Testes de Hipótese

Exemplo

Para decidirmos se os habitantes de uma ilha são descendentes da civilização **A** ou **B**, iremos proceder do seguinte modo:

(i) selecionamos uma amostra de 100 moradores adultos da ilha, e determinamos a altura média deles;

(ii) se essa altura média for superior a 176, diremos que são descendentes de **B**; caso contrário, são descendentes de **A**.

Os parâmetros das alturas das duas civilizações são:
A: $\mu = 175$ e $\sigma = 10$; **B**: $\mu = 177$ e $\sigma = 10$.

Exemplo

Defina: *Erro do tipo I* – dizer que os habitantes da ilha são descendentes de **B** quando, na realidade, são de **A**.
Erro do tipo II – dizer que são de **A** quando são de **B**.

(a) Qual a probabilidade do erro de tipo I? E do erro de tipo II?

(b) Qual deve ser a regra de decisão se quisermos fixar a probabilidade do erro de tipo I em 5%? Qual a probabilidade do erro de tipo II, nesse caso?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 329.

Testes de Hipótese

(a) Note que H_0 : moradores são de A, ou simplesmente $H_0 : \mu = 175$. Nossa região crítica é dada por $RC = \{\bar{X} > 176\}$, isto é, a região em que rejeitamos H_0.

O erro do tipo I é igual à probabilidade de rejeitarmos H_0 quando ela é verdadeira. Lembre-se que $\text{Var}(\bar{X})$ é σ^2/n. Então

$$P(\text{erro tipo I}) = P(\bar{X} > 176 \,|\, \mu = 175) =$$

$$P\left(Z > \sqrt{100}\left(\frac{176 - 175}{10}\right) \,\middle|\, \mu = 175\right) = 1 - \Phi(1) = 0.159$$

(a) De modo análogo, o erro de tipo II é a probabilidade de não rejeitarmos H_0 quando ela é falsa. Ela é dada por

$$P(\text{erro tipo II}) = P(\bar{X} \leq 176 \mid \mu = 177) =$$

$$P\left(Z \leq \sqrt{100}\left(\frac{176-177}{10}\right) \,\middle|\, \mu = 177\right) = \Phi(-1) = 0.159$$

Testes de Hipótese

(b) Queremos fixar c para que $P(\bar{X} > c | \mu = 175) = 0.05$. Para isto, basta que

$$P(\bar{X} > c|\mu = 175) = P\left(Z > \sqrt{100}\left(\frac{c - 175}{10}\right)\right)$$

$$= 1 - \Phi(c - 175) = 0.05$$

Note que $\Phi(z) = 0.95 \Leftrightarrow z = 1.64$ (obtemos esse valor consultando a tabela Normal), então temos que o erro do tipo I será igual a 0.05 se $(c - 175) = 1.64$ ou $c = 176.64$.

(b) Nossa nova regra de decisão agora é classificar o indivíduo como descendente de B se sua altura for superior a 176.64. Essa regra tem erro do tipo I fixado em 0.05. Mas, no entanto, temos agora um erro do tipo II de

$$P(\bar{X} \leq 176.64 | \mu = 177) = \Phi\left(\sqrt{100}\frac{176.64 - 177}{10}\right) = 0.359$$

Testes de Hipótese

Exemplo

A associação dos proprietários de indústrias metalúrgicas está muito preocupada com o tempo perdido com acidentes de trabalho, cuja média, nos últimos tempos, tem sido da ordem de 60 horas/homem por ano e desvio padrão de 20 horas/homem. Tentou-se um programa de prevenção de acidentes, após o qual foi tomada uma amostra de nove indústrias e medido o número de horas/homens perdidos por acidentes, que foi de 50 horas. Você diria, no nível de 5%, que há evidência de melhoria?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 334.

Testes de Hipótese

Queremos testar a hipótese que μ, o número médio de horas perdidas com acidentes de trabalho, tenha permanecido o mesmo. Ou seja, $H_0 : \mu = 60$ vs. $H_1 : \mu < 60$.

Como σ^2 é conhecido, então a estatística do teste é dada por

$$T = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\right)$$

Note que sob H_0, $\bar{X} \sim N(60, 400/9)$, e a distribuição da estatística do teste é portanto $N(0, 1)$. A região crítica é $T < c$.

Testes de Hipótese

Com um nível $\alpha = 0.05$, temos que a hipótese será rejeitada se

$$T = 3(\bar{X} - 60)/20 < c.$$

Para a normal padrão, $P(Z < c) = 0.05 \Leftrightarrow c = -1.64$. Então a região crítica é $3(\bar{X} - 60)/20 < -1.64$, ou simplesmente $\bar{X} < 49.06$.

Como a média observada $\bar{x} = 50$ é superior a 49.06, não rejeitamos a hipótese nula a 5% de significância. Ou seja, não há evidência a favor da hipótese de diminuição do número de acidentes.

