IMECC/UNICAMP
MA111 - Cálculo I
Prova P3
28 de junho de 2024 (6ª Manhã) - 08:00 às 10:00

RA: ________ **Nome:** ______________________________ **Turma:** _____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	6	4,5	2	2,5	15
Nota:					

Instruções para a realização de sua prova:

1. Usar caneta azul/preta ou lápis/grafite de cor escura. Não desgrampear a prova!
2. **Desliguem/Guardem** os **celulares e relógios** (Smart Watch);
3. Não é permitida a utilização de folhas (A4, caderno e etc) extras.
4. É vedada a utilização de qualquer material/dispositivo de apoio extra.
5. Você deverá escrever a resolução das questões de maneira clara e objetiva. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.
6. Caso seja neccessário sair para ir ao banheiro durante a realização da prova, a(o) estudante deverá obrigatoriamente deixar seu telefone sob os cuidados da(o) apliador da prova até seu regresso a sala; **Não se admitirá múltiplas saídas**!
7. **Advertência importante:** Cada exercício foi proposto para ser resolvido/escrito em no máximo 20 minutos, caso você demore mais do que o esperado, aconcelhamos tentar a resolução do exercício seguinte (anterior) a fim de administrar bem o seu tempo de prova!

As questões da prova estão na próxima página.

BOA SORTE E SUCESSO A TODA(O)S!

Q1. **(3 pontos)** Utilizando uma técnica de integração apropriada resolva as integrais indefinidas:

(a) **(1 ponto)** $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx.$

(b) **(1 ponto)** $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos^4(x)\,dx.$

(c) **(1 ponto)** $\displaystyle\int \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}dx.$

Solução:

(a) Utilizemos a seguinte **substituição**:

$$x^2 = u\checkmark \quad \Rightarrow \quad 2xdx = du.\checkmark$$

Assim,

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int ue^u\,du.\checkmark$$

Agora, procederemos via **integração por partes** com

$$f = u \quad \text{e} \quad g' = e^u\checkmark \quad \Rightarrow \quad f' = 1 \quad \text{e} \quad g = e^u.\checkmark$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int ue^u\,du &= \frac{1}{2}\left(ue^u\checkmark - \int e^u\,du\checkmark\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(ue^u - e^u\right)\checkmark + \mathrm{C}\checkmark \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + \mathrm{C}\checkmark, \end{aligned}$$

em que $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(b) Observe que podemos reescrever a integral como:

$$\mathfrak{I} = \int \sin^3(x)\cos^4(x)\,dx = \int \sin^2(x)\cos^4(x)\sin(x)\,dx.\checkmark$$

Neste ponto, façamos a seguinte **substituição trigonométrica**:

$$u = \cos(x)\checkmark \quad \Rightarrow \quad du = -\sin(x)\,dx\checkmark \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x)dx = -du$$

Recorde também que

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - u^2\checkmark$$

a qual fornecerá que

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \int (1-u^2)u^4\checkmark(-du)\checkmark \\ &= \int (u^6 - u^4)\,du \\ &= \frac{u^7}{7}\checkmark - \frac{u^5}{5}\checkmark + \mathrm{C}\checkmark \\ &= \tfrac{1}{7}\cos^7(x) - \tfrac{1}{5}\cos^5(x) + \mathrm{C}\checkmark, \end{aligned}$$

em que $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

(c) Utilizando **frações parciais** temos que encontrar constantes A, B, C tais que

$$\frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\checkmark = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$$
$$= \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+A+2C}{(x+2)(x^2+1)}\checkmark$$

ou seja, constantes satisfazendo o sistema linear:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=9 \\ A+2C=8\checkmark. \end{cases}$$

