Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 1

Produtos Notáveis

Vários problemas de Álgebra para alunos do Ensino Fundamental utilizam Produtos Notáveis, que são identidades clássicas envolvendo multiplicação de expressões.

Vejamos alguns exemplos para diversos produtos notáveis que auxiliarão na formação de ideias para problemas futuros mais difíceis.

1 Quadrado da soma ou da diferença de dois números

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Problema 1. (OCM) Prove que não existem inteiros positivos a e b tais que $\frac{b^2+b}{a^2+a} = 4$.

Solução. Suponha que existam tais inteiros positivos a e b. A equação dada é equivalente a $b^2 + b = 4\left(a^2 + a\right) = 4a^2 + 4a$. Isso lembra o quadrado de $2a+1$, que é $4a^2 + 4a + 1$. Assim, seria bom somarmos 1 a cada lado, para obtermos

$$b^2 + b + 1 = 4a^2 + 4a + 1.$$

Por outro lado,

$$b^2 < b^2 + b + 1 < b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$$

pois b é um inteiro positivo. Como b^2 e $(b+1)^2$ são quadrados consecutivos, isso mostra que não seria possível $b^2 + b + 1$ ser o quadrado de um inteiro.

No próximo exemplo, vamos utilizar um fato útil de pensar que um número com todos os dígitos 1s, como 11...1, pode ser escrito na forma $\frac{99...9}{9}$. Se o número possuir apenas o dígito 4, por exemplo, como 44...4, então o escrevemos na forma $4 \times \frac{99...9}{9}$. A vantagem dessas alterações é saber que $\underbrace{99...9}_{n} = 10^n - 1$ (verifique esse fato para quantidades pequenas de 9s).

Problema 2. Seja $n > 1$ um número inteiro. Prove que o número $\sqrt{\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{44...4}_{2n}}$ não é racional.

Solução. Mostrar que $\sqrt{11...144...4}$ não é racional é equivalente a provar que $11...144...4$ não é um quadrado perfeito. Ou seja, este problema tenta mostrar que não há outros quadrados perfeitos com o formato do número 144.

Podemos escrever

$$11...144...4 = 11...1 \times 10^{2n} + 44...4 = \frac{10^n - 1}{9} \times 10^{2n} + 4 \times \frac{10^{2n} - 1}{9}$$
$$= \frac{10^n - 1}{9}\left(10^{2n} + 4\left(10^n + 1\right)\right) = \frac{10^n - 1}{9}\left(10^n + 2\right)^2.$$

Agora, é suficiente mostrarmos que $10^n - 1$ nunca pode ser quadrado perfeito se $n > 1$. Isso é verdade pelo fato de $10^n - 1$ deixar resto 3 na divisão por 4 e não existir quadrado perfeito nessa situação.

Problema 3. (i) Se n é um inteiro positivo tal que $2n + 1$ é um quadrado perfeito, mostre que $n + 1$ é a soma de dois quadrados perfeitos sucessivos.
(ii) Se $3n + 1$ é um quadrado perfeito, mostre que $n + 1$ é a soma de três quadrados.

Problema 4. Suponha que um número inteiro n seja a soma de dois números triangulares, ou seja, $n = \frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2}$. Mostre que $4n+1$ pode ser escrito como a soma de dois quadrados em termos de a e b.

Problema 5. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + \dfrac{1}{x} = 5$. Calcule $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Problema 6. (EUA) O número 121_b, escrito na base inteira b, é o quadrado de um inteiro para quais valores de b?

Problema 7. Seja $D = a^2 + b^2 + c^2$, sendo a e b inteiros consecutivos e $c = ab$. Mostre que $\sqrt{D}$ é sempre um inteiro ímpar.

Problema 8. (EUA) Determine a soma dos dígitos na base 10 de $\left(10^{4n^2+8} + 1\right)^2$, sendo n um inteiro positivo.

Problema 9. Mostre que a soma dos quadrados de dois números ímpares consecutivos é um número par não múltiplo de 4.

Problema 10. (IME) Mostre que os números $49, 4489, 444889, 44448889, ...$, obtidos colocando-se 48 no meio do número anterior, são quadrados de números inteiros.

