}x^2-4 &= 0\\ x^2 &= 4\\ x &= \pm\sqrt{4}\\ x &= \pm 2\end{aligned}$$

Logo, $S=\{-2,2\}$.

c) $x^2+9x=0$

$$\begin{aligned}x^2+9x &= 0\\ x(x+9) &= 0\end{aligned}$$

Logo, $S=\{-9,0\}$.

d) $x^2+9=0$

$$\begin{aligned}x^2+9 &= 0\\ x^2 &= -9\\ x &= \pm\sqrt{-9}\end{aligned}$$

Como $\sqrt{-9}\notin\mathbb{R}$, o conjunto solução é vazio, ou seja, $S=\varnothing$.

e) $-x^2-7x=0$

$$\begin{aligned}-x^2-7x &= 0\\ x(-x-7) &= 0\end{aligned}$$

Logo, $S=\{-7,0\}$.

f) $-x^2+121=0$

$$\begin{aligned}-x^2+121 &= 0\\ 121 &= x^2\\ \pm\sqrt{121} &= x\\ \pm 11 &= x.\end{aligned}$$

Logo, $S=\{-11,11\}$.

Comentário para professores: É importante destacar o significado prático de uma raiz numa equação, ou seja, o valor que torna verdadeira a igualdade associada à equação. A substituição do(s) valor(es) calculado(s) de modo a inspecionar a respectiva validade de cada raiz deve ser enfatizada entre os alunos.

203. Substituindo os valores na equação, temos:

$$\begin{aligned}(-1)^2-7\cdot(-1)+10 &= 1+7+10=18\\ (2)^2-7\cdot 2+10 &= 4-14+10=0\\ (5)^2-7\cdot 5+10 &= 25-35+10=0.\end{aligned}$$

Portanto, apenas 2 e 5 são raízes da equação.

204. Para que $x=-3$ seja raíz, devemos ter:

$$\begin{aligned}-m\cdot(-3)^2-4m\cdot(-3)+21 &= 0\\ -9m+12m+21 &= 0\\ 3m &= -21\\ m &= -21/3\\ m &= -7\end{aligned}$$

Portanto, $m=-7$.

205. Temos:

a) $\Delta = 9 > 0$

b) $\Delta = 25 > 0$

c) $\Delta = 25 > 0$

d) $\Delta = -36 < 0$

e) $\Delta = 49 > 0$

f) $\Delta = -15 < 0$

g) $\Delta = 0$

206.

a) Tem-se $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$. Daí, $\sqrt{\Delta} = 5$ e

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{7+5}{2} \\ &= 6 \\ x_2 &= \frac{7-5}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{1, 6\}$.

b) Tem-se $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$. Daí, $\sqrt{\Delta} = 3$ e

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5+3}{2} \\ &= 4 \\ x_2 &= \frac{5-3}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{1, 4\}$.

c) Tem-se $\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 1 + 80 = 81$.Daí, $\sqrt{\Delta} = 9$ e

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+9}{4} \\ &= 2 \\ x_2 &= \frac{-1-9}{4} \\ &= \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{\frac{-5}{2}, 2\right\}$.

d) Tem-se $\Delta = (1)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-10) = 1 + 120 = 121$. Daí, $\sqrt{\Delta} = 11$ e

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+11}{-6} \\ &= \frac{-5}{3} \\ x_2 &= \frac{-1-11}{-6} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{\frac{-5}{3}, 2\right\}$.

e) Tem-se $\Delta = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$. Daí, $\sqrt{\Delta} = 0$ e

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4+0}{2} \\ &= 2 \\ x_2 &= \frac{4-0}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{2\}$.

f) Tem-se $\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 4 - 40 = -36$. Daí, $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ e, portanto, $S = \varnothing$.

g) Tem-se $\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 25 - 84 = -59$. Daí, $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ e, portanto, $S = \varnothing$.

207.

i) Para $\Delta < 0$, como $\Delta \notin \mathbb{R}$, não há raízes reais (conjunto solução vazio).

ii) Para $\Delta = 0$, há raízes reais iguais e ambas são iguais (conjunto solução unitário).

iii) Para $\Delta > 0$, há raízes reais diferentes (conjuntos solução com dois elementos).

Comentário para professores: Após a questão sobre a importância do valor numérico do delta é salutar destacar o motivo do seu nome ser discriminante. Discriminar é mostrar, expor, exibir. O exercício anterior nos permite concluir que o Δ “mostra” a quantidade de raízes de uma equação do 2° grau.

208. Como h é uma raiz da equação, temos $h^2 = 1 - h$. Isso nos permite trocar o termo $1 - h$ por h^2. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{h^5}{1-h} + \frac{2h^6}{(1-h)^2} &= \frac{h^5}{h^2} + \frac{2h^6}{(h^2)^2} \\
&= \frac{h^5}{h^2} + \frac{2h^6}{h^4} \\
&= h^3 + 2h^2 \\
&= h(h^2) + 2h^2 \\
&= h(1-h) + 2h^2 \\
&= h - h^2 + 2h^2 \\
&= h + h^2 \\
&= h + 1 - h \\
&= 1
\end{aligned}$$

209. Sejam n o número de jovens e p o valor que cada pessoa deveria pagar. Sendo assim, $n \cdot p = 342$. Excluindo-se três jovens do pagamento a aumentando-se o valor pago, teremos:

$$\begin{aligned}
(n-3)(p+19) &= 342 \\
(n-3)(342/n+19) &= 342 \\
\cancel{342} + 19n - \frac{3 \cdot 342}{n} - 57 &= \cancel{342} \\
19n^2 - 57n - 1126 &= 0 \\
n^2 - 3n - 54 &= 0.
\end{aligned}$$

Como $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-54) = 225$, as raízes da equação anterior são:

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{3+15}{2} \\
n_1 &= 9 \\
n_2 &= \frac{3-15}{2} \\
n_2 &= -6
\end{aligned}$$

Contudo, apenas o 9 é admissível, pois como n representa o número de pessoas do grupo, trata-se de um número não negativo.

210. As raízes de $x^2 - 5x + 6 = 0$ são 2 e 3. Assim, podemos escrever $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Como $2 < a < 3$, segue que $a - 2 > 0$ e $a - 3 < 0$. Daí,

$$a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3) < 0.$$

211. Para que a equação não possua raízes reais, seu discriminante deve ser negativo, ou seja,

$$\begin{aligned}
a^2 - 4 &< 0 \\
a^2 &< 4 \\
|a| &< 2
\end{aligned}$$

Assim, os possíveis valores de a são aqueles compreendidos entre -2 e 2.

212. Para a equação possuir alguma raiz real, seu discriminante deve ser não-negativo, ou seja,

$$4(k-1)^2 - 4(k+5) = 4(k^2 - 3k - 4) \geq 0.$$

Isso ocorre apenas de $k \geq 4$ ou se $k \leq -1$. Supondo tais restrições, sejam a e b as raízes da equação original. Podemos fatorá-lo como $(x-a)(x-b)$. Temos:

a) Se 0 está entre as raízes se, e somente se, $k+5 = (0-a)(0-b) < 0$.

b) Ambas raízes são positivas se, e somente se, $ab = k+5 > 0$ e $2(k-1) = -(a+b) < 0$.

c) Se 0 é uma raiz, $k+5 = 0$ e a outra raíz é $x = 12 > 0$.

A interseção da restrição inicial com os três conjuntos encontrados anteriormente é o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1\}.$$

213. Pela fórmula de Bhaskara, como $\sqrt{\Delta} = 7$, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-3+7}{-4} \\ &= -1 \\ x_2 &= \frac{-3-7}{-4} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Portanto, a maior raiz é $5/2$.

214. Pela fórmula de Bhaskara, como $\sqrt{\Delta} = 0$, ambas as raízes são iguais à:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm 0}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $S = \{1\}$.

215. Substituindo -3 como raiz, temos:

$$\begin{aligned} (-3)^2 - 7(-3) - 2c &= 0 \\ 9 + 21 - 2c &= 0 \\ 9 + 21 &= 2c \\ 30 &= 2c \\ 2c &= 30 \\ c &= 15. \end{aligned}$$

216.

