IMECC/UNICAMP
MA111 - Cálculo I
Prova P2
24 de maio de 2024 - 10:00 às 12:00

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2,5	3	2,5	10
Nota:					

Instruções para a realização de sua prova:

1. Usar caneta azul/preta ou lápis/grafite de cor escura. Não desgrampear a prova!
2. **Desliguem/Guardem** os **celulares e relógios** (Smart Watch);
3. Não é permitida a utilização de folhas (A4, caderno e etc) extras.
4. É vedada a utilização de qualquer material/dispositivo de apoio extra.
5. Você deverá escrever a resolução das questões de maneira clara e objetiva. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.
6. Caso seja neccessário sair para ir ao banheiro durante a realização da prova, a(o) estudante deverá obrigatoriamente deixar seu telefone sob os cuidados da(o) apliador da prova até seu regresso a sala; **Não se admitirá múltiplas saídas**!

As questões da prova estão na próxima página.

BOA SORTE E SUCESSO A TODA(O)S!

Q1. (**pontos)** Calcule os seguintes limites (Justifique todos os detalhes):

(a) **(1 ponto)** $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)$

(b) **(1 ponto)** $\lim_{x\to \frac{5}{2}}\frac{\cos(\frac{\pi}{5}x)}{\operatorname{sen}\left[\pi(x-\frac{1}{2})\right]}$

Solução:

(a) Observe que temos uma forma indeterminada, do tipo

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right) = \text{"}+\infty-\infty\text{"}.(0{,}1 \text{ ponto})$$

Por outro lado, ao fazermos as operações algébricas pertinentes obtemos uma nova forma indeterminada:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)} = \left(\frac{0}{0}\right).(0{,}1 \text{ ponto})$$

Neste contexto podemos aplicar a Regra de L'Hôpital, duas vezes, assim que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)}\\
&\overset{\text{Regra L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}(0{,}2 \text{ ponto})\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-x}{x+1}}{\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{(x+1)\ln(x+1)+x} = \left(\frac{0}{0}\right)\ (0{,}1 \text{ ponto})\\
&\overset{\text{Regra L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\ln(x+1)+1+1}\ (0{,}2 \text{ ponto})\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\ln(x+1)+2}\\
&= -\tfrac{1}{2}.(0{,}3 \text{ ponto})
\end{aligned}$$

Alternativamente, outras operações algébricas fornecem a forma indeterminada

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(x+1)}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}-1\right)(0{,}1 \text{ ponto})$$

O limite da fração entre os parênteses é do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Aplicando a Regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x} \overset{\text{Regra L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1(0{,}2 \text{ ponto})$$

(Ou mudança de variável $t=x+1$ e reconhecer o limite fundamental $\lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=1$.)

Portanto, o limite original também é do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Podemos usar a Regra de L'Hôpital para obter

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(x+1)}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}-1\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(x+1)}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}-1\right)\\
&\overset{\text{Regra L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\frac{1}{x+1}x-\ln(x+1)\cdot 1}{x^2}}{\frac{1}{x+1}}(0{,}3 \text{ ponto})\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}
\end{aligned}$$

Novamente, encontramos um limite do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Podemos usar a Regra de L'Hôpital novamente para obter

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Regra L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}(x+1)}{2x} \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x} = -\frac{1}{2}\text{(0,3 ponto)} \end{aligned}$$

onde fizemos uso do limite calculado acima

(b) Note que temos uma forma indeterminada, do tipo

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{5}x)}{\operatorname{sen}\left[\pi(x-\frac{1}{2})\right]} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}(2\pi)} = \left(\frac{0}{0}\right).\text{(0,2 ponto)}$$

Desta forma, aplicamos a Regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{5}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{5}x)}{\operatorname{sen}\left[\pi(x-\frac{1}{2})\right]} &\overset{\text{Regra L'H}}{=} \lim_{x\to\frac{5}{2}} \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}x\right)\frac{\pi}{5}}{\cos[\pi(x-\frac{1}{2})]\pi}\text{(0,4 ponto)} \\ &= \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(2\pi)}\frac{1}{5} \\ &= -\frac{1}{5}.\text{(0,4 ponto)} \end{aligned}$$

