Figure 1: UNICAMP

Figure 2: IMECC

Geometrias Não-Euclidianas

André Devito - R.A.: 023114
Araone Koaerece de Freitas - R.A.: 023181
Kênia Cristina Pereira - R.A.: 033829

1 Resumo

Esse foi um trabalho realizado na disciplina MA 241, no segundo semestre de 2006, sob a orientação da professora Eliane Quelho Frota Rezende.

Procuramos aqui mostrar em que contexto surgiu a idéia de Geometrias Não Euclidianas, e discutir brevemente algumas destas geometrias, mais precisamente a Geometria Hiperbólica, a Geometria Elíptica (em particular a Esférica), a Geometria do Motorista de Táxi e a Geometria na Superfície De Dehn. Estas duas últimas têm o intuito de mostrar que não só os estudos sobre superfícies curvas levam a resultados diferentes dos da Geometria Euclidiana.

Em uma ação cotidiana para um pesquisador, a Geometria que é ensinada na escola não é suficiente. Diante disso, vendo a importância do ensino de Geometria Não Euclidiana, apresentamos algumas atividades que podem ser usadas e também servir como fonte de inspiração na criação de outras atividades para outros tipos de Geometrias.

2 Sumário

3 Introdução

Quando a palavra *Geometria* é mencionada, geralmente o primeiro pensamento é de que se trata da Geometria Euclidiana, visto que esta é a geometria mais intuitiva e é a primeira que se aprende, ainda na infância. Enquanto a Geometria Euclidiana inclui alguns dos mais antigos conhecimentos matemáticos, as *Geometrias Não Euclidianas* só foram largamente aceitas como legítimas no séc. XIX.

A discussão em torno do Quinto Postulado de Euclides (o postulado das paralelas) foi a grande responsável pela descoberta de tais geometrias; durante séculos, diversos matemáticos acharam que seria possível chegar ao resultado do Quinto Postulado como um teorema, utilizando os outros quatro postulados, e que portanto aquele pudesse ser descartado. Em 1733, Giovanni Saccheri, que estava empenhado em encontrar contradições em geometrias que não se utilizassem do Quinto Postulado, acabou abrindo caminho para que outros matemáticos, como Lobachevsky, Gauss e Riemann aprofundassem os estudos e descobrissem geometrias onde o postulado das paralelas não é válido, trazendo resultados muito importantes para a Matemática e a Física.

Novos conhecimentos científicos surgem diante da necessidade de mudança da situação atual, ou por acaso, quando se tenta na verdade descobrir uma outra coisa, e foi assim com as Geometrias Não Euclidianas; diante do desafio de provar o quinto postulado de Euclides a partir dos anteriores, vários matemáticos construíram diferentes tipos de Geometrias, que se baseiam em diferentes posturas diante desse postulado.

O problema de provar o postulado das paralelas somente ficou definitivamente superado, quando o matemático G. Riemann propôs uma visão global e revolucionária da Geometria, ao considerá-la como o estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaços. Ele mostrou que se a infinitude da reta fosse descartada, então, com alguns outros pequenos ajustes nos demais postulados, outra Geometria (não euclidiana) se desenvolveria.

Gauss manteve em segredo suas descobertas, pelo fato de que a filosofia de Kant dominava a Alemanha da época, e seus dogmas eram que as idéias da geometria euclidiana eram as únicas possíveis. Gauss sabia que essa idéia era totalmente falsa, mas para não entrar em conflito com os filósofos da época resolveu manter-se em silêncio.

Atualmente temos vários tipos de geometrias não euclidianas, mas a própria Geometria Euclidiana é um conteúdo pouco trabalhado na escola; geralmente é um conteúdo que fica no final do livro didático e os professores acabam alegando que não houve tempo de passá-lo. Já as Não Euclidianas, em muitos casos os próprios professores não possuem conhecimentos de nenhuma delas.

4 A Matemática Grega

Em seu auge Alexandria tornou-se um dos mais importantes centros comerciais e intelectuais da época, pois possuía o famoso farol de Alexandria, a universidade e a biblioteca descomunal, que foi durante muito tempo o maior depósito de conhecimento de todo o mundo, chegando a ter mais de 600000 pergaminhos. Também foi um centro cosmopolita chegando a ter 500000 habitantes, número este que supera a maioria das cidades existentes no mundo hoje. Ao pensar nessa quantidade de pessoas, é preciso pensar também nos problemas referentes a transporte, distribuição de água, saneamento e organização como um todo, e não esquecer que estamos falando de uma cidade construída a mais de 2300 anos.