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= 2 \\ x^2 + 1 &= 2x \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Portanto, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 1^2 + \dfrac{1}{1^2} = 2$.

217. Inicialmente, devemos ter como condição necessária para a existência dos radicais que $3x - 2 > 0$ e $x > 0$, ou seja, $x > 3/2$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x-2} &= \sqrt{x}+2 \\
(\sqrt{3x-2})^2 &= (\sqrt{x}+2)^2 \\
3x-2 &= x+4\sqrt{x}+4 \\
2x-6 &= 4\sqrt{x} \\
(2x-6)^2 &= (4\sqrt{x})^2 \\
4x^2-24x+36 &= 16x \\
x^2-10x+9 &= 0
\end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são 1 e 9. Como, $x > 3/2$, devemos ter $x = 9$. É fácil ver que tal valor satisfaz a equação dada e, portanto, $S = \{9\}$.

218.

a)

$$\begin{aligned}
9x^4-13x^2+4 &= 0 \\
9y^2-13y+4 &= 0 \\
y &= \frac{13 \pm 5}{18}.
\end{aligned}$$

No primeiro caso, $y = (13+5)/18 = 1^2$, temos as raízes $x = \pm 1$. No segundo caso, $y = (13-5)/18 = (2/3)^2$, temos $x = \pm 2/3$. Portanto, o conjunto solução é

$$S = \{-1, 1, -2/3, 2/3\}.$$

b)

$$\begin{aligned}
x^4+4x^2-60 &= 0 \\
y^2+4y-60 &= 0 \\
y &= \frac{-4 \pm 16}{2}.
\end{aligned}$$

No primeiro caso, $y = -2+8 = (\sqrt{6})^2$, temos as raízes $x = \pm\sqrt{6}$. O segundo caso, $y = -2-8 = -10$, não produz raízes reais pois não existe um número real x tal que $x^2 = -10$. Portanto, o conjunto solução é

$$S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}.$$

c)

$$\begin{aligned}
x^4+10x^2+9 &= 0 \\
y^2+10y+9 &= 0 \\
y &= \frac{-10 \pm 8}{2}.
\end{aligned}$$

Em ambos os casos, $y < 0$ e consequentemente não existirão raízes reais pois $x^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

219. (Extraído da AIME)

Sejam $m = x+y$ e $n = xy$. Como $xy^2 + x^2y = xy(x+y)$, o sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} n+m &= 71 \\ n \cdot m &= 880 \end{aligned}$$

Da primeira equação, $n = 71 - m$. Substituindo tal valor na segunda, temos:

$$\begin{aligned} (71-m)\cdot m &= 880 \\ 71m - m^2 &= 880 \\ m^2 - 71m + 880 &= 0 \end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são 55 e 16. Vejamos cada caso:

i) Se $m = 55$, $n = 16$ e tem-se:

$$\begin{aligned} x+y &= 55 \\ xy &= 16 \end{aligned}$$

Substituindo $y = 55 - x$ na segunda equação obtemos:

$$\begin{aligned} x(55-x) &= 16 \\ x^2 - 55x + 16 &= 0 \end{aligned}$$

A equação anterior não possui raízes inteiras pois $\sqrt{\Delta}$ é irracional. Portando, $m = 55$ não serve.

ii) Se $m = 16$, $n = 55$ e tem-se:

$$\begin{aligned} x+y &= 16 \\ xy &= 55 \end{aligned}$$

Daí,

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 256 - 110 = 146.$$

220. Seja $y = x^2 - 3x + 1$. Observe que $y + x = (x-1)^2$. Assim,

$$\begin{aligned} (x^2-3x+1)^2 - 3(x^2-3x+1) + 1 &= x \\ y^2 - 3y + 1 - x &= 0 \\ (y-1)^2 - y - x &= 0 \\ (y-1)^2 - (x-1)^2 &= 0 \\ (y-x)(y+x-2) &= 0 \\ (x^2-4x+1)(x^2-2x-1) &= 0. \end{aligned}$$

Daí, $x^2 - 4x + 1 = 0$ ou $x^2 - 2x - 1 = 0$ cujas raízes são:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \text{ e } x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Portanto, $S = \left\{2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm \sqrt{2}\right\}$.

221.

$$\begin{aligned} \sqrt{4+2x-x^2} &= x-2 \\ 4+2x-x^2 &= x^2-4x+4 \\ 2x^2-6x &= 0 \\ 2x(x-3) &= 0. \end{aligned}$$

As possíveis raízes são $x = 0$ ou $x = 3$. Contudo, se $x = 0$, tem-se $\sqrt{4+2\cdot 0 - 0^2} = 0 - 2$, um absurdo. É facil verificar que $x = 3$ satisfaz a equação. Portanto, o conjunto solução é $S = \{3\}$.

Observação: A operação de elevar ambos os membros de uma equação ao quadrado gera uma nova equação que contém todas as soluções da equação anterior. Entretanto, novas soluções podem ter surgido e por essa razão é sempre importante verificar se os valores encontrados satisfazem a equação original.

222. Se $a = -1$, temos:

$$\sqrt{x^2 + 2ax - a} = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|.$$

Assim, a igualdade se verificaria para qualquer $x \geq 1$. Suponhamos que $a \neq -1$, então

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2ax - a} &= x - 1 \\ x^2 + 2ax - a &= x^2 - 2x + 1 \\ 2x(a+1) &= a + 1 \\ x &= 1/2 \end{aligned}$$

É imediato verificar que $x = 1/2$ satisfaz a equação nesse caso. Portanto, $S = \{1/2\}$.

223. Se algum dos coeficientes da equação anterior não é nulo, ela possuirá no máximo duas raízes pois terá grau no máximo dois. Sendo assim, devemos ter $a^2 - 3a + 2 = a^2 - 5a + 4 = a - a^2 = 0$. A única raiz comum às três equações anteriores é $a = 1$.

224. Suponha que a fração irredutível p/q, isto é p e q não possuem fatores primos em comum, seja raiz da equação dada. Susbtituindo tal raiz e multiplicando o resultado por q^2, temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c &= 0 \\ ap^2 + bpq + cq^2 &= 0 \end{aligned}$$

Se ou p ou q for par, na soma anterior, teremos dois números pares somados a um ímpar cuja soma resultará em um número ímpar e não no zero. Se ambos são ímpares, a soma anterior é constituída por três números ímpares e naturalmente sua soma será também ímpar (e não o zero). Como supomos inicialmente que eles eram primos entre si, não há caso para ambos pares. Sendo assim, a equação com coeficientes ímpares não possui solução racional.

225. Seja $u = \sqrt{x}$, então

$$\begin{aligned} x &= 2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}} \\ x - 2 &= \sqrt{2 + \sqrt{x}} \\ u^2 - 2 &= \sqrt{2 + u} \\ (u^2 - 2)^2 &= 2 + u \\ (u^2 - 2)^2 - u - 2 &= 0. \end{aligned}$$

A última equação pode ser fatorada como:

$$(u^2 - 2)^2 - u - 2 = (u^2 - u - 2)(u^2 + u - 1).$$

Como $x > 2$, segue que $u > \sqrt{2} > 1$. Analisando os raízes de $u^2 + u - 1$, nenhuma delas se enquandra nessa condição. Portanto, u é raiz de $u^2 - u - 2$. Tal equação possui raízes -1 e 2. Logo, como $u \geq 0$, devemo ter $u = 2$ e $x = u^2 = 4$. É fácil verificar que 4 é solução da equação original.

226. (Extraído da Olimpíada Russa)
Podemos usar a segunda operação e gerar o número $2z$. Usando a primeira operação, podemos decidir se z e $2z$ são iguais, ou seja, se z é ou não igual a zero. Suponha que tenhamos descoberto que z não é zero. Usando a terceira operação, analisemos as raízes de $x^2 + 2zx + z = 0$ que são dadas por:

$$x = -z \pm \sqrt{z^2 - z}.$$

Como já sabemos que $z \neq 0$, o discriminante é nulo apenas quando $z = 1$. Assim, se a calculadora disser que existe apenas uma raiz real, saberemos que $z = 1$ e, no caso contrário, teremos $z \neq 1$.