Q2. (2,5 pontos) Encontre as equações das retas tangente e normal no ponto $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ à seguinte curva (definida implicitamente):

$$\cos(y - x) = (y \operatorname{sen} x)^2.$$

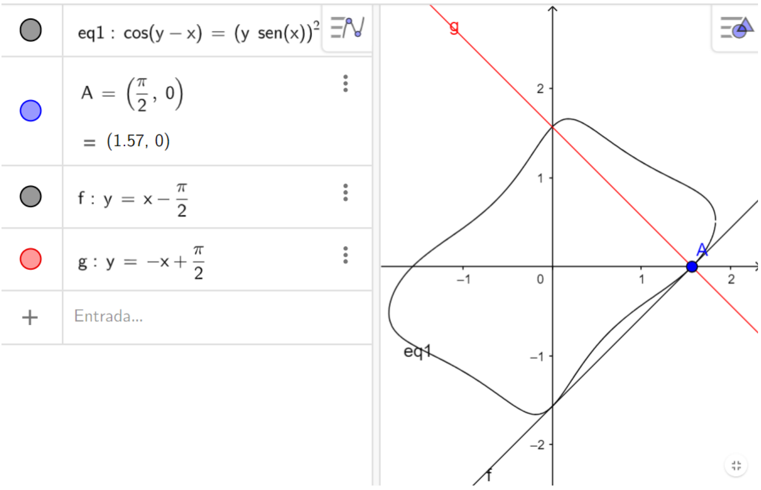

Figura 1: Esboço (local) da curva $\cos(y - x) = (y \operatorname{sen} x)^2$

Solução:

Como a curva não esta escrita na forma expliícita, vamos utilizar derivação implícita (0,1 ponto). Com efeito, calcularemos $y' = dy/dx$ usando a Regra da Cadeia

$$-\operatorname{sen}(y - x) \cdot (y' - 1) = 2y \operatorname{sen} x(y' \operatorname{sen} x + y \cos x), \text{ (0,5 ponto)}$$

e portanto

$$y'(x) = \frac{\operatorname{sen}(y - x) - 2y^2 \cos x \operatorname{sen} x}{2y \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}(y - x)}. \text{(0,5 ponto)}$$

Agora, avaliando a derivada dy/dx no ponto $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$, obtemos

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{-1} = 1. \text{ (0,2 ponto)}$$

Portanto, a equação da reta tangente à curva no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ é

$$y - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y - 0 = 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ou seja} \quad y = x - \frac{\pi}{2}. \text{ (0,5 ponto)}$$

Por fim, recorde que a inclinação da reta normal no ponto $(\frac{\pi}{2}, 0)$ é dado por:

$$m_N = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1 \text{ (0,2 ponto)}$$

Desta forma, a equação da reta normal à curva no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ é

$$y - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y - 0 = -1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + \frac{\pi}{2}. \text{ (0,5 ponto)}$$

Q3. **(3 pontos)** Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+3}$ com derivadas $f'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+3)^2}$ e $f''(x) = -24\dfrac{x^2-1}{(x^2+3)^3}$, considerando-se:

- ✓ O domínio;
- ✓ Interseção com os eixos coordenados;
- ✓ Assíntotas horizontais;
- ✓ Extremos locais (i.e., máximos e mínimos locais);
- ✓ Intervalos de crescimento/decrescimento;
- ✓ Intervalos onde a concavidade é voltada para cima/baixo;
- ✓ Pontos de inflexão.

Finalmente, após o esboco do gráfico, determine o conjunto imagem de f.

Solução:

1. **Domínio da função:** Observamos que o denominador satisfaz
$$x^2+3>0 \quad \text{para todo} \quad x\in\mathbb{R}$$
Portanto, f existe e é bem definida para todo $x\in\mathbb{R}$. Assim, $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$. (0,2 ponto)

2. **Interseção com os eixos:** Veja que $f(0)=\dfrac{0-1}{0+3}=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow$ intersecta com a ordenada em $(0,-\frac{1}{3})$ (0,2 ponto)

   Agora, $f(x)=0$ quando $x^2=1$, i.e., em $x=\pm1$
   $\Rightarrow$ Assim, f intersecta com a abscissa em $(-1,0)$ e $(1,0)$. (0,2 ponto)

3. **Assíntotas horizontais**: Veja que
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-1/x^2}{1+3/x^2}=\frac{1-0}{1+0}=1 \text{ (0,2 ponto)}$$
Assim, a reta $y=1$ é a única assíntota horizontal de f quando $x\to\pm\infty$.