Após a derrota de Atenas em Queronéia (338 a.C.) a Grécia tornou-se parte do império macedônio. Dois anos após a queda dos estados Gregos, Filipe foi sucedido por seu filho Alexandre (O Grande). Na trilha de suas conquistas foram fundadas várias cidades, sempre em locais estratégicos; uma destas cidades foi Alexandria, fundada em 332 a.C. no Egito.

Num local extremamente bem situado, entroncamento das mais importantes rotas comerciais da época, a cidade prosperou rapidamente e se tornou grande metrópole e centro comercial. Alexandre morre em 323 a.C. e seu império se divide entre alguns de seus generais, resultando na formação de 3 estados. O Egito ficou sob comando de Ptolomeu, e Alexandria foi escolhida como capital. Para atrair os sábios da época, Ptolomeu empreendeu a construção da universidade de Alexandria. Obra incomparável em sua arquitetura e planejamento, primeira em seu gênero, assemelha-se em estrutura e objetivos às atuais universidades. Seu maior patrimônio era a biblioteca que por muito tempo foi o maior repositório de registros culturais de todo o mundo. Para formar uma equipe com os mais valorosos homens do conhecimento de sua época, Ptolomeu recorreu a Atenas, e Demétrio de Faleron foi convidado para dirigir a grande biblioteca de Alexandria. Juntamente com ele vieram homens de vulto em todas as áreas do conhecimento. Euclides, provavelmente oriundo de Atenas, foi escolhido para liderar o departamento de matemática. Neste cenário, por volta de 300 a.C. Euclides desenvolveu seu mais importante trabalho, que seria eternizado com o nome de *Os Elementos*. Cinco obras de Euclides chegaram até nós. Além dos Elementos temos: *Os Dados*, *Divisão de Figuras*, *Os Fenômenos* e *Óptica*.

Pouco se sabe sobre Euclides e sua vida, acreditando-se que sua formação matemática tenha se dado na Escola Platônica de Atenas. Para se ter uma idéia do quanto é dificultoso situá-lo na história, podemos citar Proclo (410-485), comentador dos Elementos e autor do Sumário Eudemiano. Este documento é a principal fonte de informações sobre a geometria grega e, apesar de Proclo ter vivido no século V d.C, é provável que teve acesso a muitos documentos que se perderam, entre estes o que parece ser uma história completa da geometria grega abordando um período anterior a 330 a.C. Este trabalho teria sido supostamente elaborado por Eudemo, discípulo de Aristóteles, e o nome Sumário Eudemiano foi assim batizado por utilizar esta fonte como principal. Proclo diz que Euclides precedeu Arquimedes (287-212 a.C.), pelo fato de Arquimedes citar os Elementos, e também diz que Euclides é posterior a Eudoxo e Teeteto, pois os Elementos incorporam os trabalhos destes últimos. Proclo ainda usa uma história ligando Euclides e um Rei Ptolomeu, e conclui que este rei deve ser Ptolomeu I. Uma confusão comum é identificar os Elementos a um tal Euclides de Megara, o que é um erro, pois Euclides de Megara era um discípulo de Sócrates.

A respeito da personalidade de Euclides são contadas algumas histórias curiosas; a primeira contada por Proclo (consta em seu Sumário Eudemiano), sobre a resposta que Euclides teria dado ao rei Ptolomeu I que o questionou se não havia um caminho mais curto para o conhecimento geométrico: *Não há estradas reais na Geometria*, teria respondido Euclides. Outra história diz que Euclides, indagado por um aluno sobre a utilidade prática da matéria que estava sendo vista, teria ordenado a seu escravo que desse a este aluno uma moeda, para que tivesse algum ganho com o que estava aprendendo. Papus (290-350) elogia Euclides por sua modéstia e consideração para com os outros.

Os Elementos de Euclides versam sobre questões introdutórias de matemática geral, e a afirmação de que os Elementos tinham como objetivo conter essencialmente toda a geometria plana e sólida conhecida da época, é considerada falsa por vários autores. Afirma-se que Euclides sabia muito mais geometria do que a que está contida nos Elementos. Segundo Proclo, os gregos definiam os elementos de um estudo dedutivo como sendo os teoremas básicos e gerais sobre o assunto; esta definição era comparável a das letras do alfabeto em relação à linguagem. Euclides foi chamado por seus sucessores como *o Elementador*.

Os Elementos são compostos por 13 livros contendo 465 proposições. Como antigamente era comum atribuir a autores de sucesso obras que não eram suas, algumas versões dos Elementos apareceram com um décimo quarto e até um décimo quinto livro, mas provou-se que estas obras não pertenciam a Euclides.

