Aproximações ao Problema de Goldbach

Eduardo Garibaldi

Uma das peculiaridades da teoria dos números está na facilidade para apresentar questões de formulação elementar e de difícil solução, quase inatacáveis em verdade. Isto é lugar-comum. Frustantemente, é também uma informação correta. Os números, em especial os primos, parecem repudiar estratégias muito sistemáticas, muito metódicas. Seu exigente escudo barra sobretudo aquilo que não traz certo grau de engenhosidade.

De exemplos não carecemos. Alguns destes problemas carregam uma indisfarçável longevidade. Ainda hoje, passados milênios desde as considerações de Euclides, não sabemos se existe algum número perfeito ímpar. Outros conquistaram privilegiada atenção. Afinal, haverá infinitos primos gêmeos? E determinadas generalizações recriam lendas. Valendo $a^x+b^y=c^z$ para a, b, c, x, y, z inteiros positivos e $x, y, z > 2$, sempre terão a, b, c fator primo comum? (A resposta afirmativa é a conjectura de Beal e uma prova ou um contra-exemplo merece 100 mil dólares.) Em resumo, a relação de problemas em aberto estende-se sem piedade, zombando de nossa curiosa e desguarnecida natureza.

Nesta lista de espera, uma questão figura pacientemente há 261 anos. A troca de cartas entre Christian Goldbach (1690-1764), historiador e matemático prussiano, e Leonard Euler (1707-1783), matemático suíço, originou a famosa conjectura de Goldbach: todo número par maior ou igual a 4 é soma de dois primos. Da procura por comprovação para esta hipótese, esforços traduziram-se em distintos teoremas. Por exemplo, sabemos que, com um número limitado de parcelas, podemos escrever qualquer inteiro maior ou igual a 2 como soma de primos. Lev Genrikhovich Shnirelmann (1905-1938) foi quem obteve este resultado preliminar. Por sua vez, Ivan Matveevich Vinogradov (1891-1983) provou que todo número ímpar suficientemente grande pode ser visto como soma de três primos. Outra importante contribuição foi dada por Jing-Run Chen (1933-1996). Este mostrou que todo número par suficientemente grande é a soma de um primo e um número que é produto de no máximo dois primos.

Em termos equivalentes, a conjectura afirma que não precisamos dos compostos para escrever os pares como soma de dois números. Esta maneira de pensar o problema de Goldbach permite-nos perguntar se podemos ignorar os múltiplos de alguns números quando quisermos colocar os pares como soma de dois inteiros. O objetivo da nossa investigação é examinar esta versão enfraquecida. Para isso, consideremos uma definição inicial.

Seja C um subconjunto dos inteiros positivos. Dizemos que C é L-Goldbach quando L for o menor inteiro positivo tal que, para cada $k \geq L$, podemos encontrar $m, n \in C$ satisfazendo $m + n = 2k$.

Eis uma constatação imediata. Suponha $C_1 \subset C_2$. Quando C_1 for L_1-Goldbach, naturalmente C_2 será L_2-Goldbach, com $L_2 \leq L_1$. Portanto, todo interesse reside em C_2 L_2-Goldbach. Sob quais hipóteses, podemos concluir que C_1 é L_1-Goldbach?[1]

Exemplos: O conjunto dos números ímpares positivos é 1-Goldbach, o conjunto dos pares positivos é 2-Goldbach.

Ao pôr $G = \{z \in \mathbb{Z} : z \geq 2\}$ e, para $w \in G$, definir $G_w = G - wG$, então segue G_w 2-Goldbach. Efetivamente, quando $k \notin wG$, considere $m = k = n$, caso contrário, tome $m = k + 1$ e $n = k - 1$. Em particular, para qualquer primo p, G_p é 2-Goldbach.

Ademais, se $w \in G$, então $G_{2,w} = G_2 - wG = G_2 \cap G_w$ é 2-Goldbach. De fato, como $G_{2,w} = G_2$ quando w é par, assuma w ímpar. Assim, se $k \in wG$, conforme a paridade de k, escolha ou $m = k + 1$ e $n = k - 1$ ou $m = k + 2$ e $n = k - 2$. Caso $k \notin wG$, tome ou $m = k = n$ (quando $k \in G_2$) ou $m = k + 1$ e $n = k - 1$ (quando $k \notin G_2$ e $k < w + 2$) ou $m = k + w$ e $n = k - w$ (quando $k \notin G_2$ e $k \geq w + 2$). Em particular, note que, sendo p primo ímpar, $G_{2,p}$ é 2-Goldbach.

Os exemplos registram *fenômeno hereditário*. Ao retirarmos do *conjunto-pai* G, os múltiplos positivos de w (com exceção apenas do próprio w), obtemos um *conjunto-filho* que mantém a condição de ser 2-Goldbach e o mesmo se verifica para o *conjunto-neto* $G_{2,w}$. Gostaríamos de investigar se tal fenômeno continua a se propagar nas *gerações* seguintes.

