Teorema de Bayes

Exemplo

30% dos empregados de uma empresa são mulheres e o restante homens; 3/10 das mulheres são fumantes, enquanto 11/70 dos homens são fumantes. Calcule:

(a) A probabilidade de um indivíduo sorteado ser mulher e fumante;

(b) A probabilidade de um indivíduo sorteado ser homem e fumante;

(c) A probabilidade de um homem ser fumante;

(d) A probabilidade de um homem ser não fumante;

(e) A probabilidade de um fumante ser homem.

Fonte: Prof. Mario Gneri, Notas de Aula.

Teorema de Bayes

(a) Conhecemos $P(\text{mulher}) = 0{,}3$, e além disso, $P(\text{fumante}|\text{mulher}) = 0{,}15$. Então a probabilidade do evento "mulher e fumante", dado por $\{\text{mulher} \cap \text{fumante}\}$, é dada por

$$P(\text{mulher} \cap \text{fumante}) = P(\text{fumante}|\text{mulher})P(\text{mulher})$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$$

(b) De maneira similar, temos que

$$P(\text{homem} \cap \text{fumante}) = P(\text{fumante}|\text{homem})P(\text{homem})$$

$$= 0{,}7 \cdot 11/70 = 0{,}11$$

Teorema de Bayes

(c) Aqui, estamos analisando uma restrição da população, isto é, "dentre os homens, quais são fumantes"? O evento em questão é $\{\text{fumante}|\text{homem}\}$ e a probabilidade é dada pelo enunciado,

$$P(\text{fumante}|\text{homem}) = 11/70$$

(d) Temos que

$$P(\text{fumante}^c|\text{homem}) = 1 - P(\text{fumante}|\text{homem}) = 59/70$$

pois a probabilidade condicional preserva a propriedade de complemento da probabilidade, isto é, $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$.

Teorema de Bayes

(e) Para encontrar esta probabilidade, devemos utilizar o Teorema de Bayes, isto é,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

No contexto do problema, queremos $P(\text{homem}|\text{fumante})$, que é dado por

$$P(\text{homem}|\text{fumante}) = \frac{P(\text{fumante}|\text{homem})P(\text{homem})}{P(\text{fumante})}$$

Teorema de Bayes

(e) Note contudo que não sabemos $P(\text{fumante})$. Devemos considerar a lei da probabilidade total,

$$P(\text{fumante}) = P(\text{fumante}|\text{mulher})P(\text{mulher})$$

$$+P(\text{fumante}|\text{homem})P(\text{homem})$$

Podemos então ver que

$$P(\text{fumante}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{11}{70} \cdot \frac{7}{10} = \frac{1}{5}$$

Com isso, concluimos que

$$P(\text{homem}|\text{fumante}) = \frac{11/70 \cdot 7/10}{1/5} = \frac{11}{20}$$

Independência e Probabilidade Condicional

Exemplo

Três pessoas serão selecionadas aleatoriamente de um grupo de dez estagiários administrativos. Esses três formarão um comitê com três cargos diferentes: o primeiro será nomeado coordenador, o segundo fiscal e o terceiro secretário.

Metade do grupo são estudantes de último ano de graduação, sem nenhuma experiência dentro da empresa. Os outro cinco são estagiários há um semestre, e já concorrem por uma vaga efetiva na empresa.

Independência e Probabilidade Condicional

Exemplo

(1) Qual é a probabilidade de um dos veteranos ser o coordenador do comitê?

(2) Mostre que o evento $A = \{$O coordenador é um estagiário antigo$\}$ não é independente do número de estagiários novos no comitê.

(3) Se o comitê tem dois estagiários novos, qual é a probabilidade que o coordenador seja o estagiário antigo?

(4) Se o comitê tem pelo menos dois estagiários novos, qual é a probabilidade de que o coordenador seja um esgatiário novo?

