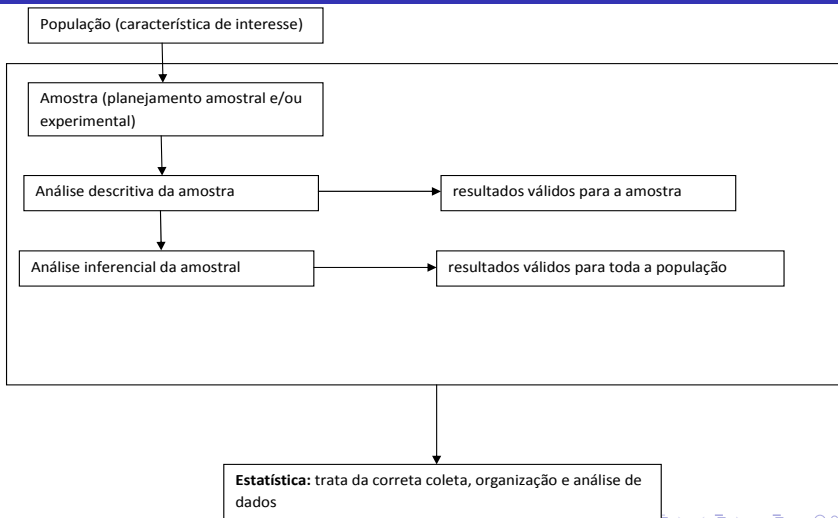


# Estatística (Análise de dados)



# Tipos de Variáveis

## Problema Motivador:

Um pesquisador está interessado em fazer um levantamento sobre aspectos sócio-econômicos dos empregados da seção de orçamentos de uma companhia (vide tabela).

Algumas variáveis como sexo, escolaridade e estado civil, têm como possíveis respostas uma descrição ou qualidade do indivíduo, e portanto são chamadas de **variáveis qualitativas**. Já variáveis como número de filhos e salário têm como possíveis respostas um número, um valor, uma quantidade, e portanto são chamadas de **variáveis quantitativas**.

# Variáveis

## Qualitativa

- Nominal

Não existe ordenação nas possíveis categorias de resposta (ex: sexo, estado civil)

- Ordinal

Existe uma certa ordem nas possíveis categorias de respostas (ex: escolaridade)

# Tipos de Variáveis

## Quantitativa

### ■ Discreta

Os possíveis valores formam um conjunto finito ou enumerável de números, são variáveis de contagem (ex: número de filhos)

### ■ Contínua

Os possíveis valores estão pertencem à um intervalo, aberto ou fechado, dos números reais (ex: peso de um indivíduo)

# Distribuição de Frequências (DF)

- Objeto de estudo: variável (ex: peso)
- Elementos para construir uma DF: realizações (valores observados) da variável
- Objetivo conhecer a distribuição dessa variável (aleatória)

# Distribuição de Frequências

- Exemplo: Grau de escolaridade (variável qualitativa ordinal)

# total de empregados = 36

# empregados com Ensino Fundamental = 12

# empregados com Ensino Médio = 18

# empregados com Ensino Superior = 6

# Distribuição de Frequências

| Grau de Instrução  | Frequência ( $n_i$ ) | Proporção ( $f_i$ ) | % ( $100 \times f_i$ ) |
|--------------------|----------------------|---------------------|------------------------|
| Ensino Fundamental | 12                   | 0.3333              | 33.33                  |
| Ensino Médio       | 18                   | 0.5000              | 50.00                  |
| Ensino Superior    | 6                    | 0.1667              | 16.67                  |
| Total              | 36                   | 1.0000              | 100.00                 |

$$f_i = \frac{n_i}{36}$$

# Distribuição de Frequências

- Exemplo: Salário (variável quantitativa contínua)