Resolvendo tal sistema, temos que $A=-2$, $B=2$ e $C=5\checkmark$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{9x+8}{x^3+2x+x+2}dx &= \int \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2x+5}{x^2+1}\right)dx\checkmark \\ &= \int \frac{-2}{x+2}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{5}{x^2+1}dx\checkmark \\ &= -2\ln(|x+2|)\checkmark + \ln(x^2+1)\checkmark + 5\arctan(x)\checkmark + \mathrm{C}\checkmark \\ &= \ln\left(\frac{x^2+1}{(x+2)^2}\right) + 5\arctan(x) + \mathrm{C}, \end{aligned}$$

em que $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

Ressaltamos que usamos na segunda integral acima a seguinte **mudança de variável**

$$w = x^2+1 \quad \Rightarrow \quad dw = 2xdx$$

Assim,

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{w}dw = \ln|w| = \ln(|x^2+1|) = \ln(x^2+1).$$

.5.5.5

Q2. **(2.5 pontos)** Considere a função $\mathbf{H} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{H}(x) = \int_{-x-1}^{x^2+1} 2te^{t^2} dt.$$

(a) **(1 ponto)** É verdade que $\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}(1)$? Justifique sua afirmação detalhadamente!

(b) **(1,5 pontos)** Obtenha utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo $\mathbf{H}'(x)$.

Solução:

(a) **Afirmação:** Temos de fato $\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}(1) = 0$!

Com efeito, ao fazermos $x = 0$ e $x = 1$ diretamente na definição de $\mathbf{H}$, temos que

$$\mathbf{H}(0) = \int_{-1✓}^{1✓} 2te^{t^2} dt \quad \text{e} \quad \mathbf{H}(1) = \int_{-2✓}^{2✓} 2te^{t^2} dt,$$

Agora, observemos que a função $f(t) = 2te^{t^2}$ é ÍMPAR✓, i.e.,

$$f(-t) = f(t)✓ \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Desta forma, recorde que sua integral em um intervalo simétrico do tipo $[-a, a]$✓ (para qualquer $a > 0$) é sempre zero✓. Em particular,

$$\mathbf{H}(0) = \int_{-1}^{1} 2te^{t^2} dt = 0✓ = \int_{-2}^{2} 2te^{t^2} dt = \mathbf{H}(1)✓,$$

Solução alternativa: Seja $a > 0$ fixado, mostraremos que

$$\mathfrak{I} = \int_{-a}^{a} 2te^{t^2} dt = 0.$$

De fato, podemos utilizar a seguinte mudança de variáveis:

$$u = t^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2tdt.$$

Além disso,

$$\text{Se } t = -a, \quad \text{então } u = a^2 \quad \text{e} \quad \text{se } t = a, \quad \text{então } u = a^2.$$

Logo, temos que

$$\int_{-a}^{a} 2te^{t^2} dt = \int_{a^2}^{a^2} e^u du = 0.$$

Portanto, como a análise acima é arbitrária para o parâmetro $a > 0$, podemos concluir que

$$\mathbf{H}(0) = \int_{-1}^{1} 2te^{t^2} dt = 0 = \int_{-2}^{2} 2te^{t^2} dt = \mathbf{H}(1).$$

(b) Definimos a função $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^x 2te^{t^2}\,dt \checkmark$ (para um valor de $a \in \mathbb{R}$ fixado) e observe que

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(x) &= \int_{-x-1}^{x^2+1} 2te^{t^2}\,dt \\
&= \int_{-x-1}^{a} 2te^{t^2}\,dt \checkmark + \int_{a}^{x^2+1} 2te^{t^2}\,dt \checkmark \\
&= \int_{a}^{x^2+1} 2te^{t^2}\,dt - \int_{-x-1}^{a} 2te^{t^2}\,dt \checkmark \\
&= \mathrm{F}(x^2+1) \checkmark - \mathrm{F}(-x-1) \checkmark .
\end{aligned}$$

Desta forma, utilizando-se a Regra da Cadeia temos que

$$\mathbf{H}'(x) = \mathrm{F}'(x^2+1) \checkmark (x^2+1)' \checkmark - \mathrm{F}'(-x-1) \checkmark (-x-1)' \checkmark = 2x\mathrm{F}'(x^2+1) \checkmark + \mathrm{F}'(-x-1) \checkmark .$$

Além disso, devido ao Teorema Fundamental do Cálculo (Parte I), tem-se que

$$\mathrm{F}'(x) = 2x \checkmark e^{x^2} \checkmark .$$

Portanto, ao combinarmos as sentenças acima obtemos que

$$\mathbf{H}'(x) = 4x(x^2+1)e^{(x^2+1)^2} - 2(x+1)e^{(x+1)^2} . \checkmark$$

Q3. **(2 pontos)** Discuta a convergência ou divergência da integral imprópria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Em caso afirmativo, obtenha precisamente o valor de tal integral.