Não é de analogias que vive a matemática. Sejamos, portanto, claros. Preservados $w_1, \ldots, w_s \in G$, analisemos o conjunto resultante da eliminação em G dos demais múltiplos positivos de $w_1, \ldots, w_s$, isto é, examinemos mais cuidadosamente $G_{2,w_1,\ldots,w_s} = G_{2,w_1,\ldots,w_{s-1}} - w_s G = G_2 \cap G_{w_1} \cap \ldots \cap G_{w_s}$. Primeiro, note que, se $p_1, \ldots, p_r$ são os distintos primos ímpares presentes nas fatorações de $w_1, \ldots, w_s$, então $G_{2,w_1,\ldots,w_s} \supset G_{2,p_1,\ldots,p_r}$. Ademais, a própria definição assegura que $G_{2,p_1,\ldots,p_r} = G_{2,p_{\varphi(1)},\ldots,p_{\varphi(r)}}$ para qualquer permutação $\varphi \in S_r$. Deste modo, pela observação anterior aos exemplos, podemos limitar nosso estudo ao conjunto $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$, onde – esta hipótese será mantida durante todo texto – tomamos $p_1 < \ldots < p_r$. Fixado inteiro positivo r, haverá escolhas para as quais $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ é 2-Goldbach?

[1] A proposição D esboça uma primeira resposta para esta questão.

Mais geralmente, tomemos $\{q_i\}$ seqüência crescente de primos ímpares. Coloquemos, então, $G_{2,\{q_i\}} = G_2 \cap \bigcap_i G_{q_i}$. Haverá seqüência para a qual $G_{2,\{q_i\}}$ é conjunto 2-Goldbach?

Deste ponto em diante, buscaremos principalmente respostas para estas indagações. Para a primeira pergunta, temos completa solução. Com efeito, para quaisquer primos $p_1, \ldots, p_r$, $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ é conjunto L-Goldbach. Isto é o que estabelece a primeira proposição.

Proposição A: $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ é L-Goldbach, com $L \leq 4p_1 \cdots p_{r-1} + 2$.

Prova: A demonstração se dará com a comprovação de três etapas sucessivas.

Fixemos inteiros não nulos a_i tais que $\sum_{i=1}^{r} a_i p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r = 1$.

Etapa 1: Podemos tomar $L \leq p_1 \cdots p_r \sum_{i=1}^{r} |a_i| + 2$.

Sabemos que, para $i \in \{1, \ldots, r\}$, G_{2,p_i} é 2-Goldbach. Logo, dado inteiro $k \geq 2$, existem $m_i, n_i \in G_{2,p_i}$ satisfazendo $m_i + n_i = 2k$. Além disso, pelo argumento apresentando nos exemplos, podemos assumir $|m_i - n_i| \leq 2p_i$.

Sendo assim, definimos

$$m = \sum_{i=1}^{r} a_i p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r m_i \text{ e } n = \sum_{i=1}^{r} a_i p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r n_i.$$

Primeiro, note que

$$\begin{aligned} m + n &= \sum_{i=1}^{r} a_i p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r (m_i + n_i) \\ &= 2k \sum_{i=1}^{r} a_i p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r \\ &= 2k. \end{aligned}$$

Ademais, como $a_i p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r \equiv 1 \pmod{p_i}$, valem

$$m \equiv m_i \pmod{p_i}, \quad n \equiv n_i \pmod{p_i}.$$

Igualmente, se $S = \{i : a_i \text{ é ímpar}\}$, observamos

$$m \equiv \sum_{i \in S} m_i \pmod 2, \quad n \equiv \sum_{i \in S} n_i \pmod 2,$$

constatando ainda que $\#S$ é ímpar, pois $\sum_{i=1}^{r} a_i \equiv 1 \pmod 2$.

Assim, precisamos agora garantir que $2 \le m, n \le 2k-2$. Isto, contudo, equivale a $|m-n| \le 2k-4$. Uma vez que

$$|m-n| \le \sum_{i=1}^{r} a_i p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r |m_i - n_i| \le 2 p_1 \cdots p_r \sum_{i=1}^{r} |a_i|,$$

a desigualdade está estabelecida caso $k \ge p_1 \cdots p_r \sum_{i=1}^{r} |a_i| + 2$.

Daí, como ocorre $|m_i - k|, |n_i - k| \le p_i$, dado $k \ge p_1 \cdots p_r \sum_{i=1}^{r} |a_i| + 2$, as desigualdades $m_i, n_i \ge (p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r \sum_{i=1}^{r} |a_i| - 1) p_i + 2$ impedem $m_i, n_i \in \{2, p_i\}$. Portanto, das congruências acima, sucede $m, n \in G_{2, p_1, \ldots, p_r}$.