4. **Extremos**: f' existe para todo $x\in\mathbb{R}$. Portanto, os pontos críticos da função são aqueles onde
$$f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}=0, \quad \text{i.e.,} \quad \text{somente } x=0.\text{(0,2 ponto)}$$
Observamos ainda que neste ponto,
$$f''(0)=\frac{-24(0-1)}{(0+3)^2}>0,$$
o que implica que a função possua um **mínimo local** neste ponto segundo o **Teste da Segunda Derivada**. (0,4 ponto)

5. **Intervalos de crescimento/decrescimento**:
Dado que $(x^2+3)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

e

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$$

Portanto,

✓ f é crescente em $(0, \infty)$ (0,2 ponto);

✓ f é decrescente em $(-\infty, 0)$.(0,2 ponto)

6. **Pontos de inflexão**: Notamos que f'' também existe para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, os pontos críticos da derivada são aqueles onde

$$f''(x) = \frac{-24(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = 0, \quad \text{que são os pontos} \quad x = \pm 1.\text{(0,2 ponto)}$$

A análise do sinal de $f''(x)$ mostra que

✓ $f''(-2) = \dfrac{-24(4-1)}{(4+3)^3} < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \forall x < -1;$

✓ $f''(0) = \dfrac{-24(0-1)}{(0+3)^3} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \forall -1 < x < 1;$

✓ $f''(2) = \dfrac{-24(4-1)}{(4+3)^3} < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \forall x > 1.$

ou seja, como o sinal de f'' muda em $x = -1$ e em $x = 1$, ambos são pontos de inflexão. (0,4 ponto)

Esboço do gráfico: Com estas informações, notamos que a interseção da função com a ordenada é o mínimo (×) e as interseções com a abscissa são os pontos de inflexão (×) e esboçamos (0,4 ponto)

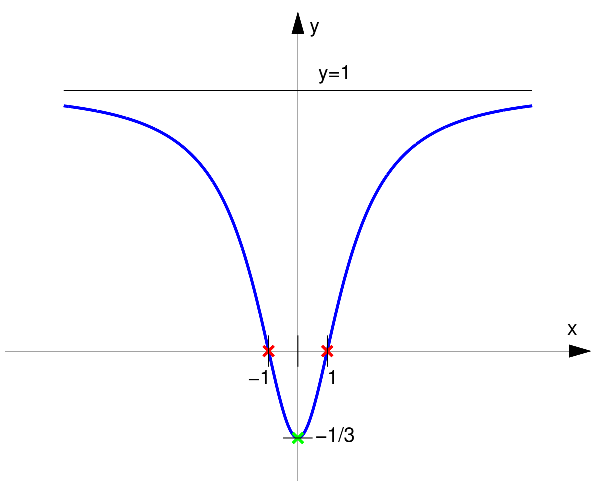

Imagem de f: Por fim, notamos que a imagem é $\text{Im}(f) = [-\frac{1}{3}, 1)$. (0,2 ponto)

Q4. (2,5 pontos) Encontre as dimensões do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r. Qual o valor da área de tal retângulo (maximal) quando $r = \sqrt{10}$?

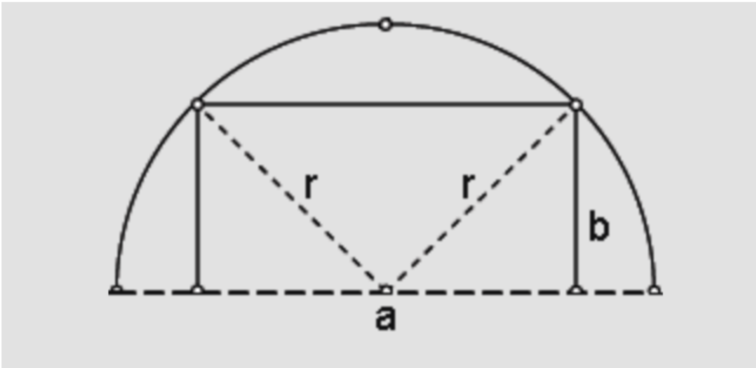

Figura 2: Representação do retângulo de lados **a** e **b** inscrito em um semicírculo de raio **r**.