Agrupar os dados por faixas de valores

# total de empregados = 36

# empregados com salário na faixa 4.00-8.00 = 10

# empregados com salário na faixa 8.00-12.00 = 12

# empregados com salário na faixa 12.00-16.00 = 8

# empregados com salário na faixa 16.00-20.00 = 5

# empregados com salário na faixa 20.00-24.00 = 1



# Distribuição de Frequências

| Faixa salarial | Frequência ( $n_i$ ) | Proporção ( $f_i$ ) | % ( $100 \times f_i$ ) |
|----------------|----------------------|---------------------|------------------------|
| 4.00-8.00      | 10                   | 0.2778              | 27.78                  |
| 8.00-12.00     | 12                   | 0.3333              | 33.33                  |
| 12.00-16.00    | 8                    | 0.2222              | 22.22                  |
| 16.00-20.00    | 5                    | 0.1389              | 13.89                  |
| 20.00-24.00    | 1                    | 0.0278              | 2.78                   |
| Total          | 36                   | 1.0000              | 100.00                 |

$$f_i = \frac{n_i}{36}$$

# Distribuição de Frequências

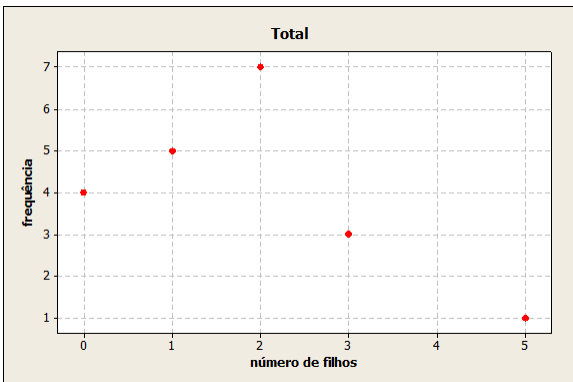
- Escolha dos intervalos: arbitrária ou seguindo algum indicador
  - um número pequeno de classes → perda de informação
  - um número grande de classes → perda da visão geral dos dados como um conjunto
  - sugestão: 5 a 15 classes com a mesma amplitude
  - $\sqrt{(n)}$
  - Regrea de Sturges:  $\ln(n)$

# Representação Gráfica das Variáveis Quantitativas

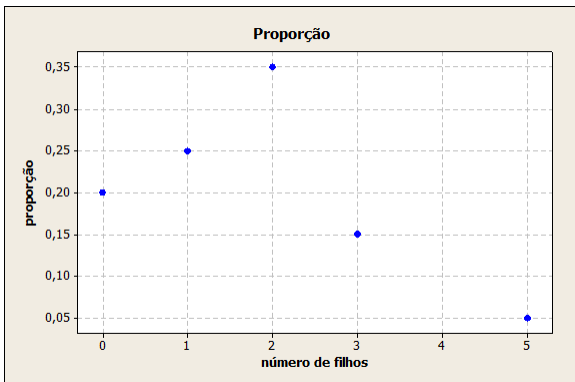
- Objetivo: estudar a distribuição de frequências de uma variável
- Exemplo: número de filhos dos empregados casados

| Número de filhos ( $x_i$ ) | Frequência ( $n_i$ ) | Proporção ( $f_i$ ) | % ( $100 \times f_i$ ) |
|----------------------------|----------------------|---------------------|------------------------|
| 0                          | 4                    | 0.20                | 20                     |
| 1                          | 5                    | 0.25                | 25                     |
| 2                          | 7                    | 0.35                | 35                     |
| 3                          | 3                    | 0.15                | 15                     |
| 5                          | 1                    | 0.05                | 5                      |
| Total                      | 20                   | 1.0000              | 100.00                 |