Etapa 2: É possível assumir $L \le p_1 \cdots p_r + 2$.

Consiremos a situação $p_1 \cdots p_r + 2 \le k < p_1 \cdots p_r \sum_{i=1}^{r} |a_i| + 2$. Seja N o menor inteiro não negativo tal que $k + 2^N p_1 \cdots p_r \ge p_1 \cdots p_r \sum_{i=1}^{r} |a_i| + 2$. Em conseqüência, para $K_0 = k + 2^N p_1 \cdots p_r$, temos $\mu_0, \nu_0 \in G_{2, p_1, \ldots, p_r}$ com as propriedades antes averiguadas. Em termos mais claros, para $m_i, n_i \in G_{2, p_i}$ cumprindo $m_i + n_i = 2K_0$ e $|m_i - n_i| \le 2p_i$, verificamos

$$\mu_0 + \nu_0 = 2K_0,$$

$$\mu_0 \equiv m_i \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad \nu_0 \equiv n_i \not\equiv 0 \pmod{p_i},$$
$$\mu_0 \equiv \sum_{i \in S} m_i \not\equiv 0 \pmod 2, \quad \nu_0 \equiv \sum_{i \in S} n_i \not\equiv 0 \pmod 2,$$

$$2 \le \nu_0 \le K_0 \le \mu_0 \le 2K_0 - 2.$$

Equivalem à igualdade inicial e à cadeia de desigualdades as expressões seguintes $\mu_0 + \nu_0 = 2(k + 2^N p_1 \cdots p_r)$ e $2 \le \nu_0 \le k + 2^N p_1 \cdots p_r \le \mu_0 \le 2(k + 2^N p_1 \cdots p_r) - 2$. Logo, constatamos

$$(\mu_0 - 2^N p_1 \cdots p_r) + \nu_0 = 2(k + 2^{N-1} p_1 \cdots p_r),$$

$$\mu_0 - 2^N p_1 \cdots p_r \equiv \mu_0 \pmod{p_i},$$
$$\mu_0 - 2^N p_1 \cdots p_r \equiv \mu_0 \pmod{2},$$

$$2 < k \leq \mu_0 - 2^N p_1 \cdots p_r \leq 2(k + 2^{N-1} p_1 \cdots p_r) - 2.$$

Sejam $\mu_1 = max\{\mu_0 - 2^N p_1 \cdots p_r, \nu_0\}$ e $\nu_1 = min\{\mu_0 - 2^N p_1 \cdots p_r, \nu_0\}$. Com $K_1 = k + 2^{N-1} p_1 \cdots p_r$, traduzindo os dados acima, encontramos

$$\mu_1 + \nu_1 = 2K_1,$$

$$\mu_1 \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad \nu_1 \not\equiv 0 \pmod{p_i},$$
$$\mu_1 \not\equiv 0 \pmod{2}, \quad \nu_1 \not\equiv 0 \pmod{2},$$

$$2 \leq \nu_1 \leq K_1 \leq \mu_1 \leq 2K_1 - 2.$$

O mesmo procedimento, quando $j < N$, permite-nos colocar $\mu_{j+1} = max\{\mu_j - 2^{N-j} p_1 \cdots p_r, \nu_j\}$ e $\nu_{j+1} = min\{\mu_j - 2^{N-j} p_1 \cdots p_r, \nu_j\}$, de modo que, para $K_{j+1} = k + 2^{N-(j+1)} p_1 \cdots p_r$, valem

$$\mu_{j+1} + \nu_{j+1} = 2K_{j+1},$$

$$\mu_{j+1} \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad \nu_{j+1} \not\equiv 0 \pmod{p_i},$$
$$\mu_{j+1} \not\equiv 0 \pmod{2}, \quad \nu_{j+1} \not\equiv 0 \pmod{2},$$

$$2 \leq \nu_{j+1} \leq K_{j+1} \leq \mu_{j+1} \leq 2K_{j+1} - 2.$$

Todavia, na N-ésima etapa deste processo, teremos

$$\mu_N + \nu_N = 2(k + p_1 \cdots p_r),$$

$$\mu_N \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad \nu_N \not\equiv 0 \pmod{p_i},$$
$$\mu_N \not\equiv 0 \pmod{2}, \quad \nu_N \not\equiv 0 \pmod{2},$$

$$2 \leq \nu_N \leq k + p_1 \cdots p_r \leq \mu_N \leq 2(k + p_1 \cdots p_r) - 2.$$

Lembremos que $k \geq p_1 \cdots p_r + 2$. Por conseguinte,

$$(\mu_N - 2p_1 \cdots p_r) + \nu_N = 2k,$$

$$\mu_N - 2p_1 \cdots p_r \equiv \mu_N \pmod{p_i},$$
$$\mu_N - 2p_1 \cdots p_r \equiv \mu_N \pmod{2},$$

$$2 \leq k - p_1 \cdots p_r \leq \mu_N - 2p_1 \cdots p_r \leq 2k - 2.$$

Portanto, se $m = \mu_N - 2p_1 \cdots p_r$ e $n = \nu_N$, segue $m, n \in G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ com $m + n = 2k$.