Problema 11. Se $x^{12} + 2x^6(1 - 2y^2) + 1 = 0$ e $x \in \mathbb{R}_-$, então mostre que $y < 1$.

Problema 12. Ache todos os inteiros positivos x, y tais que $y^2 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$.

Problema 13. Determine todas as triplas de números reais (x, y, z) que são solução da equação $4x^4 - x^2\left(4y^4 + 4z^4 - 1\right) - 2xyz + y^8 + 2y^4z^4 + y^2z^2 + z^8 = 0$.

Problema 14. (OCM) Determine todos os valores reais de x, y e z satisfazendo a igualdade

$$3x^2 + y^2 + z^2 = 2xy + 2xz.$$

Problema 15. (OCM) Determine todos os pares de inteiros (x, y) que satisfazem a equação $x^2 + x + 1995 = y^2 + y$.

Problema 16. (EUA) Encontre $x^2 + y^2$ se $x, y \in \mathbb{Z}$ e $xy + x + y = 71,\ x^2y + xy^2 = 880$.

2 Diferença de quadrados

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Problema 17. Quantos pares de números inteiros positivos m e n satisfazem a equação $m^2 - n^2 = 2011$?

Solução. Suponha que existam inteiros positivos m e n tais que $m^2 - n^2 = 2011$. Daí, $(m+n)(m-n) = 2011$. Como 2011 é primo e $m + n > m - n$, pois $n > 0$, segue que $m + n = 2011$ e $m - n = 1$ e, portanto, $m = 1006$ e $n = 1005$.

Problema 18. Prove que existe exatamente um número natural n tal que $2^8 + 2^{11} + 2^n$ é um quadrado perfeito.

Solução. Vamos buscar soluções para a equação $2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$. Ela é equivalente a $2^8\left(1 + 2^3\right) + 2^n = k^2$ ou $2^n = k^2 - 48^2 = (k+48)(k-48)$. Assim, $k + 48 = 2^a$ e $k - 48 = 2^b$, sendo $n = a + b$. Subtraindo essas equações, obtemos $96 = 2^a - 2^b$ e, portanto, $2^5 \cdot 3 = 2^b\left(2^{a-b} - 1\right)$. Em cada membro dessa igualdade, temos a fatoração em parte par e parte ímpar. Igualando, obtemos $b = 5$ e $a = 7$. Portanto, a única solução é $n = a + b = 7 + 5 = 12$.

Problema 19. Determine o valor do produto $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) ... \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$.

Problema 20. (EUA) Simplifique a expressão

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}).$$

Problema 21. (OCM/ITA) Qual é o menor inteior positivo n tal que $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0,01$.

Problema 22. Quantos pares de números inteiros m e n satisfazem a equação $m^2-n^2=2014$?

Problema 23. Seja $a\neq 1$ um número real. Simplifique a expressão

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^4}\right)...\left(1+\frac{1}{a^{2^{100}}}\right).$$

Problema 24. Racionalize a expressão

$$\frac{1}{(1+\sqrt[64]{2})(1+\sqrt[32]{2})(1+\sqrt[16]{2})(1+\sqrt[8]{2})(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt[2]{2})}.$$

Problema 25. (OCM) Encontre o quociente da divisão de $a^{128}-b^{128}$ por

$$(a^{64}+b^{64})(a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b).$$

Problema 26. A expressão $2n+1$ é o quadrado de um inteiro para exatamente quantos números naturais n?

Problema 27. Determine todas as soluções inteiras da equação $3^{2x}-5^{2y}=104$.

Problema 28. (EUA) Se $x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=20$, então determine o valor de

$$x^2+\sqrt{x^4-1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}.$$

Problema 29. Um quadrado é cortado em 49 quadrados menores. Todos esses quadrados têm as medidas de seus lados, em centímetros, expressas por números inteiros positivos. Há exatamente 48 quadrados com área igual a $1cm^2$. Determine o número de resultados possíveis para expressar, em cm^2, a medida da área do quadrado original.

Problema 30. Seja p um número primo ímpar dado. Quantos valores de k inteiro positivo existem tais que $\sqrt{k^2-pk}$ é também um inteiro positivo?

Problema 31. (EUA) Existe um único par de inteiros positivos x e y satisfazendo a equação $x^2+84x+2008=y^2$. Determine o valor de $x+y$.