# Representação Gráfica de Variáveis Quantitativas



# Representação Gráfica de Variáveis Quantitativas

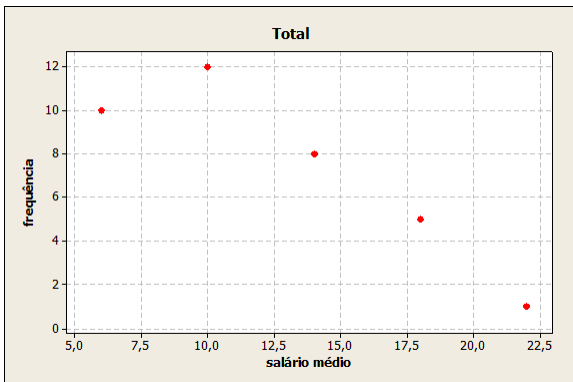


# Representação Gráfica de Variáveis Contínuas

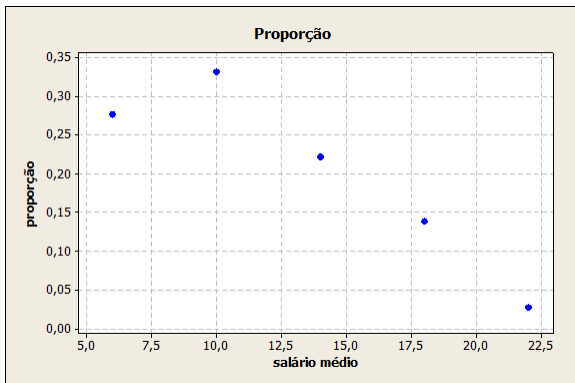
- Dados de salário: são utilizados os pontos médios das faixas salariais

| Salário médio | Frequência ( $n_i$ ) | Proporção ( $f_i$ ) | % ( $100 \times f_i$ ) |
|---------------|----------------------|---------------------|------------------------|
| 6.00          | 10                   | 0.2778              | 27.78                  |
| 10.00         | 12                   | 0.3333              | 33.33                  |
| 14.00         | 8                    | 0.2222              | 22.22                  |
| 18.00         | 5                    | 0.1389              | 13.89                  |
| 22.00         | 1                    | 0.0278              | 2.78                   |
| Total         | 36                   | 1.0000              | 100.00                 |

# Representação Gráfica de Variáveis Contínuas



# Representação Gráfica de Variáveis Contínuas





# Representação Gráfica de Variáveis Contínuas

- Melhor representação dos dados: Histograma
- Associa a frequência aos intervalos de valores, e não mais ao ponto médio



# Representação Gráfica de Variáveis Contínuas

- Ramo e Folhas
- Objetivo: obter informação da distribuição dos dados
- Característica: Não perde informação sobre os dados
- Cada informação é dividida em duas partes: a primeira (ramo) é colocada à esquerda da linha vertical, e a segunda (folhas) à direita

# Representação Gráfica de Variáveis Contínuas

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 4  | 00 | 56 |    |    |
| 5  | 25 | 73 |    |    |
| 6  | 26 | 66 | 86 |    |
| 7  | 39 | 44 | 59 |    |
| 8  | 12 | 46 | 74 | 95 |
| 9  | 13 | 35 | 77 | 80 |
| 10 | 53 | 76 |    |    |
| 11 | 06 | 59 |    |    |
| 12 | 00 | 79 |    |    |
| 13 | 23 | 60 | 85 |    |
| 14 | 69 | 71 |    |    |
| 15 | 99 |    |    |    |
| 16 | 22 |    | 61 |    |
| 17 | 26 |    |    |    |
| 18 | 75 |    |    |    |
| 19 | 40 |    |    |    |
| 20 |    |    |    |    |
| 21 |    |    |    |    |
| 22 |    |    |    |    |
| 23 |    | 30 |    |    |

# Medidas de Posição

- Propósito: resumir os dados, através de valores que representem o conjunto de dados em relação à alguma característica (posição, dispersão)
- Medidas de posição central
  - Média aritmética ( $Me$ )
  - Mediana ( $Md$ )
  - Moda ( $Mo$ )

# Medidas de Posição

## Moda

- Resultado mais frequente, obtido em um conjunto de dados observados
- No exemplo do número de filhos,  $Mo = 2$
- É interessante notar que um conjunto de dados pode apresentar mais de uma moda, sendo então bimodal, trimodal, etc.