Independência e Probabilidade Condicional

O espaço de configurações possíveis para a formação do comitê é:

$$H = \{nnn, nna, nan, ann, naa, ana, aan, aaa\}$$

Onde a ordem representa os cargos (coordenador, fiscal, secretário) e a indica um estagiário antigo, enquanto n um estagiário novo.

Defina o evento $A = \{\text{O coordenador é um estagiário antigo}\}$, de modo que $A^c = \{\text{O coordenador é um estagiário novo}\}$. Defina também os eventos B_0, B_1, B_2 e B_3, associados ao número de estagiários novos no comitê.

$$B_k = \{k \text{ estagiários novos no comitê}\}$$

Independência e Probabilidade Condicional

Para cada configuração, temos uma probabilidade associada:

Evento	Probabilidade
nnn	$5/10 \cdot 4/9 \cdot 3/8 = 3/36$
nna	$5/10 \cdot 4/9 \cdot 5/8 = 5/36$
nan	$5/10 \cdot 5/9 \cdot 4/8 = 5/36$
ann	$5/10 \cdot 5/9 \cdot 4/8 = 5/36$
naa	$5/10 \cdot 5/9 \cdot 4/8 = 5/36$
ana	$5/10 \cdot 5/9 \cdot 4/8 = 5/36$
aan	$5/10 \cdot 4/9 \cdot 5/8 = 5/36$
aaa	$5/10 \cdot 4/9 \cdot 3/8 = 3/36$

Independência e Probabilidade Condicional

Observando os pontos amostrais na tabela anterior (nnn, nna, etc.), construimos uma tabela de distribuição de B, pois

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \{aaa\} \\
B_1 &= \{naa, ana, aan\} \\
B_2 &= \{nna, nan, ann\} \\
B_3 &= \{nnn\}
\end{aligned}
$$

	$P(B_0)$	$P(B_1)$	$P(B_2)$	$P(B_3)$
Total	$3/36$	$15/36$	$15/36$	$3/36$

Independência e Probabilidade Condicional

(1) Temos que essa probabilidade pode ser extraída da primeira tabela. Ela corresponde aos eventos *ann*, *aan*, *ana* e *aaa*. Como os eventos são disjuntos, a probabilidade de $A = \{$O coordenador é um estagiário antigo$\}$ é dada por

$$P(A) = P(\{ann\}) + P(\{aan\}) + P(\{ana\}) + P(\{aaa\})$$

$$P(A) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{2}$$

Independência e Probabilidade Condicional

(2) Embora seja intuitivo dizer que os eventos são dependentes (afinal, quanto mais estagiários antigos no comitê, maiores são as chances do coordenador ser um deles), devemos mostrar que a distribuição conjunta dos eventos não verifica a definição de independência, a saber,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow A \text{ e } B \text{ são independentes}$$

Considere novamente a tabela. Temos que o evento $A \cap B_3 = \emptyset$, pois não há estagiários antigos em B_3. $A \cap B_2 = \{ann\}$, $A \cap B_1 = \{ana, aan\}$ e $A \cap B_0 = \{aaa\}$.

Independência e Probabilidade Condicional

(2) (cont.) Temos que

$$\begin{aligned}
P(A\cap B_0) &= P(\{aaa\}) = 3/36 \neq 1/2\cdot 3/36 = P(A)P(B_0)\\
P(A\cap B_1) &= P(\{ana, aan\}) = 10/36 \neq 1/2\cdot 15/36 = P(A)P(B_1)\\
P(A\cap B_2) &= P(\{ann\}) = 5/36 \neq 1/2\cdot 15/36 = P(A)P(B_2)\\
P(A\cap B_3) &= P(\emptyset) = 0 \neq 1/2\cdot 3/36 = P(A)P(B_3)
\end{aligned}$$

Ou seja, os eventos A e B_k, $k = 1, 2, 3, 4$ são dependentes.