Testes de Hipótese

Exemplo

O consumidor de um certo produto acusou o fabricante, dizendo que mais de 20% das unidades fabricadas apresentam defeito. Para confirmar sua acusação, ele usou uma amostra de tamanho 50, onde 27% das peças eram defeituosas. Moste como o fabricante poderia refutar a acusação. Utilize um nível de significância de 10%.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 337.

Testes de Hipótese

O fabricante **não** quer rejeitar a hipótese $H_0 : p = 0.2$ em favor da hipótese $H_1 : p > 0.2$. A região crítica é, portanto, da forma $\hat{p} > c$. A estatística do teste é

$$T = \sqrt{n}\left(\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}\right).$$

Note agora que para grandes amostras, a estatística tem distribuição aproximadamente Normal padrão.

Testes de Hipótese

Sob H_0, c é dado por

$$1 - \Phi\left(\sqrt{50}\frac{c - 0.2}{\sqrt{0.2 \cdot 0.8}}\right) = 0.1$$

O valor de z tal que $1 - \Phi(z) = 0.1$ é $z = 1.28$. Então

$$c = 1.28\frac{\sqrt{0.2 \cdot 0.8}}{\sqrt{50}} + 0.2 = 0.2724$$

Como podemos ver, a proporção de itens defeituosos obtida pelo consumidor não é significativamente diferente da probabilidade de 20% anunciada pelo vendedor, a 10% de significância, pois não é superior a 0.2724 (contra 0.27 observado).

Exemplo

Para se adequar a padrões internacionais, o engenheiro de processo em uma indústria de papéis quer assegurar que a produção de papelão esteja sob controle, produzindo folhas de papelão com peso médio de 700 gramas por metro quadrado. Para conferir essa hipótese, decide-se medir o peso numa amostra aleatória de 10 folhas. Ao final da experiência, obtém-se uma média amostral de 690.2 g/m^2 e uma variância de 2128.9 $(g/m^2)^2$.

Exemplo

Como a produção de papelão é complexa e envolve várias etapas, o engenheiro assume que os pesos das folhas se ajustam bem a uma distribuição Normal de probabilidade, mas ele não conhece a variabilidade. Com base nessas informações, ele deve rejeitar a hipótese que o processo está sob controle, a 0.05 de significância?

Quando a variância populacional é desconhecida, devemos usar a informação da variância amostral. Contudo, a variância amostral S^2 também está sujeita a flutuações amostrais (isto é, ela é uma variável aleatória) e a distribuição do teste não é mais Normal.

Queremos a hipótese $\mu = 700$ contra $\mu \neq 700$. A estatística do teste é

$$T = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\right)$$

Testes de Hipótese

Como σ é desconhecido, sob a hipótese nula a estatística do teste tem distribuição T de Student, com $n-1$ graus de liberdade. Os valores tabelados da distribuição encontram-se disponíveis no site da disciplina.

Note ainda que a hipótese alternativa é bicaudal, ou seja, $H_1 : \mu \neq 700$. Então rejeitamos H_0 se $|T| \geq t_{(1-\frac{\alpha}{2}),n-1}$, onde $t_{(1-\frac{\alpha}{2}),n-1}$ é o quantil da distribuição t. Dessa forma, para obter um erro do tipo I de 0.05, admite-se que quando a hipótese nula é verdadeira, podemos errar tanto "para cima" quanto "para baixo", com 0.025 de probabilidade em cada direção.

Testes de Hipótese

Temos que $s^2 = 2128.9$, logo $s = 46.14$. Para $\alpha = 0.05$, $1 - \alpha/2 = 0.975$. Então devemos olhar o quantil 0.975 da distribuição T com 9 graus de liberdade (pois $n = 10$).

Consultando a tabela, obtemos um valor igual a 2.262.

Tabela distribuição t-student

n denota os graus de liberdade
F *denota o valor da distribuição acumulada

Turmas coordenadas ME203, ME180, ME480 e ME414

UNICAMP, 1º semestre 2010

$n \setminus F$	0.75	0.9	0.95	$\boxed{0.975}$	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	[illegible]	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	[illegible]	6.965	9.925	31.599
3	0.765	1.638	2.353	[illegible]	4.541	5.841	12.924
4	0.741	1.533	2.132	[illegible]	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	[illegible]	3.365	4.032	6.869
6	0.718	1.440	1.943	[illegible]	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	[illegible]	2.998	3.499	5.408
8	0.706	1.397	1.860	[illegible]	2.896	3.355	5.041
$\boxed{9}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{2.262}$	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140

Testes de Hipótese

Reunindo todas as informações, temos que

$$|T| = \left| \frac{690.2 - 700}{46.14/\sqrt{10}} \right| = |-0.617| < 2.262$$

Então não rejeitamos $H_0 : \mu_A = 700$.