Etapa 3: Temos $L \leq 4p_1 \cdots p_{r-1} + 2$.

Ao assumir $4p_1 \cdots p_{r-1} + 2 \leq k < p_1 \cdots p_r + 2$, está assegurado que existem $\mu, \nu \in G_{2,p_1,\ldots,p_{r-1}} - \{2, p_1, \ldots, p_{r-1}\}$ cumprindo $\mu + \nu = 2k$. Supondo $\nu \leq \mu$, é suficiente concluir que, para $\theta \in \{0, 1, 2\}$, o primo p_r não divide $m = m(\theta) = \mu - 2\theta p_1 \cdots p_{r-1}$ nem $n = n(\theta) = \nu + 2\theta p_1 \cdots p_{r-1}$. Daí decorre $m, n \in G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ com $m + n = 2k$, pois, semelhantemente a etapa anterior, o par $m(\theta), n(\theta)$ preserva as propriedades dos inteiros μ, ν.

Imaginemos, então, que $m(\theta), n(\theta) \equiv 0 \pmod{p_r}$ para todo $\theta \in \{0, 1, 2\}$. Entretanto, isto determina $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{p_r}$ para distintos $\theta_1, \theta_2 \in \{0, 1, 2\}$. Tal absurdo encerra a prova da proposição. ■

O argumento usado na etapa 3 desta demonstração pode ser generalizado. Com isto, ao afirmar que $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ é L-Goldbach, conseguiremos exibir menor cota superior para L. Nossas discussões seguirão este caminho.

Tomaremos, como antes, primos ímpares $p_1 < \ldots < p_r$ e, para dar sentido a certas expressões, manteremos a convenção $p_0 = 1$ no restante do texto.

Fixe $s \in \{0, \ldots, r-2\}$ e tome μ, ν inteiros. Sendo α inteiro, dizemos que ocorre (ou acontece) $H_{\alpha,s} = H_{\alpha,s}(\mu, \nu)$ se verificamos a veracidade da seguinte sentença:

$$\mu \equiv 2\alpha p_0 \cdots p_s \pmod{p_i} \quad \text{ou}$$
$$\nu \equiv -2\alpha p_0 \cdots p_s \pmod{p_i} \quad \text{para algum } i \in \{s+1, \ldots, r\}.$$

Lema B: Nas condições acima, assuma que há t inteiro positivo satisfazendo $\displaystyle\sum_{j=1}^{u} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil (-1)^{j+1} \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \right\rceil < \frac{t}{2}$, onde ou u é ímpar menor que $r-s$ ou $u=r-s$. Então, dados μ,ν inteiros, para algum $\theta=\theta(\mu,\nu)\in\{0,\ldots,t-1\}$ não ocorre $H_{\theta,s}(\mu,\nu)$.

Prova: Fixado $j\in\{1,\ldots,u\}$, tome $i_1,\ldots,i_j\in\{s+1,\ldots,r\}$ índices distintos. Em seguida, para $l\in\{1,\ldots,j\}$, considere $\beta_{i_l}\in\{0,\ldots,p_{i_l}-1\}$ cumprindo $\mu\equiv 2\beta_{i_l}p_0\cdots p_s \pmod{p_{i_l}}$. Da mesma maneira, assuma que $\beta_{i_1\ldots i_j}\in\{0,\ldots,p_{i_1}\cdots p_{i_j}-1\}$ satisfaz $\mu\equiv 2\beta_{i_1\ldots i_j}p_0\cdots p_s \pmod{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}$.

