ME106 - Laboratório de Estatística N2

Profas.: Hildete Pinheiro

Quarta Lista de Exercícios

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2003

Entrega: dia 23/09/03

Teorema 1 Seja $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ uma amostra aleatória simples, retirada de uma distribuição normal padronizada N(0,1). Então, a variável

$$Y = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

tem distribuição qui-quadrado, com n graus de liberdade, ou seja, $Y \sim \chi_n^2$.

Teorema 2 Seja Z uma v.a. N(0,1) e Y uma χ_ν^2, com Z e Y independentes. Então, a variável

$$t = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$$

tem distribuição *t de Student*, com ν graus de liberdade (i.e., t_ν).

Para ν muito grande, podemos aproximar a distribuição *t de Student* para a distribuição N(0,1).

Teorema 3 Seja $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ uma amostra aleatória retirada de uma população normal N(0,1), então:

(i) $\bar{Z}$ tem distribuição N(0,1/n);

(ii) as variáveis $\bar{Z}$ e $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$ são independentes;

(iii) $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$ tem distribuição $\chi^2_{(n-1)}$.

Como consequência dos Teoremas 2 e 3 temos que $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$

1. Gere 10 amostras, de tamanho 500 cada uma, de uma distribuição N(0,1). Se $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{10}$ são as variáveis N(0,1) que você gerou, crie agora as variáveis $X_i = Z_i^2$. Em outra coluna crie uma variável $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$. Faça um histograma de um dos Z's, outro de um dos X's e outro de Y. Comente sobre as diferenças entre os gráficos.

2. Gere 500 observações de uma distribuição Normal com média 0 e variância 1. Chame essa variável de Z. Gere também 500 observações de uma distribuição χ^2 com 10 graus de liberdade e chame essa variável de Y_1. Crie agora em outra coluna a variável $t_1 = \frac{Z}{\sqrt{Y_1/10}}$. Faça um histograma de t_1. Gere agora 500 observações de uma distribuição χ^2 com 150 graus de liberdade e chame essa variável de Y_2. Crie em outra coluna a variável $t_2 = \frac{Z}{\sqrt{Y_2/150}}$ e faça o histograma de t_2.

3. Num mesmo gráfico mostre a distribuição de Z e t_2 da questão 2.

4. Dado um teste de hipótese sobre o parâmetro p da distribuição Binomial, denomina-se função poder do teste a função $\mathcal{P}(p) = P(\text{rejeitar } \mathsf{H} \mid p),\ \forall\, p \in [0,1]$. Suponha agora que estamos testando $\mathsf{H}_0 : p = 0,5$ contra $\mathsf{H}_A : p \neq 0,5$. Suponha também que para uma amostra de tamanho $n = 10$ decidimos pela região crítica $C = \{0,1,2,8,9,10\}$. Determine o poder para $p = 0,2$; $p = 0,4$; $p = 0,6$ e $p = 0,8$. Faça um gráfico de $\mathcal{P}(p)$ contra p. Qual o poder do teste para p=0,5?

5. Uma companhia de cigarros anuncia que o índice médio de nicotina dos cigarros que fabrica apresenta-se abaixo de 23 mg por cigarro. Um laboratório realiza 6 análises desse índice, obtendo 27,24,21,25,26,22. Sabe-se que o índice de nicotina se distribui normalmente com variância igual a $4,86\ mg^2$. Pode-se aceitar, ao nível de siginificância de 10%, a afirmação do fabricante?

6. Um pesquisador está estudando a resistência de um determinado material sob determinadas condições. Ele sabe que essa variável é normalmente distribuída com desvio padrão de 2 unidades.
(a) Utilizando os valores 4,9; 7,0; 8,1; 4,5; 5,6; 6,8; 7,2; 5,7; 6,2 unidades, obtidos de uma amostra de tamanho 9, determine o intervalo de confiança para a resistência média com um coeficiente de confiança $\gamma = 0,90$.
(b) Suponha que no item (a) não fosse conhecido o desvio padrão. Como você procederia para determinar o intervalo de confiança?

7. Deseja-se estimar qual a porcentagem média da receita familiar gasta com alimentação pelos moradores de uma grande vila industrial. Para isso, selecionou-se uma amostra de 16 famílias, que apresentou os seguintes resultados:

41	44	35	42	34	22	42	42
38	62	29	63	38	45	48	40

(a) Dê um IC de 95% para a porcentagem média de todas as famílias de moradores da vila.
(b) Que suposição você fez para responder a pergunta anterior?