Independência e Probabilidade Condicional

(3) Queremos calcular $P(A|B_2)$. Pela definição de probabilidade condicional,

$$P(A|B_2) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(B_2)} = \frac{5/36}{15/36} = \frac{5}{15}$$

(4) Queremos agora $P(A|\{B_2 \cup B_3\})$. Temos que

$$P(A|\{B_2 \cup B_3\}) = \frac{P(A \cap \{B_2 \cup B_3\})}{P(B_2 \cup B_3)} = \frac{P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)}{P(B_2) + P(B_3)}$$

pois $B_2 \cap B_3 = \emptyset$. Basta conferir as distribuições conjuntas em (2) para determinar que $P(A|\{B_2 \cup B_3\}) = 5/18$.

Teorema de Bayes

Exemplo

Uma companhia multinacional tem três fábricas que produzem o mesmo tipo de produto. A fábrica I é responsável por 30% do total produzido, a fábrica II produz 45% do total, e o restante vem da fábrica III. Cada uma das fábricas, no entanto, produz uma proporção de produtos que não atendem aos padrões estabelecidos pelas normas internacionais. Tais produtos são considerados "defeituosos" e correspondem a 1%, 2% e 1,5%, respectivamente, dos totais produzidos por fábrica.

No centro de distribuição, é feito o controle de qualidade da produção combinada das fábricas.

Teorema de Bayes

Exemplo

(1) Qual é a probabilidade de encontrar um produto defeituoso durante a inspeção de qualidade?

(2) Se durante a inspeção, encontramos um produto defeituoso, qual é a probabilidade que ele tenha sido produzido na fábrica II?

Teorema de Bayes

(1) Seja o evento $A = \{\text{Produto Defeituoso}\}$ e $F_i = \{\text{Produto da Fábrica } i\}$. Sabemos, pelo enunciado, que $P(F_1) = 0{,}3$, $P(F_2) = 0{,}45$ e $P(F_3) = 0{,}25$. Além disso, sabemos que $P(A|F_1) = 0{,}01$, $P(A|F_2) = 0{,}02$ e $P(A|F_3) = 0{,}015$. Então, pela lei da probabilidade total,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3) \\ &= 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}45 \cdot 0{,}02 + 0{,}25 \cdot 0{,}015 = 0{,}01575 \end{aligned}$$

(2) Aqui, aplicaremos o Teorema de Bayes usando o item anterior para encontrar $P(A)$:

$$P(F_2|A) = \frac{P(A|F_2)P(F_2)}{P(A)} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}45}{0{,}01575} = 0{,}5714$$

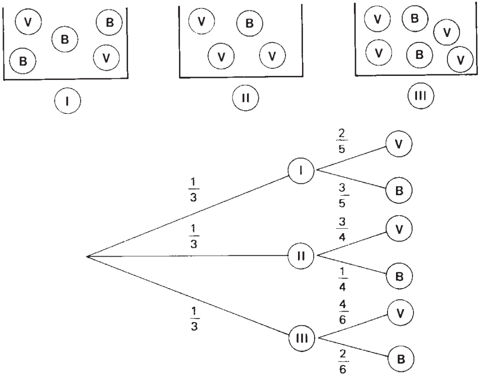
Probabilidade Condicional

Exemplo

Uma urna I tem 2 bolas vermelhas (V) e 3 brancas (B); outra urna II tem 3 bolas vermelhas e uma branca, e a urna III tem 4 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola. Qual a probabilidade da bola ser vermelha?
Fonte: Hazzan, Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade, pág 103-E.