Um fato deve ser destacado. Para que existam $\lambda_1,\ldots,\lambda_j$ inteiros positivos cumprindo $\beta_{i_1}+(\lambda_1-1)p_{i_1}=\ldots=\beta_{i_j}+(\lambda_j-1)p_{i_j}<t$, é necessário e suficiente que haja λ_0 também inteiro positivo tal que $\beta_{i_1\ldots i_j}+(\lambda_0-1)p_{i_1}\cdots p_{i_j}<t$. Com efeito, segue das definições que existem $\lambda_1',\ldots,\lambda_j'$ inteiros positivos satisfazendo $\beta_{i_1}+(\lambda_1'-1)p_{i_1}=\ldots=\beta_{i_j}+(\lambda_j'-1)p_{i_j}=\beta_{i_1\ldots i_j}$. Assim, a suficiência fica caracterizada ao fazermos $\lambda_l=\lambda_l'+(\lambda_0-1)p_{i_1}\cdots p_{i_{l-1}}p_{i_{l+1}}\cdots p_{i_j}$. Reciprocamente, como $\beta_{i_1\ldots i_j}+(\lambda_1-\lambda_1')p_{i_1}=\ldots=\beta_{i_1\ldots i_j}+(\lambda_j-\lambda_j')p_{i_j}$, temos $\lambda_1-\lambda_1'\equiv 0 \pmod{p_{i_l}}$ para $l\geq 2$. Como o teorema chinês dos restos obriga $\lambda_1\geq\lambda_1'$, resulta $\beta_{i_1\ldots i_j}+(\lambda_1-\lambda_1')p_{i_1}=\beta_{i_1\ldots i_j}+(\lambda_0-1)p_{i_1}\cdots p_{i_j}$ para inteiro positivo λ_0.

Assinalemos outra informação fundamental:

$$\left\lfloor\frac{t}{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}\right\rfloor\leq\#\{\lambda_0:\beta_{i_1\ldots i_j}+(\lambda_0-1)p_{i_1}\cdots p_{i_j}<t\}\leq\left\lceil\frac{t}{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}\right\rceil.$$

E isto segue porque, na melhor situação, teremos $\beta_{i_1\ldots i_j}=0$, de modo que $(\lambda_0-1)p_{i_1}\cdots p_{i_j}<t$ implica $\lambda_0<\dfrac{t}{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}+1$. Já no pior caso, $p_{i_1}\cdots p_{i_j}-1+(\lambda_0-1)p_{i_1}\cdots p_{i_j}<t$ determina $\lambda_0<\dfrac{t+1}{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}$.

Chegaríamos as mesmas conclusões se tivéssemos usado $-\nu$ nas definições iniciais. Portanto, com as estimativas que encontramos, por simples majoração (quando u é ímpar menor que $r-s$) ou pelo princípio da inclusão-exclusão (quando $u=r-s$), concluímos que $H_{\alpha,s}$ ocorre para não mais do que $2\displaystyle\sum_{j=1}^{u}\sum_{s+1\leq i_1<\ldots<i_j\leq r}\left\lceil(-1)^{j+1}\frac{t}{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}\right\rceil$ índices α em $\{0,\ldots,t-1\}$. Nada obstante, é hipótese central $2\displaystyle\sum_{j=1}^{u}\sum_{s+1\leq i_1<\ldots<i_j\leq r}\left\lceil(-1)^{j+1}\frac{t}{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}\right\rceil<t$. Logo, há $\theta\in\{0,\ldots,t-1\}$ tal que não acontece $H_{\theta,s}(\mu,\nu)$. ∎

Este lema nos possibilitará melhor estimar L na condição L-Goldbach de $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$. Antes, entretanto, notemos que necessariamente $t\geq 3$. De fato, pondo $A_i = \{\lambda \in \mathbb{Z} : 0 \leq \lambda < t/p_i\}$, de modo similar ao que acabamos de discutir, constatamos

$$\begin{aligned}
\# \bigcup_{i=s+1}^{r} A_i &\leq \sum_{j=1}^{u} (-1)^{j+1} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \right\rceil \\
&\leq \sum_{j=1}^{u} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil (-1)^{j+1} \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \right\rceil .
\end{aligned}$$

Por outro lado, sucede claramente $\displaystyle\bigcup_{i=s+1}^{r} A_i = A_{s+1}$. Em conseqüência, a afirmação feita decorre de $\displaystyle\sum_{j=1}^{u} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil (-1)^{j+1} \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{t}{p_{s+1}} \right\rceil \geq 1$.

Mantendo tal dado em mente, apresentamos o próximo resultado.

Proposição B: Seja s inteiro não negativo. Para inteiro $r \geq s+2$, considere $p_1, \ldots, p_r$ primos ímpares. Assuma u ímpar menor que $r-s$ ou $u = r-s$. Finalmente, suponha $\displaystyle\sum_{j=1}^{u} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil (-1)^{j+1} \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \right\rceil < \frac{t}{2}$ para algum inteiro positivo t. Então $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ é L-Goldbach, com $L \leq 2(t-1)p_0 \cdots p_s + 2$.

Prova: Seja $k \geq 2(t-1)p_0 \cdots p_s + 2$. Para qualquer s inteiro não negativo, podemos garantir a existência de $\mu, \nu \in G_{2,p_1,\ldots,p_s} - \{2, p_1, \ldots, p_s\}$ satisfazendo $\mu + \nu = 2k$. Para $s \geq 2$, isto decorre da proposição A. Se $s = 1$, uma vez que temos $|\mu - \nu| \leq 2p_1$, a afirmação resulta de $k \geq 2(t-1)p_1 + 2 \geq 4p_1 + 2$. Quando $s = 0$, como $k \geq 2(t-1) + 2 \geq 6$, tal fato segue trivialmente.

