

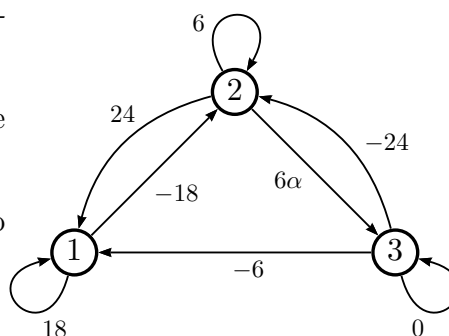
Otimização de Médias sobre Grafos Orientados
Prova – 26 de Julho de 2013

Nome:

Questão 1.

Ao analisar a situação ao lado, com respeito ao parâmetro α ,

- i. [1,0 ponto] determine a constante cíclica minimal $m(c)$;
- ii. [1,0 ponto] descreva o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$.



Questão 2. Seja G grafo conexo com $\#V(G) = n$. Recorde que

$$u(i) = \min \left\{ k [c(P) - m(c)]: \begin{array}{l} 1 \leq k \leq n, P \text{ caminho em } G, \\ \text{de comprimento } k, \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}, \quad \forall i,$$

fornece corretor associado ao custo c .

- i. [1,0 ponto] Mostre que, na verdade, podemos considerar

$$u(i) = \min \left\{ k [c(P) - m(c)]: \begin{array}{l} 1 \leq k \leq n, P \text{ caminho em } G, \\ \text{de comprimento } k \text{ e ponto final } i \\ \text{sem subciclo próprio,} \end{array} \right\}.$$

- ii. [1,0 ponto] Se houver P_0 caminho em G , sem subciclo próprio, de comprimento $k_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, com ponto final i , satisfazendo a desigualdade $k_0 [c(P_0) - m(c)] \leq 0$, prove então que

$$u(i) = 0 \wedge \min \left\{ k [c(P) - m(c)]: \begin{array}{l} 1 \leq k \leq n - 1, P \text{ caminho em } G, \\ \text{de comprimento } k \text{ e ponto final } i \\ \text{sem subciclo,} \end{array} \right\}.$$

Observação: Um ciclo é considerado um subciclo de si mesmo (obviamente não próprio neste caso).

Questão 3. [2,0 pontos] Utilize as informações e os critérios estabelecidos na Questão 2, para determinar, com respeito ao parâmetro α , um corretor para o custo apresentado na Questão 1.

Questão 4.

- i. [1,0 ponto] Mostre que, ao aplicar o operador de Lax-Oleinik T_c a um corretor u associado ao custo c , sua imagem $T_c(u)$ também é um corretor.*
- ii. [1,0 ponto] Determine $T_c(u)$ para cada corretor u obtido na Questão 3. (Lembre-se da dependência com relação ao parâmetro α .)*

Observação: Recorde que o operador de Lax-Oleinik T_c age sobre as funções $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_c f(j) = \min_{i \xrightarrow{G} j} [f(i) + c(i, j)], \quad \forall j \in V(G).$$

Questão 5.

- i. [1,0 ponto] Ao considerar a família de corretores obtida na Questão 3, determine o parâmetro α que fornece um corretor separante.*
- ii. [1,0 ponto] Para o corretor separante u estabelecido no item anterior, estabeleça o custo renormalizado correspondente*

$$\hat{c}(i, j) := c(i, j) + u(i) - u(j) - m(c).$$