227. Sejam $s = \sqrt[4]{x-1}$ e $t = \sqrt[4]{5-x}$. Então:

$$\begin{aligned} s+t &= 2 \\ s^4+t^4 &= 4. \end{aligned}$$

Usando a primeira equação, se $s = 1 + z$, temos $t = 1 - z$. Assim, substituindo ambos valores na segunda equação, obtemos $z^4 + 6z^2 - 1 = 0$. Resolvendo a equação biquadrada, podemos encontrar

$$z = \pm\sqrt{\sqrt{10}-3}.$$

Como $x = (1+z)^4 + 1 = 3 + 4z(1+z^2)$, podemos finalmente obter o conjunto solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x = 3 \pm 4(\sqrt{10}-2)\sqrt{\sqrt{10}-3}\}.$$

228. (Extraído da Revista do Professor de Matemática, números 78 e 79)

Seja x uma solução da equação. Então:

$$\begin{aligned} \sqrt{5-\sqrt{5-x}} &= x \\ \left(\sqrt{5-\sqrt{5-x}}\right)^2 &= x^2 \\ 5-\sqrt{5-x} &= x^2 \\ 5-x^2 &= \sqrt{5-x} \\ (5-x^2)^2 &= \left(\sqrt{5-x}\right)^2 \\ (5-x^2)^2 &= (5-x) \end{aligned}$$

Desenvolvendo os produtos notáveis anteriores, tem-se:

$$\begin{aligned} (5-x^2)^2 &= (5-x) \\ 5^2 - 2\cdot 5\cdot x^2 + x^4 &= 5-x \\ 5^2 - (2x^2+1)\cdot 5 + (x^4+x) &= 0 \end{aligned}$$

Fixado x, o número 5 é raiz da equação do segundo grau:

$$z^2 - (2x^2+1)\cdot z + (x^4+x) = 0.$$

O discriminante da equação anterior é:

$$\begin{aligned} \Delta &= [-(2x^2+1)]^2 - 4\cdot 1\cdot (x^4+x) \\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 - 4x \\ &= (2x+1)^2 \end{aligned}$$

Como $x > 0$, $\sqrt{\Delta} = 2x+1$. Como 5 é uma das raízes da equação, tem-se:

$$5 = \frac{2x^2+1 \pm (2x+1)}{2}.$$

Temos dois casos a considerar:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+1+(2x+1)}{2} &= 5 \\ x^2+x-4 &= 0 \\ x &= \frac{-1\pm\sqrt{32}}{2} \\ \frac{2x^2+1-(2x+1)}{2} &= 5 \\ x^2-x-5 &= 0 \\ x &= \frac{1\pm\sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

Como $0 < x < 5$, precisa-se eliminar as duas raízes negativas. Além disso, é facil verificar que as outras duas satisfazem a equação original. Portanto,

$$S = \left\{\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{32}}{2}\right\}.$$

229. Se $r^2 + 5r - 24 = 0$, ambos os lados são nulos e a igualdade naturalmente ocorre. As raízes da equação anterior são $r = -8$ e $r = 3$. Se $r^2 + 5r - 24 \neq 0$, podemos cancelar tal termo obtendo:

$$\begin{aligned} r^2 - 3r + 2 &= 4r - 10 \\ r^2 - 7r + 12 &= 0. \end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são $r = 4$ e $r = 3$. Portanto, os possíveis valores de r são: -8, 4 e 3.

230. (Extraído e Adaptado da Gazeta Matemática, Romênia)

$$\begin{aligned} (ax-b)^2+(bx-a)^2 &= x \\ a^2x^2-2abx+b^2+b^2x^2-2abx+a^2-x &= 0 \\ (a^2+b^2)x^2+(-1-4ab)x+(a^2+b^2) &= 0 \end{aligned}$$

O seu discriminante vale:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1-4ab)^2-4(a^2+b^2)(a^2+b^2) \\ &= (1+4ab)^2-[2(a^2+b^2)]^2 \\ &= (1+4ab-2(a^2+b^2))(1+4ab+2(a^2+b^2)) \\ &= (1-2(a-b)^2)(1+2(a+b)^2) \end{aligned}$$

Como a equação possui ao menos uma raiz real, tem-se $\Delta \geq 0$. Além disso, $1+2(a-b)^2 > 0$ implica que $1-2(a-b)^2 \geq 0$. Dado que $(a-b) \in \mathbb{Z}$, devemos ter $(a-b)^2 = 0$, ou seja, $a = b$. A equação se transforma em:

$$2a^2x-(1+4a^2)x+2a^2 = 0.$$

A soma das raízes será $x_1+x_2 = \dfrac{1+4a^2}{2a^2} = 2+\dfrac{1}{2a^2}$ e o produto $x_1 \cdot x_2 = 1$. Seja x_1 a raiz inteira. Por inspeção direta na equação anterior, x_1 não pode ser nem 0 e nem 1. Logo, $x_1 \geq 2$. Por outro lado, $x_2 = 1/x_1 > 0$ e daí $x_1 < x_1+x_2 < 2+1/2a^2 < 3$. Consequentemente, $x_1 = 2$ e $x_2 = \dfrac{1}{2}$. Finalmente, usando a soma das raízes, pode-se concluir que $a \in \{-1, 1\}$. As únicas possibilidades são para $a = b = \pm 1$, com raízes 2 e $1/2$.

231.

a) Se $x \geq 0$, a equação se transforma em $x^2-x-2=0$ cujas raízes são -1 e 2. Apenas a raiz 2 convém. Se $x < 0$, a equação se transforma em $x^2+x-2=0$ cujas raízes são -2 e 1 e apenas -2 convém. Logo, as raízes são 2 e -2.

b) Se $x \geq 0$, a equação se transforma em $x^2+5x+4=0$ cujas raízes são -1 e -4. Nenhuma das duas convém. Se $x < 0$, a equação se transforma em $x^2-5x+4=0$ cujas raízes são 1 e 4. Novamente nenhuma das duas raízes convém. Logo, a equação não possui raízes.

232. Veja que as raízes $y = 3$ e $y = -3$ aparecem tanto em (y^2-9) quanto em $(y^2-6y+9)(y^2+y-6)$. Assim, podemos fatorar a expressão:

$$\begin{aligned} (y^2+y-6)(y^2-6y+9)-2(y^2-9) &= 0 \\ (y-3)(y+2)(y+3)(y+3)-2(y-3)(y+3) &= 0 \\ (y-3)(y+3)[(y+2)(y+3)-2] &= 0 \\ (y-3)(y+3)(y^2+5y+4) &= 0 \\ (y-3)(y+3)(y+1)(y+4) &= 0. \end{aligned}$$

As raízes são $y = 3$, $y = -3$, $y = -1$ ou $y = -4$.

233. As raízes da equação são dadas por $r = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}$ cujo valor máximo é $\dfrac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$ e o mínimo é o seu simétrico. Se y é um raiz de tal equação e a é tal que $|a| \leq 1$, então $z = ay$ é uma raiz de $x^2+pax+qa^2$ e os coeficientes ainda estão em $[-1, 1]$. Consequentemente, todos os os números do intervalo $[-\alpha, \alpha]$ podem ser raízes de tais equações e, como vimos no início, nenhum outro número fora deste intervalo pode ser.

234. Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\begin{aligned} 2(x-3) &= \sqrt{x^2-2x+3} \\ 4(x-3)^2 &= (x-3)(x+1) \\ 4(x-3)^2-(x-3)(x+1) &= 0 \\ (x-3)(3x-13) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, os candidatos a soluções são $x = 3$ e $x = \dfrac{13}{3}$. É fácil verificar que ambos satisfazem a equação original.

235. Multiplicando ambos os lados por $(x-2)^2$, temos:

$$\begin{aligned} x^2(x-2)^2+4x^2 &= 12(x-2)^2 \\ (x^2)^2-4x^2(x-2)-12(x-2)^2 &= 0 \\ (x^2+2(x-2))(x^2-6(x-2)) &= 0. \end{aligned}$$

Analisando as raízes das equações anteriores, apenas a primeira delas possui raízes reais que são: $-1 \pm \sqrt{5}$.