Assumindo $\mu \geq \nu$, pelo lema B, há $\theta = \theta(\mu, \nu) \in \{0, \ldots, t-1\}$ tal que não acontece $H_{\theta,s}(\mu, \nu)$, isto é, para o qual constatamos

$$\mu \not\equiv 2\theta p_0 \cdots p_s \pmod{p_i} \quad \text{e}$$

$$\nu \not\equiv -2\theta p_0 \cdots p_s \pmod{p_i}, \quad \forall\, i \in \{s+1, \ldots, r\}.$$

Note que $\mu - 2\theta p_0 \cdots p_s \geq k - 2(t-1)p_0 \cdots p_s \geq 2$. Defina $m = \mu - 2\theta p_0 \cdots p_s$ e $n = \nu + 2\theta p_0 \cdots p_s$. Como (quando $s \geq 1$)

$$m \equiv \mu \not\equiv 0 \pmod{p_i} \quad \text{e}$$

$$n \equiv \nu \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, s\},$$

temos $m, n \in G_{2,p_1,\ldots,p_r}$. ■

Por serem mais facilmente aplicáveis, no seguinte corolário, dois casos particulares desta proposição são assinalados.

Corolário B: Considere $v \in \{1, ..., r-1\}$. Então:

i) $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ é L-Goldbach, com $L \leq 4(v+1)p_0 \cdots p_{r-(v+1)} + 2$, quando $p_{r-v} > 2(v+1)$.

ii) $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ é L-Goldbach, com $L \leq 4(v+2)p_0 \cdots p_{r-(v+1)} + 2 = 2p_0 \cdots p_{r-(v+1)}(p_{r-v}+3) + 2$, quando $p_{r-v} = 2(v+1)$ e $p_{r-(v-1)} > 2(v+2)$.

Prova: Ao empregar a proposição B, faça $s = r-(v+1), u = 1$ e $t = \begin{cases} 2v+3 & \text{em (i)} \\ 2v+5 & \text{em (ii)} \end{cases}$. ■

Antes de começarmos a tentar responder a segunda pergunta que propomos, isto é, se existe $\{q_i\}$ seqüência crescente de primos ímpares tal que $G_{2,\{q_i\}}$ é 2-Goldbach, vejamos alguns fatos por si próprios relevantes. Primeiro, destaquemos um critério de evidente serventia. A fim de que haja t inteiro positivo cumprindo $\displaystyle\sum_{j=1}^{r-s} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil (-1)^{j+1} \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \right\rceil < \frac{t}{2}$, é necessário e suficiente confirmar $\displaystyle\sum_{i=1}^{r-s} Q_{s+i-1} \frac{1}{p_{s+i}} < \frac{1}{2}$, onde $Q_s = 1$ e $Q_{s+i} = Q_{s+i-1}\left(1 - \dfrac{1}{p_{s+i-1}}\right)$ se $i \geq 1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} t \sum_{i=1}^{r-s} Q_{s+i-1} \frac{1}{p_{s+i}} &= t \sum_{j=1}^{r-s} (-1)^{j+1} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{r-s} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil (-1)^{j+1} \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \right\rceil \\ &< \frac{t}{2} \end{aligned}$$

demonstra a necessidade. Reciprocamente, assuma $t > \dfrac{2^{r-s} - 1}{\dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{r-s} Q_{s+i-1} \frac{1}{p_{s+i}}}$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2} &> 2^{r-s} - 1 + t\sum_{i=1}^{r-s} Q_{s+i-1}\frac{1}{p_{s+i}} \\
&= \sum_{j=1}^{r-s}\binom{r-s}{j} + t\sum_{i=1}^{r-s} Q_{s+i-1}\frac{1}{p_{s+i}} \\
&= \sum_{j=1}^{r-s}\sum_{s+1\le i_1<\ldots<i_j\le r}\left(1+(-1)^{j+1}\frac{t}{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}\right) \\
&\ge \sum_{j=1}^{r-s}\sum_{s+1\le i_1<\ldots<i_j\le r}\left\lceil(-1)^{j+1}\frac{t}{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}\right\rceil
\end{aligned}$$

confirma a equivalência em discussão. Obviamente, abordagem similar pode ser adotada para estabelecer critério análogo para os demais valores de u.

Vejamos também um lema elementar. Para tanto, seja π_s o s-ésimo primo ímpar.

Lema C: Assuma $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ L-Goldbach, com $L \le \frac{\pi_{s+1}^2+3}{2}$. Daí, se $G_{2,\pi_1,\ldots,\pi_s}$ for 2-Goldbach, então $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ igualmente será 2-Goldbach.