Dica: Observe que $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ é uma função par.

Solução:

Primeiramente, dado que $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ é uma função par, temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = 2\checkmark \int_{0\checkmark}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Agora, pela definição de integral imprópria, temos que

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \checkmark \int_{0}^{t\checkmark} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Assim, aplicando a mudança de variavel $u = e^x\checkmark$, tem-se que $du = e^x\,dx\checkmark$ e $e^{2x} = u^2\checkmark$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}\int_{0}^{t} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx &= \int_{1\checkmark}^{e^t\checkmark} \frac{1}{u^2+1}\,du\checkmark \\ &= \arctan(u)\Big|_{u=1}^{u=e^t}\checkmark \\ &= \arctan(e^t)\checkmark - \arctan(1)\checkmark.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\overset{\nearrow\infty\checkmark}{\arctan(e^t)} - \arctan(1)\right]\checkmark = \frac{\pi}{2}\checkmark - \frac{\pi}{4}\checkmark = \frac{\pi}{4}\checkmark,$$

mostrando assim que a integral imprópria é convergente$\checkmark$.

Concluímos desta forma que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\checkmark.$$

Q4. (**pontos)** Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = x + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

(a) **(0,5 pontos)** Determine os pontos de interseção de f e g;

(b) **(0,5 pontos)** Esboce o desenho da região delimitada pelos gráficos de f e g;

(c) **(1,5 pontos)** Determine a área da região delimitada pelos gráficos de f e g (Justifique os detalhes).

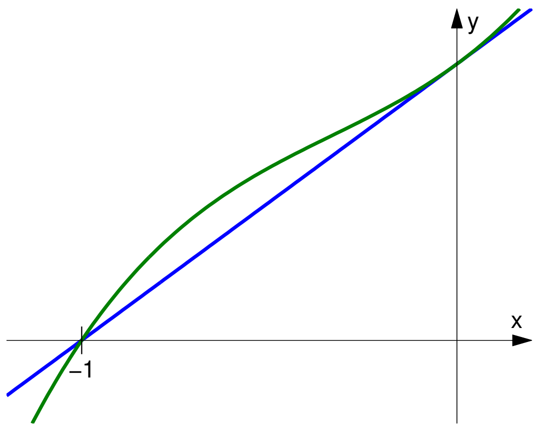
Solução:

(a) Observe que as funções se interceptam quando

$$x + 1 = x^3 + x^2 + x + 1\checkmark \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^3 + x^2\checkmark \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x+1) = 0\checkmark,$$

i.e., em $x = 0\checkmark$ e $x = -1\checkmark$.

(b) A descrição da região entre os gráficos é dada por:



Ponto $(-1, 0)\checkmark$. Ponto $(0, 1)\checkmark$. Reta $y = x + 1\checkmark$. $g > f\checkmark$. Exatamente dois pontos de interseção$\checkmark$.

(c) No intervalo $(-1, 0)$ temos que

$$x + 1 < x^3 + x^2 + x + 1\checkmark.$$

A título de elucidação, em $x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0)\checkmark$, temos

$$-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\checkmark < \checkmark - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}.\checkmark$$

Com as informações acima, temos que a área da região entre os gráficos é dada pela seguinte integral definida:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \int_{-1\checkmark}^{0\checkmark} [x^3 + x^2 + x + 1 - (x+1)]\checkmark\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2) dx\checkmark = \left(\frac{x^4}{4}\checkmark + \frac{x^3}{3}\checkmark \right) \Bigg|_{x=-1}^{x=0} \\
&= 0\checkmark - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right)\checkmark = \frac{1}{12}\checkmark \text{ unidades de área.}\checkmark
\end{aligned}$$