Problema 32. (EUA) Calcule $\dfrac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$.

3 Produtos notáveis envolvendo cubos

$$\text{Soma de dois cubos: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{Diferença de dois cubos: } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Cubo da soma de dois números: } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$\text{Cubo da diferença de dois números: } (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Problema 33. (Eslovênia) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$ e $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$. Calcule o valor de $a + b$.

Solução. As expressões nessas equações lembram os cubos das diferenças de a e 1 e b e 1, respectivamente. Assim, podemos reescrevê-las como

$$(a-1)^3 + 2(a-1) = -2,$$

$$(b-1)^3 + 2(b-1) = 2.$$

Somando-as, obtemos

$$(a+b-2)\left[(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2\right] = 0.$$

Agora, observe que

$$(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2$$

$$= (a-1)^2 - (a-1)(b-1) + \frac{(b-1)^2}{4} + \frac{3(b-1)^2}{4} + 2$$

$$= \left[a - 1 - \frac{b-1}{2}\right]^2 + \frac{3(b-1)^2}{4} + 2 > 0.$$

Assim, $a + b = 2$.

Problema 34. Prove que se $a + b + c = 0$, então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Solução. Se $a + b = -c$, então $(a+b)^3 = (-c)^3$, ou seja,

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -c^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(-c) = -c^3.$$

Logo, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Problema 35. (Putnam) Sejam x, y, z números reais distintos dois a dois. Prove que $\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-z} + \sqrt[3]{z-x} \neq 0$.

Problema 36. Determine o número de soluções reais distintas da equação $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7-x} = 3$.

Problema 37. (EUA/OCM) Mostre que se x é um número satisfazendo $\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3$, então $75 < x^2 < 85$.

Problema 38. (IME 1991) Mostre que $\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$ é um número racional.

Problema 39. (EUA) Se x e y são números inteiros tais que $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$, determine o valor de $x+y$.

Problema 40. (Leningrado) Prove que $\dfrac{(2^3-1)(3^3-1)\ldots(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\ldots(100^3+1)}=\dfrac{3367}{5050}$.

4 Outros produtos notáveis

$$ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$$
$$ab+a+b+1=(a+1)(b+1)$$

Problema 41. Determine o número de pares ordenados (m,n) de números inteiros positivos que são soluções da equação $\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$.

Solução. A equação $\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$ é equivalente a $mn-2m-4n+8=8 \Leftrightarrow (m-4)(n-2)=8$, seguindo os modelos propostos nesta seção.
As possibilidades são $m-4=1, n-2=8; m-4=2, n-2=4; m-4=4, n-2=2; m-4=8, n-2=1$, ou seja, os pares ordenados (m,n) são $(5,10); (6,6); (8,4); (12,3)$.

Problema 42. Determine todos os números inteiros tais que a soma e o produto são iguais.

Problema 43. (IME) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2+(m-15)x+m=0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto dos possíveis valores de m.

Problemas da OBM

Problema 44. (OBM 1^a fase/2002) Se $xy = 2$ e $x^2 + y^2 = 5$, então $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2$ vale:

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{25}{4}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

Problema 45. (OBM 3^a fase/2003) Mostre que $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2 > 0$ quaisquer que sejam os reais x e y.

Problema 46. (OBM 2^a fase/2005)

a) Fatore a expressão $x^2 - 9xy + 8y^2$.

b) Determine todos os pares de inteiros $(x; y)$ tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$.

Problema 47. (OBM 1^a fase/2005) Os inteiros positivos x e y satisfazem a equação $\sqrt{x + \frac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x - \frac{1}{2}\sqrt{y}} = 1$. Qual das alternativas apresenta um possível valor de y?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Problema 48. (OBM 3^a fase/2006) Encontre todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros tais que $x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2)$.

Problema 49. (OBM 2^a fase/2006) Sejam a e b números reais distintos tais que $a^2 = 6b + 5ab$ e $b^2 = 6a + 5ab$.

a) Determine o valor de $a + b$.

b) Determine o valor de ab.

Problema 50. (OBM 2^a fase/2008) Sejam x e y números reais positivos satisfazendo as equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$. Calcule o valor de $\frac{1}{xy}$.