Prova: Notamos que todos elementos de $G_{2,\pi_1,\ldots,\pi_s} \cap \{1,2,\ldots,\pi_{s+1}^2-1\}$ são números primos. Além disso, ao tomarmos $m,n \in G_{2,\pi_1,\ldots,\pi_s}$ satisfazendo $m+n=2k$ para $3 \le k < \frac{\pi_{s+1}^2+3}{2}$, vale $m,n \le 2k-3 < \pi_{s+1}^2$. Logo, m,n são primos, donde $m,n \in G_{2,p_1,\ldots,p_r}$. ∎

Apesar da simplicidade do lema acima, encontramos uma aplicação interessante: G_{2,p_1,p_2,p_3} é 2-Goldbach. Efetivamente, como $G_{2,3}$ é 2-Goldbach e, pela proposição A, $G_{2,3,p_2}$ é L-Goldbach, com $L \le 4\cdot 3+2 = 14 = \frac{5^2+3}{2}$, segue que, em verdade, $G_{2,3,p_2}$ é 2-Goldbach. Em particular, obtemos $G_{2,3,5}$ 2-Goldbach. Entretanto, pelo corolário B.i, sabemos que $G_{2,3,p_2,p_3}$ é L-Goldbach, com $L \le 4\cdot(1+1)\cdot 3+2 = 26 = \frac{7^2+3}{2}$. Logo, $G_{2,3,p_2,p_3}$ é, de fato, 2-Goldbach, donde $G_{2,3,5,7}$ é 2-Goldbach. Novamente, o corolário B.i nos assegura que $G_{2,5,p_2,p_3}$ é L-Goldbach, com $L \le 4\cdot(1+1)\cdot 5+2 = 42 < 62 = \frac{11^2+3}{2}$, ou seja, $G_{2,5,p_2,p_3}$ é 2-Goldbach. Por fim, quando $p_1 \ge 7$, a proposição B (para $u=1$) garante que G_{2,p_1,p_2,p_3} satisfaz a condição L-Goldbach, com $L \le 2\cdot(7-1)+2 = 14 < 62$. Conseqüentemente, confirmamos

G_{2,p_1,p_2,p_3} 2-Goldbach.

Enfrentemos, de uma vez por todas, a segunda indagação. Enfim, haverá seqüência para a qual $G_{2,\{q_i\}}$ é conjunto 2-Goldbach? A resposta depende (de novo nos apoiamos em vocabulário e ilustrações da genética) da *hereditariedade* da condição 2-Goldbach. Enunciemos tal propriedade com clareza.

Proposição D: Sendo s inteiro não negativo, suponha que $G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ é 2-Goldbach, onde $r \geq max\{3, s+1\}$. Considere ainda u ímpar menor que $r+1-s$ e t inteiro positivo tais que $\sum_{j=1}^{u} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil (-1)^{j+1} \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \right\rceil < \frac{t}{2} - \left\lceil \frac{t}{p_r} \right\rceil - \sum_{\substack{1<j<u \\ j \text{ par}}} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j} p_r} \right\rceil$. Tome q o menor primo pertencente ao complementar de $\{2, p_1, \ldots, p_r\}$. Então, para qualquer primo $p > max\left\{p_r, \frac{4(t-1)p_0 \cdots p_s - 1}{q}\right\}$, $G_{2,p_1,\ldots,p_r,p}$ é 2-Goldbach.

Prova: Como $p > p_r$, colocando por um momento $p_{r+1} = p$, imediatamente atentamos

$$\sum_{j=1}^{u} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r+1} \left\lceil (-1)^{j+1} \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{t}{p_r} \right\rceil + \\ + \sum_{\substack{1<j<u \\ j \text{ par}}} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j} p_r} \right\rceil + \\ + \sum_{j=1}^{u} \sum_{s+1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq r} \left\lceil (-1)^{j+1} \frac{t}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} \right\rceil .$$

Sendo assim, pela proposição B, sucede que $G_{2,p_1,\ldots,p_r,p}$ é L-Goldbach, com $L \leq 2(t-1)p_0 \cdots p_s + 2$. Por outro lado, quando $3 \leq k \leq 2(t-1)p_0 \cdots p_s + 1$, há $m, n \in G_{2,p_1,\ldots,p_r}$ tais que $m + n = 2k$. Ademais, vale $m, n \leq 2k - 3 \leq 2(2(t-1)p_0 \cdots p_s + 1) - 3 = 4(t-1)p_0 \cdots p_s - 1 < pq$. Da minimalidade de q, entretanto, resulta $\{2p, \ldots, (q-1)p\} \cap G_{2,p_1,\ldots,p_r} = \emptyset$. Portanto, $m, n \in G_{2,p_1,\ldots,p_r,p}$, isto é, $G_{2,p_1,\ldots,p_r,p}$ é 2-Goldbach. ∎

Agora nos permitimos declarar: sim, podemos estabelecer seqüência $\{q_i\}$ tal que $G_{2,\{q_i\}}$ satisfaz a condição 2-Goldbach. Esta é a solução para a segunda pergunta e está logo abaixo posta mais detalhamente.