236. Observe a demonstração abaixo, assumindo que $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \\ a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] &= 0 \\ a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] &= 0 \\ a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] &= 0 \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

237. Sim, é verdade. Os três números reais que verificam a equação anterior são raízes da equação

$$(a-m)x^2+(b-n)x+(c-p).$$

Se $a-m \neq 0$, tal equação possui no máximo duas raízes distintas e isso contradiz a hipótese inicial. Se $a-m=0$ e $b-n \neq 0$, teríamos uma equação do primeiro grau que possui solução única e novamente temos um absurdo. Finalmente, supondo então que $a-m=b-n=0$, a equação só possui raízes caso tenhamos também $c-p=0$. Ou seja, as três igualdades mencionadas no enunciado devem se verificar.

238.

a) Tem-se $x_1+x_2 = \dfrac{-(-5)}{1} = 5$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{4}{1} = 4$.

b) Tem-se $x_1+x_2 = \dfrac{-7}{2}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{5}{2}$.

c) Tem-se $x_1+x_2 = \dfrac{-12}{-3} = 4$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{0}{-3} = 0$.

d) Tem-se $x_1+x_2 = \dfrac{-8}{-1} = 8$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-12}{-1} = 12$.

e) Tem-se $x_1+x_2 = \dfrac{-(-3)}{7} = \dfrac{3}{7}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{7}$.

239. Como $x_1 + x_2 = -5$ e $x_1x_2 = 7$, temos:

$$\begin{aligned}(x_1+3)(x_2+3) &= x_1x_2 + 3(x_1+x_2) + 9\\ &= 7 + 3\cdot(-5) + 9\\ &= 1.\end{aligned}$$

240. As relações de soma e produto das raízes nos fornecem:

$$\begin{aligned}2a+1 &= p-1\\ a(a+1) &= p.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}a(a+1)-(2a+1) &= p-(p-1)\\ a^2-a-2 &= 0.\end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são $a = 2$ e $a = -1$. Portanto, como $p = a(a+1)$, temos $p = 6$ ou $p = 0$.

241. Se x_1 e x_2 são as raízes e $x_1 = -x_2$, a soma das raízes da equação vale:

$$\begin{aligned}-b &= x_1 + x_2\\ &= 0\end{aligned}$$

242.

a) $x_1 + x_2 = 4$ e $x_1 \cdot x_2 = -5$

b) $x_1 + x_2 = 7$ e $x_1 \cdot x_2 = 10$

c) $x_1 + x_2 = \dfrac{3}{2}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{2}$

d) $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 \cdot x_2 = -20$

243. A condição para raízes iguais é $\Delta = 0$. Sendo assim:

$$\begin{aligned}0 &= \Delta\\ &= b^2 - 4ac\\ &= (-8)^2 - 4\cdot 2\cdot m\\ &= 64 - 8m\end{aligned}$$

Portanto, $m = 64/8 = 8$.

244. As raízes são reais e distintas se, e somente se, $\Delta > 0$. Devemos ter:

$$\begin{aligned}0 &< \Delta\\ &= b^2 - 4ac\\ &= 6^2 - 4\cdot 3\cdot m\\ &= 36 - 12m.\end{aligned}$$

Daí, $12m < 36$, ou seja, $m < 3$.

245. A equação anterior pode ser reescrita como:

$$x^2 + (p^2+3p)x - 8 = 0$$

Sa as raízes da equação, x_1 e x_2, são simétricas, tem-se $x_1 + x_2 = 0$. Além disso, como $x_1 + x_2 = -(p^2+3p)$, obtemos $p^2 + 3p = 0$. Assim, $p = 0$ ou $p = -3$.

246. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação com $x_1 = 2x_2$. Pelas relações de Viète-Girard:

$$\begin{aligned}\frac{-(-12)}{2} &= x_1 + x_2\\ &= 3x_2\end{aligned}$$

Portanto, $x_2 = 2$ e $x_1 = 2 \cdot 2 = 4$. Consequentemente $2m/2 = x_1 \cdot x_2 = 8$ e $m = 8$.

247. De $\dfrac{a+b}{2} = 5$ e $\sqrt{ab} = 8$, obtemos $a + b = 10$ e $ab = 64$. Assim, eles são raízes da equação

$$x^2 - 10x + 64 = 0.$$

248. Se x_1 e x_2 são as raízes da equação com $x_2 = 1/x_1$, pelas relações de Viète-Girard, temos:

$$\begin{aligned}\frac{p^2-p}{p+3} &= x_1 \cdot x_2\\ &= x_1 \cdot \frac{1}{x_1}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}p^2 - p &= p + 3\\ p^2 - 2p - 3 &= 0.\end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são $p_1 = -1$ e $p_2 = 3$. Como nenhum desses dois valores produz raiz nula na equação original, os valores procurados são: $p = -1$ e $p = 3$.

249. Para que os quadrados das raízes sejam iguais deve acontecer:

$$\begin{aligned}x_1^2 &= x_2^2\\ x_1^2 - x_2^2 &= 0\\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) &= 0\end{aligned}$$

O que implica que $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$, analisando cada caso.

i) Se $x_1 - x_2 = 0$, temos $x_1 = x_2$, ou seja, raízes iguais e a condição para tal é $\Delta = 0$.

$$\begin{aligned}b^2 - 4ac &= 0\\ (m-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 8) &= 0\\ m^2 - 4m + 4 - 8m + 32 &= 0\\ m^2 - 12m + 36 &= 0\\ (m-6)^2 &= 0\\ m &= 6\end{aligned}$$

ii) Se $x_1 + x_2 = 0$, como a soma das raízes é $m - 2 = 0$, devemos ter $m = 2$.

Portanto, $m = 2$ ou $m = 6$.

250. (Extraído do vestibular da UNIFOR CE)
Se 1 e -3 são raízes de $x^2 + Ax + B = 0$, concluímos que:

$$\begin{aligned}1 + (-3) &= -A\\ 1 \cdot (-3) &= B.\end{aligned}$$

Sendo assim, $A = 2$ e $B = -3$. Basta calcular as raízes da equação $x^2 - 3x + 2 - 2 = 0$ que são 1 e 2.

251. Basta perceber que qualquer equação do 2º grau com coeficente $a = 1$ pode ser escrita como:

$$x^2 - (\text{Soma das Raízes}) \cdot x + (\text{Produto das Raízes}) = 0$$

Portanto, $x^2 - 4x - 12 = 0$ é uma possível equação para responder o problema. É importante observar que qualquer outra equação que satisfaça o enunciado será um múltiplo da equação encontrada pois dividindo-se a equação pelo coeficiente de x^2, os outros termos necessariamente serão dados pela soma e o produto das raízes.

252. Tem-se $x_1 + x_2 = \dfrac{-(-2n)}{1} = 2n$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{n+3}{1} = n + 3$ Assim,

$$\begin{aligned} n+3 &= x_1 \cdot x_2 \\ &= \left(\frac{b}{a}+1\right) \cdot \left(\frac{a}{b}+1\right) \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 \\ &= x_1 + x_2 \\ &= 2n \end{aligned}$$

Portanto, $n = 3$ e $n^2 = 9$.

253.

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} \\ &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \\ &= \frac{4}{-12} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= (4)^2 - 2(-12) \\ &= 40 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \\ &= 40 - 2(-12) \\ &= 64 \\ |x_1 - x_2| &= 8 \end{aligned}$$

254. Temos $x_1 + x_2 = -1$ e $x_1x_2 = -7$.

a)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 1 + 14 \\ &= 15 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) \\ &= -1 \cdot ((-1)^2 + 3 \cdot 7) \\ &= -22 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 \\ &= (15)^2 - 2(-7)^2 \\ &= 225 - 98 \\ &= 127. \end{aligned}$$

255. Pelas relações de Viète-Girard, temos $a+b=1/2$ e $ab=3/2$. Assim

$$\begin{aligned}(2a-1)(2b-1)+8 &= 4ab-2(a+b)+1+8\\ &= 4\cdot\frac{3}{2}-2\cdot\frac{1}{2}+9\\ &= 14.\end{aligned}$$

256. Como as raízes são as mesmas, os resultados obtidos pelas relações de Viète-Girard das duas equações devem ser os mesmos, ou seja,

$$\begin{aligned}-\frac{3m+1}{4} &= -\frac{5}{2}\\ \frac{n+3}{4} &= \frac{8}{2}\end{aligned}$$

Assim, $m=3$ e $n=13$.