# Medidas de Posição

## Mediana

- Resultado que ocupa a posição central em um conjunto de dados ordenados de forma crescente
- Número ímpar de observações: utiliza-se a observação central
  - ex: 3, 4, 7, 8, 8
  - $Md = 7$
- Número par de observações: utiliza-se a média aritmética das duas observações centrais
  - ex: 3, 4, 7, 8, 8, 9
  - $Md = \frac{7+8}{2} = 7.5$

# Medidas de Posição

## Média

- Soma dos valores observados dividida pelo número total de observações
- ex: 3, 4, 7, 8, 8  $\rightarrow Me = \frac{3+4+7+8+8}{5} = \frac{30}{5} = 6$
- No exemplo do número de filhos  $Me = 1.65$
- Expressão geral

$$Me(X) = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$$

$x_1, \dots, x_k$  são os valores observados para uma variável de estudo  $X$

# Medidas de Posição

- Caso particular:

$n_1$  observações são iguais a  $x_1$

$n_2$  observações são iguais a  $x_2$

⋮

$n_k$  observações são iguais a  $x_k$

tal que:  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i = n$

$$Me(X) = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} x_i = \sum_{i=1}^k f_i x_i$$



# Medidas de Posição

- No exemplo do número de filhos

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = 4, \quad x_1 = 0 \\ n_2 = 5, \quad x_2 = 1 \\ n_3 = 7, \quad x_3 = 2 \\ n_4 = 3, \quad x_4 = 3 \\ n_5 = 1, \quad x_5 = 5 \end{array} \right\} n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i = n$$

então,

$$Me(X) = \frac{4 \times 0 + 5 \times 1 + 7 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 5}{20} = 1.65$$

# Medidas de Posição

## Análise 1

- Conjunto de dados  $D_1 = \{2, 2.5, 3, 4.3, 2.9\}$
- Ordenando de forma crescente  $D'_1 = \{2, 2.5, 2.9, 3, 4.3\}$
- $Md = 2.9$
- $Me = \frac{2+2.5+2.9+3+4.3}{5} = 2.94$

# Medidas de Posição

## Análise 2

- Conjunto de dados  $D_2 = \{2, 7, 3, 4.3, 2.9\}$
- Ordenando de forma crescente  $D'_2 = \{2, 2.8, 3, 4.3, 7\}$
- $Md = 3$
- $Me = \frac{2+2.8+3+4.3+7}{5} = 3.84$

# Medidas de Posição

## Observação

Na primeira e segunda análise a mediana tem valores próximos (2.9 e 3), no entanto, a média tem uma diferença de quase 1 unidade (2.94 e 3,84). Com isso em vista, podemos definir a propriedade de robustez da mediana.

A mediana é uma medida mais robusta que a média, quando submetida a mudanças nos valores observados, ou a incorporação de mais observações no conjunto de dados original.

# Medidas de Posição

## Análise 3

- Conjunto de dados  $D_3 = \{2, 2.5, 3, 4.3, 2.9, 7\}$
- Ordenando de forma crescente  $D'_3 = \{2, 2.5, 2.9, 3, 4.3, 7\}$
- $Md = \frac{2.9+3}{2}$
- $Me = \frac{2+2.5+2.9+3+4.3+7}{6} = 3.62$

# Medidas de Posição

## Comparação entre as Análise dos Conjuntos de dados

| Dados | Md   | Me   |
|-------|------|------|
| $D_1$ | 2.9  | 2.94 |
| $D_2$ | 3    | 3.84 |
| $D_3$ | 2.95 | 3.62 |

# Medidas de Dispersão

- Propósito: obter uma medida que represente a variabilidade, uma vez que conjuntos de dados diferentes podem apresentar uma mesma medida de posição.
- Por exemplo,  $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $B = \{5, 5, 5, 5, 5\}$  têm a mesma média:  $Me = 5$