Solução:

Sejam **r** o raio da circunferência, e, **a** e **b** os lados do retângulo inscrito na semicircunferência.

Sabemos que a área do retângulo é dada por:

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} \text{ (0,2 ponto)}$$

Agora, usando o Teorema de Pitágoras obtemos que

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{b}^2 + \frac{\mathbf{a}^2}{4},$$

em outras palavras,

$$\mathbf{a} = \pm\sqrt{4(\mathbf{r}^2 - \mathbf{b}^2)}, \text{ (0,2 ponto)}$$

e como **a** repesenta uma quantidade geométrica, então devemos descartar a expressão $\mathbf{a} = -\sqrt{4(\mathbf{r}^2 - \mathbf{b}^2)}$.

Logo, temos que

$$A(\mathbf{b}) = \mathbf{b}.\sqrt{4(\mathbf{r}^2 - \mathbf{b}^2)},$$

a qual é uma função contínua apenas da variável **b**, para $0 \leq \mathbf{b} \leq r$, i.e., $\text{Dom}(A) = [0, \mathbf{r}]$. (0,3 ponto)

Observe que se $\mathbf{b} = 0$ ou $\mathbf{b} = \mathbf{r}$, então temos retângulos "degenerados".

Pontos Críticos em $0 < \mathbf{b} < \mathbf{r}$: Vamos estudar os pontos críticos da função

$$A(\mathbf{b}) = b.\sqrt{4(\mathbf{r}^2 - \mathbf{b}^2)}$$

Para tal propósito devemos analisar a equação:

$$0 = A'(\mathbf{b}) = \sqrt{4(\mathbf{r}^2 - \mathbf{b}^2)} - \frac{4\mathbf{b}}{\sqrt{4(\mathbf{r}^2 - \mathbf{b}^2)}} = \frac{4\mathbf{r}^2 - 8\mathbf{b}^2}{\sqrt{4(\mathbf{r}^2 - \mathbf{b}^2)}}. \text{(0,2 ponto)}$$

Assim,

$$0 = A'(\mathbf{b}) \quad \Leftrightarrow \quad 4\mathbf{r}^2 - 8\mathbf{b}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} = \pm\frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2},$$

e devemos descartar o valor $\mathbf{b} = -\frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2}$ pelo mesmo motivo acima citado. (0,2 ponto)

Classificação do ponto crítico interior: Note que $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2}$ é um ponto de máximo local para a função A, pois

✓ A é estritamente crescente, i.e., $A'(\mathbf{b}) > 0$ se $0 < \mathbf{b} < \frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2}$; (0,2 ponto)

✓ A é estritamente decrescente, i.e., $A'(\mathbf{b}) < 0$ se $\frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2} < \mathbf{b} < \mathbf{r}$. (0,2 ponto)

Logo, pelo **Teste da Primeira Derivada** temos que $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2}$ é **máximo local** de A em $(0, \mathbf{r})$.

Agora, para encontrar o maior área, basta comparar o valor da função A em $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2}$ e nos extremos do intervalo de definição de A, i.e., $\mathbf{b} = 0$ e $\mathbf{b} = \mathbf{r}$. Desta forma,

$$A(0) = 0, \quad A\left(\frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2}\right) = \mathbf{b}.\sqrt{4\left(\mathbf{r}^2 - \left(\frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)} > 0 \quad \text{e} \quad A(\mathbf{r}) = 0. \text{ (0,3 ponto)}$$

(Alternativamente, pode-se observar que $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2}$ é o único ponto crítico no interior do invervalo $(0, \mathbf{r})$ e, por ser um máximo local, portanto o máximo global.)

Portanto, a área máxima ocorre quando temos as seguintes dimensões para o retângulo

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \sqrt{4\left(\mathbf{r}^2 - \left(\frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)} = \mathbf{r}\sqrt{2}. \text{(0,3 ponto)}$$

i.e.,

$$A(\mathbf{b}_{\text{Máx}}) = A\left(\frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2}\right) = \mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{r}\sqrt{2}.\frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{2} = \mathbf{r}^2 \text{ unidades de área.(0,2 ponto)}$$

Portanto, se $\mathbf{r} = \sqrt{10}$, então o maior (ou seja de área máxima) retângulo inscrito no semicírculo terá área $A = (\sqrt{10})^2 = 10\,\text{u.a.}$ (0,2 ponto)