257. (Extraído do vestibular da PUC MG)
Temos $p+q=11/15$ e $pq=2/15$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}+\frac{1}{q} &= \frac{p+q}{pq}\\ &= \frac{11/15}{2/15}\\ &= 11/2.\end{aligned}$$

258. (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática)
Se $x_1^2+x_2^2=1$, usando que $x_1x_2=-1/2$ e que $x_1+x_2=p/2$, tem-se:

$$\begin{aligned}(p/2)^2 &= (x_1+x_2)^2\\ &= x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\\ &= 1+2x_1x_2\\ &= 1-1\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $p=0$.

259. Seja $x^2+18x+30=y$, portanto:

$$\begin{aligned}y &= 2\cdot\sqrt{y+15}\\ y^2 &= (2\cdot\sqrt{y+15})^2\\ y^2 &= 4\cdot(y+15)\\ y^2-4y-60 &= 0\end{aligned}$$

As raízes da última equação são $y=2\pm 8$, isto é, $y_1=10$ e $y_2=-6$. Assim, $x^2+18x+30=10$ ou $x^2+18x+30=-6$. É fácil verificar que as quatro raízes encontradas nessas duas equações são reais e satisfazem a equação original. Em ambos os casos, a soma das raízes é -18 e consequentemente a soma total de todas as raízes é -36.

260. (Extraído da OBM)
Pelas relações de Viète-Girard, segue que $a+b=-a$ e $ab=b$, ou seja, $b=-2a$ e $b(a-1)=0$. Como b é não nulo, temos $a-1=0$. Consequentemente $a=1$ e $b=-2\cdot 1=-2$. Finalmente, $a-b=1-(-2)=3$.

261. Como $-b/a = R + S$ e $c/a = RS$, temos:

$$\begin{aligned}(aR+b)+(aS+b) &= a(R+S)+2b\\ &= -b+2b\\ &= b.\\ (aR+b)(aS+b) &= a^2RS+ab(R+S)+b^2\\ &= ac-b^2+b^2\\ &= ac\end{aligned}$$

Portanto, a equação $x^2 - bx + ac$ possui as raízes desejadas.

262. Suponha que exista tal raiz m. Se n é a outra raiz, como $mn = 17 > 0$, devemos ter $n > 0$. Além disso, de $n + m = -b$, podemos concluir que $n = -m - b$ é um número inteiro. Se m e n são números inteiros tais que $m \cdot n = 17$, como 17 possui apenas dois divisores positivos, tem-se $m = 1, n = 17$ ou $n = 1, m = 17$. Em qualquer um dos casos, $18 = m + n = -b$. Isso produz uma contradição pois $b \geq 0$.

263. (Extraído da Olimpíada Russa)
O conjunto dos trinômios que não possuem raízes reais é maior. Seja $x^2 + ax + b$ um trinômio possuindo as raízes inteiras m e n com $m \leq n$. Como $m + n = -a$, segue que ambos são negativos. Além disso, como $mn = b$, segue que m e n são divisores de um número menor ou igual a 1997. Portanto, $-1997 \leq m \leq n \leq 0$. Daí, podemos concluir que trinômio $x^2 - nx + mn$ está em B pois seu discriminante é $n^2 - 4mn = n(n - 4m) < 0$. Veja que para cada elemento de A associamos um único elemento de B e isso nos diz que B possui pelo menos tantos elementos quanto A tem. Note que a equação $x^2 - 3x + 5$ está em B e não é da forma mencionada anteriormente. Assim, B possui estritamente mais elementos do que A.

264. (Extraído da OBM)
De início, fazendo a soma das raízes, tem-se que $a + b = 3c$ e $c + d = 3a$. Somando e subtraindo membro a membro chega-se ao sistema:

$$\begin{cases} b+d &= 2(a+c)\\ \\ b-d &= 4(a-c)\end{cases}$$

Agora, como a é raiz de $x^2 - 3cx - 8d = 0$:

$$a^2 - 3ca - 8d = 0 \tag{1}$$

E como c é raiz de $x^2 - 3ax - 8b = 0$:

$$c^2 - 3ac - 8b = 0 \tag{2}$$

Subtraindo 2 de 1:

$$\begin{aligned}a^2-c^2 &= 8(d-b)\\ (a-c)(a+c) &= 8(d-b)\\ (a-c)(a+c) &= 8\cdot 4(a-c)\end{aligned}$$

Como $a - c \neq 0$, então $a + c = 32$. Voltando ao primeiro sistema, obtemos $b + d = 64$. Por fim,

$$a + b + c + d = 64 + 32 = 96.$$

265. Temos $a + b = 2014$ e $ab = -2004$. Note que:

$$\begin{aligned}a^2+b^2+a^2b^2+2ab(a+b+1) &=\\ (a+b+ab)^2 &=\\ (2014-2004)^2 &=\\ (10)^2 &= 100.\end{aligned}$$

266. Sejam a e a as raízes da equação. Pelas relações de Viète-Girard, segue que $a+b=m$ e $ab=-1$. Daí,

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ &= m^2+2 \\ a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2-2a^2b^2 \\ &= (m^2+2)^2-2 \end{aligned}$$

Como $m^2 \geq 0$, segue que $m^2+2 \geq 2$ e que $(m^2+2)^2 \geq 4$. Portanto,

$$\begin{aligned} a^4+b^4 &= (m^2+2)^2-2 \\ &= 2^2-2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

A igualdade ocorre quando $m^2=0$, ou seja, quando $m=0$.

267. (Extraído da OBM)
Como a é raiz da equação, temos $a^2=-a+1$. Multipliquemos esta equação sucessivamente por a sempre trocando o valor de a^2 nos resultados por $-a+1$:

$$\begin{aligned} a^2 &= -a+1 \\ a^3 &= -a^2+a \\ &= 2a-1 \\ a^4 &= 2a^2-a \\ &= -3a+2 \\ a^5 &= -3a^2+2a \\ &= 5a-3 \end{aligned}$$

Portanto, $a^5-5a=-3$. Resposta C.

268. Sejam a e a as raízes da equação com $a \geq b$. Pelas relações de Viète-Girard, segue que $a+b=k+2$ e $ab=k-1$. Daí,

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\ &= a^2+2ab+b^2-4ab \\ &= (a+b)^2-4ab \\ &= (k+2)^2-4(k-1). \end{aligned}$$

Veja que $(k+2)^2-4(k-1)=k^2+8 \geq 8$. Portanto,

$$\begin{aligned} a-b &= \sqrt{(a-b)^2} \\ &= \sqrt{(k+2)^2-4(k-1)} \\ &\geq \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o valor mímino é $2\sqrt{2}$ e ocorre quando $k^2+8=8$, ou seja, $k=0$.

269. (Extraído da OBM)
Sejam $r+s=m$ e $rs=n$. Assim, a partir das equações:

$$\begin{aligned} S_3 &= mS_2 - nS_1 \\ S_4 &= mS_3 - nS_2. \end{aligned}$$

Podemos obter:

$$\begin{aligned} 5 &= 2m - n \\ 6 &= 5m - 2n. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema anterior nas incógnitas m e n, obtemos $m=-4$ e $n=-13$. Daí,

$$\begin{aligned} S_5 &= mS_4 - nS_3 \\ &= (-4)\cdot 6 - (-13)\cdot 5 \\ &= 41. \end{aligned}$$

270. Uma condição necessária para que as frações anteriores existam é que $x \neq 0$. Multiplicando a equação por x, obtemos

$$\begin{aligned} 3-2x &= 7x+2 \\ 1 &= 9x \\ 1/9 &= x. \end{aligned}$$

É imediato verificar que $x = 1/9$ satisfaz a equação do problema e é diferente da restrição inicialmente mencionada. Portanto, o conjunto solução é $S=\{1/9\}$.