Problema 51. (OBM 1^a fase/2010) Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos tais que $x^2 - y^2 = 2^{2010}$?

a) 1000 b) 1001 c) 1002 d) 1003 e) 1004

Problema 52. (OBM 3^a fase/2010) Sejam a, b e c reais tais que $a \neq b$ e $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2010$. Calcule $c^2(a + b)$.

Problema 53. (OBM 1^a fase/2011) Qual é o valor da expressão $20112011^2 + 20112003^2 - 16 \times 20112007$?

a) 2×20112007^2

b) 2×20112003^2

c) 2×20112007

d) 2×20112003

e) 2×20112011^2

Dicas

3. Observe que $2n+1$ é o quadrado de um inteiro ímpar e que $3n+1$ é o quadrado de um número não múltiplo de 3.

6. Números na base b só utilizam dígitos $0, 1, ..., b-1$.

10. Escreva $\underbrace{44...4}_{n+1}\underbrace{88...8}_{n}9 = 4 \cdot \frac{10^{n+1}-1}{9} + 8 \cdot \frac{10^n-1}{9} + 9$.

12. Agrupe x com $x+3$ e $x+1$ com $x+2$.

13. Comece separando o -1 de dentro dos parênteses (escrevendo x^4 depois). Em seguida, agrupe y^8, z^8 e $2y^4z^4$.

14. Se uma soma de quadrados de números reais é 0, então todos os números são iguais a 0.

15. Veja a resolução do problema 1.

16. Fatore e faça substituições de variáveis $x+y=s$ e $xy=p$.

21. Multiplique a inequação membro a membro por $\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$. Você obterá $\sqrt{n}+\sqrt{n-1} > 100$, cuja menor solução é 2500.

23. Multiplique e divida tudo por $1-\frac{1}{a}$.

27. Primeiramente, descarte os casos em que os números são negativos. Depois, use que soma e diferença de dois números inteiros têm a mesma paridade. Por fim, lembre-se que o produto de dois números negativos é positivo.

30. Escreva $k^2-pk=n^2$ e complete o trinômio quadrado perfeito que começa com k^2-pk, somando e subtraindo $\frac{p^2}{4}$.

31. Complete o trinômio quadrado perfeito que começa com x^2+84x.

32. Fatore a expressão $x^4+324=x^4+18^2$. A dica é somar e subtrair $2 \cdot x^2 \cdot 18$.

39. Passe 2000 para o lado esquerdo da equação e fatore fazendo aparecer o fator $x+y$.

Respostas

5. 23
6. $b > 2$
8. 4
12. $y = x^2 + 3x + 1$
13. (t^2, t, t) ou $(-t^2, t, -t), t \in \mathbb{R}$
14. $x = y = z = 0$
15. Não existe par (x, y)
16. 146
19. $\frac{11}{20}$
20. 104
21. 2501
22. 0
23. $\frac{1-a^{-2^{101}}}{1-a^{-1}}$
24. $\sqrt[64]{2} - 1$
25. $a^{64} - b^{64}$
26. 1
27. $x = 3, y = 2$
28. $51,005$
29. 2
30. 1 (para cada primo ímpar p)
31. 80
32. 373
36. 2
39. 10
42. $(0, 0)$, $(2, 2)$
43. $0, 7, 9, 25, 27, 34$

Algebra 01 - Produtos Notáveis

Problema 1. Encontre as soluções inteiras positivas (a, b, c) da equação

$$a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 + b^3c + bc^3 + 2b^2c^2 = 11.$$

Solução. Fatorando obtemos:

$$\begin{aligned}
a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 + b^3c + bc^3 + 2b^2c^2 = 11 &\iff bc(a^2 - 2ab - 2ac + b^2 + c^2 + 2bc) = 11 \\
&\iff bc[a^2 - 2a(b+c) + (b+c)^2] = 11 \\
&\iff bc[a - (b+c)]^2 = 11.
\end{aligned}$$

Como 11 é livre de quadrados, devemos ter $[a - (b+c)]^2 = 1$ e $bc = 11$. De forma que as soluções são $(a; b; c) = (11; 11; 1), (13; 11; 1), (11; 1; 11), (13; 1; 11)$.