Probabilidade Condicional

Considere o diagrama:



Probabilidade Condicional

Note que os eventos U_I (sortear urna I), U_{II} e U_{III} são uma partição de Ω, isto é, $\Omega = U_I \cup U_{II} \cup U_{III}$. Então o evento $V =$ sair bola vermelha tem probabilidade dada por

$$P(V) = P(U_I \cap V) + P(U_{II} \cap V) + P(U_{III} \cap V)$$

Mas pelo diagrama, notamos que $P(U_I \cap V) = 1/3 \cdot 2/5 = 2/15$, $P(U_{II} \cap V) = 1/3 \cdot 3/4 = 1/4$ e $P(U_{III} \cap V) = 1/3 \cdot 4/6 = 2/9$. Então temos que

$$P(V) = \frac{2}{15} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{109}{180}$$

Teorema de Bayes

Exemplo

Considere uma urna com bolas pretas e vermelhas, de onde sorteamos aleatoriamente bolas, sem reposição.

(a) Suponha que temos apenas uma bola preta e uma vermelha. Se na segunda extração tiramos uma bola vermelha, qual a probabilidade da primeira extração ter sido de uma bola preta?

(b) Suponha que temos três bolas pretas e duas vermelhas. Se na segunda extração tiramos uma bola vermelha, qual a probabilidade da primeira extração ter sido de uma bola preta?

Teorema de Bayes

O objetivo do item (a) é justificar que nem sempre trabalhamos com probabilidades condicionadas em algum instante anterior do tempo. Seja X_1 a primeira extração e X_2 a segunda extração, posterior.

(a) Normalmente, a probabilidade de $X_1 = V$ é igual à probabilidade de $X_1 = P$, ou seja, $1/2$. Mas sabemos que ocorreu $X_2 = V$, então a primeira bola a ter sido retirada foi necessariamente preta. Temos ai que, embora X_2 tenha ocorrido no futuro, já sabemos a informação sobre esse evento e portanto devemos atualizar a probabilidade.

Teorema de Bayes

(a) (cont.) Formalmente, considere $P(X_1 = P|X_2 = V)$. Então

$$P(X_1 = P|X_2 = V) = \frac{P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P)}{P(X_2 = V)}$$

mas $P(X_2 = V|X_1 = P) = 1$, pois só temos duas bolas na urna. Sabemos que $P(X_1 = P) = 1/2$.

Teorema de Bayes

(a) (cont.) Já $P(X_2 = V)$ deve ser determinado pela lei de probabilidades totais, ou seja

$$\begin{aligned} P(X_2 = V) &= P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P) \\ &\quad + P(X_2 = V|X_1 = V)P(X_1 = V) \end{aligned}$$

mas novamente $P(X_2 = V|X_1 = V) = 0$ pois não há reposição e $P(X_2 = V|X_1 = P) = 1$. Então

$$P(X_1 = P|X_2 = V) = \frac{1 \cdot 1/2}{0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2} = 1$$

(b) Novamente queremos $P(X_1 = P|X_2 = V)$. Condicionando no futuro,

$$P(X_1 = P|X_2 = V) = \frac{P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P)}{P(X_2 = V)}$$

Sabemos que $P(X_1 = V) = 2/5$ e $P(X_1 = P) = 3/5$. Além disso, $P(X_2 = V|X_1 = V){=}1/4$, e $P(X_2 = V|X_1 = P){=}1/2$.

Teorema de Bayes

(b) Agora, para determinar $P(X_2 = V)$, devemos usar o teorema da probabilidade total.

$$\begin{aligned} P(X_2 = V) &= P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P) \\ &\quad + P(X_2 = V|X_1 = V)P(X_1 = V) \\ &= 1/2 \cdot 3/5 + 1/4 \cdot 2/5 = 2/5 \end{aligned}$$

Então a probabilidade da primeira extração ser preta, dado que a segunda foi vermelha, é simplesmente

$$\begin{aligned} P(X_1 = P|X_2 = V) &= \frac{P(X_2{=}V|X_1{=}P)P(X_1{=}P)}{2/5} \\ &= \frac{1/2{\cdot}3/5}{2/5} = \frac{3}{4} \neq \frac{3}{5} = P(X_1 = P) \end{aligned}$$