271. Uma condição necessária para que as frações anteriores existam é que os denominadores sejam não nulos, ou seja, $x \neq 1$. Multiplicando a equação por $3(x-1)$, obtemos

$$\begin{aligned} 3x+2(x-1) &= 6 \\ 5x &= 8 \\ x &= 8/5. \end{aligned}$$

É imediato verificar que $x = 8/5$ satisfaz a equação do problema e é diferente da restrição inicialmente mencionada. Portanto, o conjunto solução é $S=\{8/5\}$.

272. Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Multiplicando ambos os membros da equação por $x(x-1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\cdot x(x-1) + \frac{2x}{x-1}\cdot x(x-1) &= 2\cdot x(x-1) \\ x-1+2x^2 &= 2x^2-2x \\ 3x &= 1 \\ x &= 1/3 \end{aligned}$$

É imediato verificar que $1/3$ verifica a equação dada e, portanto, o conjunto solução é $S=\{1/3\}$.

273. Reduzindo todas as frações a um mesmo denominador, temos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} &= \\ \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x(x+1)}{x^2-1} + \frac{x(x-1)}{x^2-1} &= \\ \frac{x^2-x^2-x+x^2-x}{x^2-1} &= \\ \frac{x^2-2x}{x^2-1} & . \end{aligned}$$

274.

a) Para que o denominador não seja nulo, é necesário que $x \neq 0$. Multiplicando a equação por $2x$, temos $2x + 12 = 3x$ e, consequentemente, $x = 12$.

b) Para que os denominadores não sejam nulos, é necessário que $x \neq 2$ e $x \neq -2$. Mulltiplicando a equação por $(x-2)(x+2)$, temos

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2) &= (x-1)(x-2) \\ x^2+3x+2 &= x^2-3x+2 \\ 6x &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

c) Para os denominadores não serem nulos, devemos ter $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Multiplicando a equação dada por $x(x-1) = x^2 - x$, temos

$$\begin{aligned} 3(x-1)+x &= -3x+4 \\ 7x &= 7 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Em virtude das restrições iniciais, tal valor não é admissível para x. Portanto, o conjunto solução é vazio.

275. Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os denominadores sejam não nulos, ou seja, $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Multiplicando a equação por $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2x(x^2-1)}{x-1} - \frac{3x(x^2-1)}{x+1} &= \frac{(5-x^2)(x^2-1)}{x^2-1} \\ 2x(x+1)-3x(x-1) &= 5-x^2 \\ -x^2+5x &= 5-x^2 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Em virtude das restrições mencionadas no início, tal valor é inadmissível para x. Portanto, o conjunto solução é vazio.

276. Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os denominadores sejam não nulos, ou seja, $x \neq 2$ e $x \neq -2$. Multiplicando a equação por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+2} &= \frac{3}{x^2-4} \\ \frac{4(x^2-4)}{x-2} + \frac{x^2-4}{x+2} &= \frac{3(x^2-4)}{x^2-4} \\ 4(x+2)+(x-2) &= 3 \\ 5x &= -3 \\ x &= -3/5. \end{aligned}$$

Como tal valor não coincide com as restrições mencionadas no início, o conjunto solução é $S = \{-3/5\}$.

277. (Extraído Videoaula)
Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Multiplicando ambos os membros da equação por $(x-1)(x+1)$, obtemos

$$\begin{aligned} 3(x+1)+4x(x-1) &= 4(x-1)(x+1) \\ 3x+3+4x^2-4x &= 4x^2-4 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução é dado por $S = \{x \in \mathbb{R} | x = 7\}$.

278. (Extraído da Videoaula)
Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $x \neq 3$ e $x \neq -3$. Multiplicando ambos os membros da equação por $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$, obtemos

$$\begin{aligned} x + 3 + 2(x-3) &= 6 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Pelo comentário inicial, tal valor não é admissível e assim o conjunto solução é vazio.

279. Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $x \neq 1/2$ e $x \neq -1/2$. Multiplicando ambos os membros da equação por $(2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(4x^2-1)(3x-1)}{2x-1} + \frac{(4x^2-1)(3x+2)}{2x+1} &= 12x^2 - 3 - 1 \\ (2x+1)(3x-1) + (2x-1)(3x+2) &= 12x^2 - 4 \\ 6x^2 + x - 1 + 6x^2 + x - 2 &= 12x^2 - 4 \\ 2x &= 3 \\ x &= 3/2. \end{aligned}$$

Como $3/2$ é diferente das restrições mencionadas incialmente, segue que o conjunto solução é $S = \{3/2\}$.

280. Multiplicando ambos os membros da equação por $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{5a(a^2-b^2)}{a-b} - \frac{5a(a^2-b^2)}{a+b} &= \frac{2bz(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)} \\ 5a(a+b) - 5a(a-b) &= 2bz \\ 10ab &= 2bz. \\ z &= 5a. \end{aligned}$$

281. (Extraído da Videoaula)
Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $a \neq 3$ e $a \neq -3$. Multiplicando ambos os membros da equação por $(a-3)(a+3) = a^2 - 9$, obtemos

$$\begin{aligned} x(a+3) &= a - 3 - x \\ x(a+4) &= a - 3 \end{aligned}$$

Como $a - 3 \neq 0$, segue que $a + 4 \neq 0$ e daí $x = \dfrac{a-3}{a+4}$. Portando o conjunto solução pode ser descrito como $S = \{x \in \mathbb{R} | x = \dfrac{a-3}{a+4}, a \neq -3; 3; -4\}$.

282. (Extraído de Videoaula)
Uma condição necessária para que a soma dada exista é que os dois denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $m \neq n$ e $m \neq -n$. Multiplicando ambos os membros da equação por $(m-n)(m+n) = m^2 - n^2$, obtemos

$$\begin{aligned} x(m-n) - (x+1)(m+n) &= x - 3 \\ xm - xn - xm - xn - (m+n) &= x - 3 \\ x(2n+1) &= 3 - (m+n) \end{aligned}$$

Como n é inteiro, segue que $2n + 1 \neq 0$ e, consequentemente, $x = \dfrac{3-m-n}{2n+1}$.

283. (Extraído da AIME)
Para que a fração do lado esquerdo exista, o seu denominador deve ser diferente de zero, ou seja, $x \neq 0$ e $x \neq 5$. Para x diferente de tais valores, o membro do lado esquerdo possui valor constante igual a 2 e, consequentemente, $x - 3 = 2$. Assim, $x = 5$ e isso produz um absurdo em virtude das restrições mencionadas inicialmente. Portanto, não existe nenhum valor de x que satisfaça a equação.

284. Subtraindo o número 3 de ambos os membros da equação, temos

$$\begin{aligned}
\frac{x-m}{n+p+q+r} - 1 + \frac{x-n-p}{q+r+m} - 1 &\quad + \\
+\frac{x-q-r}{m+n+p} - 1 &\quad = \\
\frac{x-(m+n+p+q+r)}{n+p+q+r} + \frac{x-(m+n+p+q+r)}{q+r+m} &\quad + \\
\frac{x-(m+n+p+q+r)}{m+n+p} &\quad = \\
(x-(m+n+p+q+r)) \cdot S, &
\end{aligned}$$

com $S = \left(\frac{1}{n+p+q+r} + \frac{1}{q+r+m} + \frac{1}{m+n+p}\right) \neq 0$, pois cada fração de numerador 1 é positiva. Segue então que $x - (m+n+p+q+r) = 0$ e $x = m+n+p+q+r0$.