Proposição E: Sejam $p_3 > p_2 > p_1 \geq 3$ primos. Há $\{q_i\}$ seqüência crescente de primos ímpares, com $q_i = p_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, tal que $G_{2,\{q_i\}}$ é 2-Goldbach.

Prova: Sabemos que G_{2,p_1,p_2,p_3} é 2-Goldbach. Basta, então, fazer $q_i = p_i$ se $i \in \{1, 2, 3\}$ e, quando $i \geq 4$, usar a proposição D para indutivamente definir primo q_i com $G_{2,q_1,\dots,q_i}$ 2-Goldbach. Daí, repare que, se $G_{2,q_1,\dots,q_i}$ é L-Goldbach para todo $i \geq i_0$, então $G_{2,\{q_i\}}$ é L-Goldbach. Portanto, $G_{2,\{q_i\}}$ é 2-Goldbach. ∎

As indagações centrais estão respondidas. Todavia, não faz sentido atingir um cume e ignorar o panorama. Vejamos uma aplicação destes conceitos. Coloquemos para simplificar $G_{2\_\pi_s} = G_{2,\pi_1,\dots,\pi_s}$. Usando a proposição B (para $u = 1$), podemos assim resumir as estimativas para a condição L-Goldbach de alguns destes conjuntos.

Conjunto(s)	L-Goldbach com L	Parâmetros s	t
$G_2, G_{2,3}, G_{2,3,5}, G_{2,3,5,7}$	$= 2$	-	-
G_{2_11}	≤ 110	1	19
G_{2_13}	≤ 182	2	7
G_{2_23}	≤ 1.862	2	63
G_{2_29}	≤ 3.362	3	17
G_{2_47}	≤ 59.642	3	285
G_{2_53}	≤ 147.842	4	65
G_{2_73}	$\leq 1.464.542$	4	635
G_{2_79}	$\leq 3.123.122$	5	105
G_{2_109}	$\leq 84.204.122$	5	2.805
G_{2_113}	$\leq 92.912.822$	6	183
G_{2_157}	$\leq 1.666.304.642$	6	3.265
G_{2_163}	$\leq 2.638.315.682$	7	273
G_{2_211}	$\leq 84.911.086.262$	7	8.755
G_{2_223}	$\leq 103.068.905.942$	8	463
G_{2_269}	$\leq 1.187.300.254.142$	8	5.323
G_{2_271}	$\leq 4.166.482.440.122$	9	645
G_{2_337}	$\leq 87.185.585.967.482$	9	13.477
G_{2_347}	$\leq 174.086.505.432.842$	10	869

Jörg Richestein (consulte [**JR**]) completou a verificação da conjectura de Goldbach até $4 \cdot 10^{14}$. Portanto, um conjunto contendo os primos e L-Goldbach com $L \leq 2 \cdot 10^{14}$ é, em verdade, um conjunto 2-Goldbach. Com isto, obtemos que G_{2_347} é 2-Goldbach. Em outros termos, não precisamos dos compostos divisíveis por algum dos 69 primeiros primos para escrever os pares maiores que 2 como soma de dois inteiros.

Uma proposição delimita o encerramento deste artigo. Não é possível esconder a idéia de iteração que germina no lema C e vem se desenvolvendo nas proposições D e E. Por conseguinte, assinalemos um último resultado.

Proposição F: São equivalentes:

a) a conjectura de Goldbach.

b) para todo $s > 1$ inteiro, $G_{2,\pi_1,\ldots,\pi_s}$ é L-Goldbach, com $L \leq \dfrac{\pi_s^2 + 3}{2}$.

Prova: A conjectura de Goldbach impõe $G_{2,\pi_1,\ldots,\pi_s}$ 2-Goldbach. Reciprocamente, lembre que $G_{2,3}$ é 2-Goldbach. Daí, fixado $s > 1$ inteiro, empregando repetidamente o lema C, constatamos que $G_{2,\pi_1,\ldots,\pi_s}$ é, na verdade, 2-Goldbach. Em conseqüência, $G_{2,\{\pi_s\}}$, ou melhor, o conjunto dos primos satisfaz a condição 2-Goldbach. ■

Referência Bibliográfica:

[JR] J. Richestein, *Verifying the Goldbach Conjecture up to* $4 \cdot 10^{14}$, Math. Comp., **70** (2001), 1745-1749.