Problema 2. Se $x + \dfrac{1}{x} = 3$, encontre $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$.

Solução. Sabemos que $x^2+\dfrac{1}{x^2} = (x+\dfrac{1}{x})^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x} = 7$. Analogamente, $x^4+\dfrac{1}{x^4} = 7^2-2 = 47$. Além disso, fazendo

$$(x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2}) = x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x}$$

encontramos $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 18$.
Agora, usando que

$$(x^4 + \frac{1}{x^4})(x + \frac{1}{x}) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x^3 + \frac{1}{x^3}$$

finalmente encontramos $x^5 + \dfrac{1}{x^5} = 123$.

Problema 3. Encontre todos os reais x, y e z que satisfazem

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 2x + 2 = 0$$

Solução. Note que

$$\begin{aligned}
2x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 2x + 2 &= (x^2 - 2xz + z^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) \\
&= (x-z)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, devemos ter $y + 1 = x - 1 = x - z = 0$. Ou seja, $(x, y, z) = (1, -1, 1)$.

Problema 4. Sabendo que $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ e que $x + y + z = 4$, x, y e z reais. Encontre $xy + xz + yz$.

Solução. Façamos a seguinte expansão.

$$\begin{aligned}(x+y+x)^2 &= [x+(y+z)]^2\\ &= x^2+2x(y+z)+(y+z)^2\\ &= x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.\end{aligned}$$

Então, encontramos que

$$xy+xz+yz=\frac{(x+y+x)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}.$$

Substituindo os valores, chegamos na resposta, $\dfrac{4^2-6}{2}=5$.

Problema 5. Mostre que $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Solução. Note que $5+2\sqrt{6}=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$. Portanto, $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Problema 6. Simplifique $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$.

Solução. Perceba que

$$7+4\sqrt{3}=2^2+(\sqrt{3})^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2.$$

Sendo assim, $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Todavia, também temos que

$$2+\sqrt{3}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2.$$

Finalmente, chegamos em $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Problema 7. Encontre todos os inteiros n para os quais $4n^4+1$ é primo.

Solução.

$$\begin{aligned}4n^4+1 &= 4n^4+4n^2+1-4n^2\\ &= (2n^2+1)^2-(2n)^2\\ &= (2n^2-2n+1)(2n^2+2n+1)\end{aligned}$$

Para $n = 1$, $4n^4 + 1 = 5$ é primo. Para $n > 1$, ambos os fatores $2n^2 - 2n + 1$ e $2n^2 + 2n + 1$ são maiores que 1, de forma que $4n^4 + 1$ não pode ser primo. Sendo assim, $4n^4 + 1$ é primo somente para $n = 1$.

Problema 8. Determine o número de pares de inteiros a e b que satisfazem $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{10}$.

Solução. A equação $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{10}$ é equivalente a $10a + 10b = ab$, com $a, b \neq 0$. Temos $ab - 10a - 10b + 100 = 100 \iff (a-10)(b-10) = 100$. $a - 10$ pode ser qualquer divisor de 100 com exceção de -10. Logo, pode assumir os valores $\pm100, \pm50, \pm25, \pm20, 10, \pm5, \pm4, \pm2, \pm1$. Então, o número de soluções é $2 \cdot 8 + 1 = 17$.

Problema 9. Expresse $F = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$ com um denominador racional.

Solução. Seja $a = \sqrt[3]{2}$, então $F = \dfrac{a}{1 + a + a^2}$. Sabemos que $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$. Dessa forma, $F = \dfrac{a}{\dfrac{a^3 - 1}{a - 1}} = \dfrac{a(a-1)}{a^3 - 1}$. Substituindo os valores obtemos

$$F = \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - 1)}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

Problema 10. Prove que se $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 = 4(ab+bc+cd)$, então $a = b = c = b$.

Solução. Desenvolvendo, obtemos

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 = 4(ab + bc + cd) \quad &\iff \quad a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 = 2ab + 2bc + 2cd \\
&\iff \quad (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) = 0 \\
&\iff \quad (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 = 0.
\end{aligned}$$

A única maneira dessa soma ser 0 é com $(a-b)^2 = (b-c)^2 = (c-d)^2 = 0$. Isto é, $a = b = c = d$.