285. Como $\dfrac{x^2-a^2}{x^2-b^2} = \dfrac{x-a}{x-b} \cdot \dfrac{x+a}{x+b}$, podemos fatorar a expressão dada como:

$$\frac{x+a}{x+b}\left(\frac{x+a}{x+b} - \frac{a(x-a)}{b(x-b)}\right) + \frac{x-a}{x-b}\left(\frac{x-a}{x-b} - \frac{b(x+a)}{a(x+b)}\right).$$

Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{x+a}{x+b}\left(\frac{x+a}{x+b} - \frac{a(x-a)}{b(x-b)}\right) &\quad = \\
\frac{a(x+a)}{b(x+b)}\left(\frac{b(x+a)}{a(x+b)} - \frac{(x-a)}{(x-b)}\right). &
\end{aligned}$$

Portanto, a equação inicial pode ser fatorada como

$$\left(\frac{x+a}{x+b} - \frac{a(x-a)}{b(x-b)}\right)\left(\frac{x+a}{x+b} - \frac{b(x-a)}{a(x-b)}\right) \quad = \quad 0$$

Podemos eliminar os denominadores multiplicando a última equação por $(x+b)(x-b) = x^2 - b^2$, obtendo:

$$(x^2 - (a+b)x - ab)(x^2 + (a+b)x - ab) = 0$$

Como consequência, x deve ser uma das raízes dessas duas equações do segundo grau, ou seja,

$$x = \begin{cases} \dfrac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}{2} \\[2ex] \dfrac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}{2}. \end{cases}$$

286. Somando as duas frações em cada membro da equação, obtemos:

$$\frac{a(x-a)+b(x-b)}{ab} = \frac{b(x-b)+a(x-a)}{(x-a)(x-b)}.$$

Os numeradores são os mesmos e, caso sejam diferentes de zero, podem ser cancelados produzindo:

$$\begin{aligned}
(x-a)(x-b) &= ab\\
x^2 - x(a+b) + ab &= ab\\
x(x-(a+b)) &= 0.
\end{aligned}$$

Temos neste caso as soluções $x = 0$ e $x = a + b$. Caso os numeradores sejam nulos,

$$\begin{aligned}
a(x-a)+b(x-b) &= 0\\
x(a+b) &= a^2+b^2\\
x &= \frac{a^2+b^2}{a+b}.
\end{aligned}$$

Como $ab \neq 0$ e $|a| \neq |b|$, segue que esta nova solução não coincide com nenhuma das soluções já encontradas e, portanto, o conjunto solução possui três elementos. Resposta letra D.

287. (Extraído da AIME)
A soma das frações do membro da esquerda é

$$\frac{(x-2)N_1+(x-1)N_2}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-2)N_1+(x-1)N_2}{x^2-3x+2}.$$

Como o denominador é o mesmo do membro do lado esquerdo, podemos concluir que os numeradores são iguais, ou seja,

$$\begin{aligned}
35x - 29 &= (x-2)N_1 + (x-1)N_2\\
x(35 - N_1 - N_2) &= 29 - 2N_1 - N_2.
\end{aligned}$$

Se $35 - N_1 - N_2 \neq 0$, teremos uma única solução dada por $x = \dfrac{29-2N_1-N_2}{35-N_1-N_2}$. Portanto, $35 - N_1 - N - 2 = 0$ e, consequentemente, $29 - 2N_1 - N_2 = 0$. Obtemos assim um sistema:

$$\begin{cases}
N_1 + N_2 = 35\\
2N_1 + N_2 = 29.
\end{cases}$$

Resolvendo-o, encontramos $(N1, N_2) = (-6, 41)$. Portanto, $N_1N_2 = -246$.

288. Suponha, por absurdo, que existam tais números. Assim

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\\
&= \frac{bcdef+acdef+abdef+abcef+abcde}{abcdef}.
\end{aligned}$$

Portanto, o numerador e o denominador da última fração são iguais. Isso é um absurdo, pois o numerador é um número par e o denominador é ímpar.

289. (Extraído da Putnam)
Uma ideia natural é tentar agrupar as soluções em pares. Qualquer solução com $a_1 \neq a_2$ pode ser pareada com a outra solução obtida pela troca de posição entre a_1 e a_2. Logo, B_{10} tem a mesma paridade que o número de soluções com $a_1 = a_2$. Das soluções com $a_1 = a_2$, podemos parear aquelas que tem $a_3 \neq a_4$ da mesma maneira. Repetindo esse argumento com (a_5, a_6), (a_7, a_8) e (a_9, a_{10}), concluímos que a paridade de B_{10} é a mesma do número de soluções com $a_5 = a_6$, $a_7 = a_8$ e $a_9 = a_{10}$, ou seja, das soluções de:

$$\frac{2}{a_1} + \frac{2}{a_3} + \frac{2}{a_5} + \frac{2}{a_7} + \frac{2}{a_9} = 1.$$

Como anteriormente, podemos nos restringir à quantidade de soluções com $a_1 = a_3$ e $a_5 = a_7$ da equação:

$$\frac{4}{a_1} + \frac{4}{a_5} + \frac{2}{a_9} = 1.$$

Mais uma vez, podemos nos restringir à quantidade de soluções com $a_1 = a_5$ da equação:

$$\frac{8}{a_1} + \frac{2}{a_9} = 1.$$

Agora ficou fácil! Basta contar explicitamente o número de soluções da equação anterior. Como fazer isso? Bem, ela pode ser fatorada como:

$$(a_1 - 8)(a_9 - 2) = 16$$

que admite 5 soluções correspondendo as fatorações de 16 como $2^i \times 2^{4-i}$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Então B_{10} é ímpar.

290. Uma condição necessária para que exista uma solução do problema anterior é que os denominadores das três frações não sejam nulos, ou seja, x é diferente de a, b e c. Multiplicando a equação por $(x-a)(x-b)(x-c)$, temos

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b)(x-c) + (x+b)(x+c)(x-a) &\quad + \\ (x+c)(x+a)(x-b) &\quad = \\ 3(x-a)(x-b)(x-c) &\quad = \\ 3x^3 - 3x^2(a+b+c) + 3x(ab+bc+ac) - 3abc. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o produto dos termos do membro esquerdo da primeira equação e cancelando os termos presentes no membro direito, obtemos

$$\begin{aligned} (a+b+c)x^2 - (ab+bc+ca)x &= 0 \\ x[(a+b+c)x - (ab+bc+ac)] &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $x = 0$ ou $x = \dfrac{ab+bc+ac}{a+b+c}$. É imediato verificar que $x = 0$ é solução. Para que o segundo valor também satisfaça a equação dada, é necessário que esse valor não seja igual a nenhum dos parâmetros. Isso ocorre se, e somente se,

$$(bc - a^2)(ca - b^2)(ab - c^2) \neq 0.$$

Portanto, o conjunto solução contém dois elementos se $(bc - a^2)(ca - b^2)(ab - c^2) \neq 0$ e apenas um em caso contrário.

291. Uma condição necessária para que a fração da equação exista é $(x-2)^2 \neq 0$, ou seja, $x \neq 2$. Multiplicando a equação por $(x-2)^2$, obtemos

$$\begin{aligned} x^2(x-2)^2 + 4x^2 &= 12(x-2)^2 \\ (x^2)^2 - 4x^2(x-2) &= 12(x-2)^2 \\ (x^2)^2 - 4x^2(x-2) - 12(x-2)^2 &= 0 \\ (x^2 + 2(x-2))(x^2 - 6(x-2)) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, ou $x^2 + 2(x-2) = 0$ ou $x^2 - 6(x-2) = 0$. A primeira equação possui as raízes $-1 \pm \sqrt{5}$ e a segunda não possui raízes reais. Portanto, o conjunto solução é $S = \{-1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}\}$.

292. Seja $a = \dfrac{1}{x}$. Então o sistema é equivalente à

$$\begin{cases} a + 3y = 6 \\ 2a - 5y = 1. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação do dobro da primeira, obtemos $11y = 11$, ou seja, $y = 1$. Substituindo tal valor na primeira equação, encontramos $a = 3$. Consequentemente $(x, y) = (1/3, 1)$.

293. (Extraído Videoaula)
Uma condição necessária para que o sistema dado exista é que os denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $x \neq y$ e $x \neq -y$. Multiplicando a primeira equação por $3(x+y)$ e a segunda por $x-y$, obtemos

$$\begin{aligned} 3x &= x + y \\ 4 &= -2(x-y) \end{aligned}$$

Pela primeira equação, $y = 2x$. Substituindo este valor na segunda equação, obtemos $4 = 2x$, ou seja, $x = 2$ e, finalmente, $y = 4$.