# Medidas de Dispersão

- Desvio: afastamento de uma observação de uma determinada medida de posição

- ex:  $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$$Me = \bar{x} = 5$$

$$Desvios = \{3 - 5, 4 - 5, 5 - 5, 6 - 5, 7 - 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

- ex:  $B = \{5, 5, 5, 5, 5\}$

$$Me = \bar{x} = 5$$

$$Desvios = \{5 - 5, 5 - 5, 5 - 5, 5 - 5, 5 - 5\} = \{0, 0, 0, 0, 0\}$$



# Medidas de Dispersão

- Medidas "globais" de desvio na amostra de dados:

- $\sum_{i=1}^5 |x_i - \bar{x}|$

- $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2$

- Ambas as medidas evitam que desvios iguais em módulo, mas com sinais opostos, se anulem

- Desvio Médio

$$DM(X) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \bar{x}|}{n}$$

- Variância

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

# Medidas de Dispersão

- ex:  $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$$DM(A) = \frac{|-2|+|-1|+|0|+|1|+|2|}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$Var(A) = \frac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

- ex:  $B = \{5, 5, 5, 5, 5\}$

$$DM(A) = \frac{|0|+|0|+|0|+|0|+|0|}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$Var(A) = \frac{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

# Medidas de Dispersão

- Desvio Padrão

$$DP(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- ex:  $DP(A) = \sqrt{2} = 1.41$

- ex:  $DP(B) = \sqrt{0} = 0$

# Medidas Complementares para Análise de Dados

## ■ Extremos

O menor e o maior valor do conjunto de dados

## ■ Quartis ( $Q$ ) ou Juntas ( $J$ )

- 1º Quartil: deixa um quarto dos valores abaixo, e três quartos acima dele
- 2º Quartil = Mediana: deixa metade dos valores abaixo, e metade acima dele
- 3º Quartil: deixa três quartos dos valores abaixo, e um quarto acima dele

# Medidas Complementares para Análise de Dados

## ■ Exemplo: Variável Salário

- $Md = \frac{9.8+10.53}{2} = 10.17$

- $Q_1 = J_1 = \frac{7.44+7.59}{2} = 7.52$

- $Q_3 = J_3 = \frac{13.85+14.69}{2} = 14.27$

- $E_i = 4.00$  (menor valor)

- $E_s = 23.30$  (maior valor)

# Medidas Complementares para Análise de Dados

## Esquema dos Cinco Números

|    |       |       |
|----|-------|-------|
|    | 36    |       |
| Md | 10.17 |       |
| J  | 7.52  | 14.27 |
| E  | 4.00  | 23.30 |

Cada uma das componentes do esquema dos cinco números é uma medida robusta de dados, e é também uma estatística de ordem.

# Medidas Complementares para Análise de Dados

- Intervalo Interquartil: A medida de dispersão "intervalo interquartil" pode ser considerada uma medida robusta de dispersão.

$$d_J = J_3 - J_1 = Q_3 - Q_1$$

- No exemplo do salário:  $d_J = 14.27 - 7.52 = 6.75$

- Dispersão Inferior:  $J_2 - E_j$
- Dispersão Superior:  $E_s - J_2$

# Análise de dados

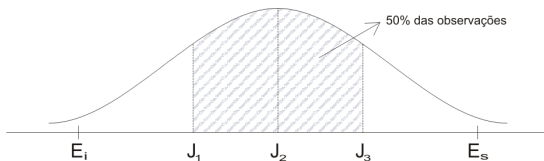
Se a distribuição dos dados que estudamos é simétrica, esperamos que:

- a distribuição inferior seja aproximadamente igual à superior

$$J_2 - E_i \approx E_s - J_2$$

- $J_2 - J_1 \approx J_3 - J_2$

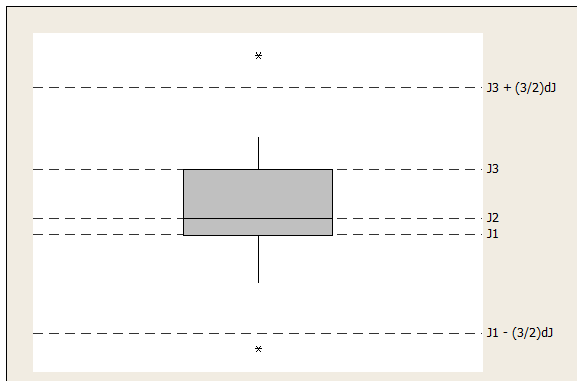
- $J_1 - E_i \approx E_s - J_3$





# Análise de dados

## Box Plot



# Análise de dados

- Os valores que estão muito distantes de  $J_1$  e  $J_3$  são chamados *outliers* (observações discrepantes)
  - observações menores que  $J_1 - \frac{3}{2}d_J$
  - observações maiores que  $J_3 + \frac{3}{2}d_J$
- A partir do retângulo, para cima e para baixo, seguem linhas até o ponto de observação mais remoto, que não seja outlier

# Análise de dados

- O desenho dá uma idéia de:
  - posição:  $J_1, J_2, J_3$
  - dispersão:  $d_J$
  - assimetria:  $J_3 - J_2; J_2 - J_1$
  - caudas: comprimento das linhas que seguem desde o retângulo
  - dados discrepantes:

# Análise de dados

## ■ Exemplo

$$J_1 = 7.52$$

$$E_i = 4.00$$

$$J_2 = 10.17$$

$$E_s = 23.30$$

$$J_3 = 14.27$$

$$d_J = 6.75$$

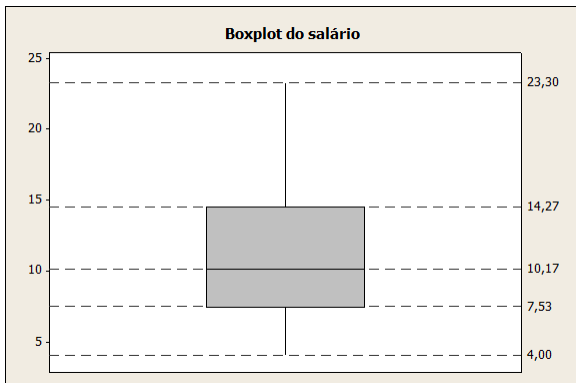
$$J_2 - J_1 = 2.65$$

$$J_3 - J_2 = 4.1$$

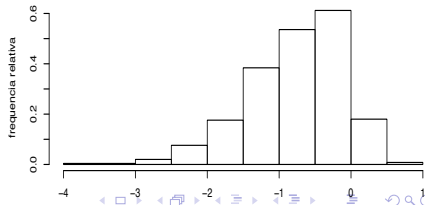
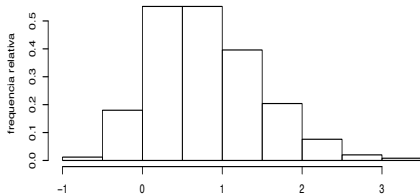
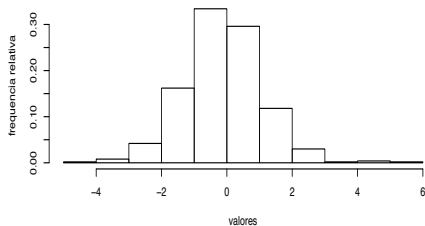
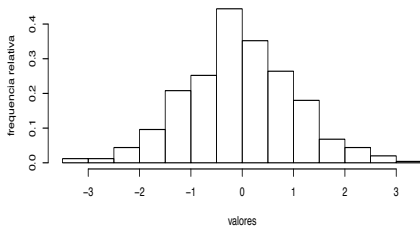
$$J_1 - \frac{3}{2}d_J = -2.605$$

$$J_3 + \frac{3}{2}d_J = 24.395$$

# Análise de dados



# Análise de dados



# Análise de dados