294. Uma condição necessária para que as frações envolvidas existam é que tanto x quanto y sejam não nulos. Somando o dobro da primeira equação com a segunda, obtemos $\dfrac{12}{x} = 2$, ou seja, $x = 6$. Substituindo esse valor na primeira equação, encontramos $y = 1/2$. Portando, $(x, y) = (6, 1/2)$.

295. Multiplicando a primeira equação por 3 e somando com a segunda obtemos $\dfrac{15}{y} = 8$, ou seja, $y = 15/8$. Substituindo esse valor na primeira equação, encontramos $x = 15/7$.

296. (Extraído Videoaula)
Se $a = \dfrac{1}{x}$ e $b = \dfrac{1}{y}$, o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} 4a + 7b = -18 \\ a + 2b = -7. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 4 e subtraindo-a da primeira, obtemos $-b = 10$. Portanto, $b = -10$ e $a = -7 - 2b = 13$. Finalmente, podemos concluir que $x = \dfrac{1}{13}$ e $y = -\dfrac{1}{10}$.

297. Uma condição necessária para que as frações existam é que $y \neq 0$. Multiplicando a primeira equação por $2y$, obtemos $2x - 6y = 4$. Subtraindo a equação encontrada da segunda equação do sistema, temos $-3y = -12$, ou seja, $y = 4$. Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos $x = 14$.

298. Somando todas as equações, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} &= 36 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 9 \end{aligned}$$

Subtraindo a última equação de todas as equações do sistema, obtemos:

$$\frac{1}{x} = 2, \frac{1}{y} = 3 \text{ e } \frac{1}{z} = 4.$$

Consequentemente, $(x, y, z) = (1/2, 1/3, 1/4)$.

299. (Extraído da AIME 1968)
Das equações dadas, temos:

$$\begin{aligned} x - 1 &= \frac{1}{y} \\ y - 1 &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Portanto, $y(x-1) = 1 = x(y-1)$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} xy - y &= xy - x \\ x &= y \end{aligned}$$

A resposta correta está na letra E.

300. (Extraída da AMC)
Seja $p = \dfrac{x}{y}$. Assim $x = py$ e o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} py + \dfrac{1}{y} = 4 \\ y + \dfrac{1}{py} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por p, obtemos $py + \dfrac{1}{y} = \dfrac{p}{4}$. Por comparação, podemos concluir que $\dfrac{p}{4} = 4$ e, consequentemente, $p = 16$.

301. Sejam $a = \dfrac{1}{x}$ e $b = \dfrac{1}{y}$. Assim, o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} -4a + 3b = -8 \\ 7a + 2b = 43 \end{cases}$$

Subtraindo o dobro da primeira equação do o triplo da segunda, obtemos $29a = 145$, ou seja, $a = 5$. Substituindo o valor de a na primeira equação, obtemos $b = 4$. Portanto, $(x, y) = (1/5, 1/4)$.

302. Multiplicando as equações do sistema anterior por xy, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 &= 12xy \\ 3(x+y) &= xy. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x+y)((x+y)^2 - 3xy), \end{aligned}$$

é conveniente introduzir as variáveis auxiliares $a = x + y$ e $b = xy$. Assim o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} a(a^2 - 3b) &= 12b \\ 3a &= b. \end{cases}$$

Substituindo o valor de b da segunda na primeira equação, obtemos $a(a^2 - 9a) = 36a$. Devemos ter $a \neq 0$, pois caso contrário teríamos também $b = 0$ e algum dos denominadores iniciais seria nulo, o que é um absurdo. Podemos então cancelá-lo obtendo a equação do segundo grau

$$a^2 - 9a - 36 = 0.$$

As suas raízes são $a = 12$ e $a = -3$. Para cada um desses valores, temos um novo sistema nas incógnitas iniciais:

$$\begin{cases} x+y &= 12 \\ xy &= 36. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x+y &= -3 \\ xy &= -9. \end{cases}$$

No primeiro, caso as soluções são $(x, y) = (6, 6)$ e, no segundo caso, $(x, y) = (\frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1), \frac{3}{2}(-\sqrt{5} - 1))$ ou $(x, y) = (\frac{3}{2}(-\sqrt{5} - 1), \frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1))$. É imediato verificar que as três soluções encontradas satisfazem o sistema dado.

303.

Dividindo a a primeira equação pela segunda e pela terceira, obtemos o novo sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y+z}{x+y} &= \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{z+x}{x+y} &= \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Multiplicando ambas as equações por $x + y$, temos

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z &= 0 \\ x + 4y - 3z &= 0. \end{cases}$$

Por comparação, $5x + 2y = x + 4y$, ou seja, $y = 2x$. Substituindo na primeira equação, encontramos $3z = 5x + 2y = 9x$, ou seja, $z = 3x$. Assim

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{xyz}{x+y} \\ &= \frac{6x^3}{3x} \\ &= 2x^2. \end{aligned}$$

Daí, $x = \pm 1$ e $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ou $(x, y, z) = (-1, -2, -3)$. É imediato verificar que os valores encontrados são soluções do sistema.

304. Multiplicando todas as equações, obtemos

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{n-2} = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Daí,

$$x_1 x_2 \dots x_n = \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \dots a_n} = S.$$

Multiplicando a k-ésima equação por x_k^2, temos:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n}{x_k} \\ a_k x_k^2 &= x_1 x_2 \dots x_n \\ x_k &= \sqrt{\frac{S}{a_k}}. \end{aligned}$$

Portanto, a única solução do sistema é

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sqrt{\frac{S}{a_1}}, \sqrt{\frac{S}{a_2}}, \dots, \sqrt{\frac{S}{a_n}} \right),$$

com $S = \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

305. O sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{x} & = \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{x+z}{xz} & = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{y+z}{yz} & = \dfrac{1}{c}. \end{cases}$$

Somando as três equações, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{ab+bc+ac}{2abc}. \end{aligned}$$

Somando agora as duas primeiras equações do sistema anterior e subtraindo o valor da última equação, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{ab+bc+ac}{2abc} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{ab+bc+ac}{2abc} \\ &= \frac{a+b}{ab} - \frac{ab+bc+ac}{2abc} \\ &= \frac{2ac+2bc-ab-bc-ac}{2abc} \\ &= \frac{ab+bc-ac}{2abc}. \end{aligned}$$

Portando, $x = \dfrac{2abc}{ab+bc-ac}$.

306. (Extraído da Olimpíada Russa)
O sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dfrac{a^2+1}{a^2} - \dfrac{2}{b} &= 0 \\ \dfrac{b^2+1}{b^2} - \dfrac{2}{c} &= 0 \\ \dfrac{c^2+1}{c^2} - \dfrac{2}{a} &= 0 \end{cases}$$

Somando essas equações, obtemos

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{c}\right)^2 = 0.$$

Como um quadrado de um real sempre é não negativo, a única maneira para que a soma deles seja nula é:

$$1 = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c},$$

ou seja, $a = b = c = 1$.

307. Sejam c e v as velocidades da correnteza do rio e do homem. Os dados do enunciado podem ser traduzidos no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{15}{v+c} &= \dfrac{15}{v-c} - 5 \\ \dfrac{15}{2v+c} &= \dfrac{15}{2v-c} - 1 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $(v^2 - c^2)$ e a segunda por $(4v^2 - c^2)$, obtemos

$$\begin{cases} 15(v-c) &= 15(v+c) - 5(v^2 - c^2) \\ 15(2v-c) &= 15(2v+c) - (4v^2 - c^2) \end{cases}$$

Por comparação, segue que $5(v^2 - c^2) = (4v^2 - c^2)$, ou seja, $v^2 = 4c^2$. Como as velocidades são positivas, $v = 2c$. Substituindo esse valor em qualquer uma das duas equações do sistema, obtemos $c = 2$ e, consequentemente, $v = 4$. Resposta letra A.