A obra se propõe a deduzir todas as 465 proposições a partir de 10 afirmações iniciais; na verdade são 23 definições, 5 postulados e 5 noções comuns, conforme os trabalhos de Heilberg. Segundo alguns historiadores, seu objetivo era apresentar a teoria de semelhança elaborada por Eudoxo e culminar com a apresentação da teoria dos sólidos de Platão e dos números racionais de Teeteto.

O sucesso dos Elementos é devido à sua forma de apresentação sistemática utilizando método postulacional ou axiomático, e o conteúdo abrangente tratado como um todo inter-relacionado. Talvez o maior legado dos matemáticos Gregos tenha sido o método postulacional ou axiomático de raciocínio. Os gregos sabiam que nem tudo poderia ser provado, assim seria necessário estabelecer (admitir como verdadeiro) um início, para não se cair em circularidade. Este início (as afirmações iniciais admitidas como verdades, sem necessidade de provas), é o que chamamos de axiomas ou postulados, e todo o mais que vier a ser dito deve ser provado com base nestas afirmações iniciais e nas regras básicas do silogismo; eis a essência do raciocínio postulacional, axiomático ou, se preferir, dedutivo.

Os gregos faziam distinção entre axioma (por eles também chamado de noção comum) e postulado, segundo (pelo menos) às três vertentes descritas a seguir:

- um axioma é uma afirmação assumida como auto-evidente e um postulado é uma construção de algo assumido como auto-evidente; desta forma relacionamos axiomas e postulados como teoremas e problemas de construção;
- um axioma é uma suposição comum a todas as ciências; um postulado é uma suposição particular e peculiar da ciência em estudo;
- um axioma é uma suposição de algo que é ao mesmo tempo óbvio e aceitável para o aprendiz; postulado é uma suposição que não é necessariamente nem óbvia e nem aceitável para o aprendiz.

Atualmente não se faz distinção entre os dois termos. Tudo indica que Euclides deve ter preferido a vertente número 2, e assumiu algo equivalente a dez suposições que citamos abaixo, sendo cinco delas noções comuns e as outras cinco postulados referentes à geometria em questão.

Axiomas ou Noções Comuns:

- coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;
- se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais;
- se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais;
- coisas que coincidem uma com a outra são iguais;
- o todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados:

- uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade;
- uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente;
- um círculo pode ser traçado com centro e raios arbitrários;
- todos os ângulos retos são iguais;
- se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto deste mesmo lado.

Se pode notar a diferença com relação à concisão e obviedade do quinto postulado em relação aos outros. Ele será o pivô de toda a discussão até chegarmos às Geometrias Não Euclidianas. Devido ao caráter nada simples do quinto postulado, vários matemáticos passaram a acreditar que ele poderia ser deduzido dos quatro primeiros ou substituído por outro.

Sobre os Elementos, disse Einstein numa certa ocasião: *Quem não soube entusiasmar-se por este livro em sua juventude, não nasceu para pesquisador teórico.* O trabalho de reconstituição das obras gregas é quase comparável ao dos melhores detetives. Muitas são as dificuldades, os mais antigos textos gregos na verdade são cópias de cópias sucessivas. Nenhuma versão original dos Elementos chegou até nós; suas edições se basearam em revisões e comentários do grego Têon de Alexandria (335 d.C). Proclo escreveu, no século V, comentários sobre o primeiro livro dos Elementos, e neste também são encontradas informações sobre os livros e a vida de Euclides.

A revisão de Têon de Alexandria foi, até 1808, a mais antiga edição dos Elementos. Nesta mesma época, Napoleão ordenou que os manuscritos das bibliotecas da Itália fossem tomados e enviados para Paris. F. Peyrard encontrou na biblioteca do Vaticano uma cópia do século X de uma edição da obra que é, segundo Eves, anterior a revisão de Têon. Uma revisão minuciosa deste material foi feita e constatou-se que o material introdutório do trabalho original de Euclides sofreu alterações nas revisões que se seguiram, mas os teoremas e demonstrações, com exceção de pequenas supressões, aparecem como Euclides deveria tê-los escrito. Todos os manuscritos com exceção de um, parecem ter sido originados de Têon de Alexandria; um deles porém estava livre dos erros da edição de Têon. Heilberg desta forma reconstituiu o texto original de Euclides tão fiel quanto possível, e o publicou entre 1883 e 1888. Esta edição se tornou a base de todas as traduções posteriores, por exemplo, a clássica tradução inglesa de Heath.

5 O Quinto Postulado

Basta passar os olhos no quinto postulado e compará-lo com os demais para percebermos algumas diferenças. Já em sua época o ainda não tão famoso quinto postulado despertou a atenção dos contemporâneos de Euclides. Todos os postulados de 1 a 4 pareciam sucintos e até auto evidentes, e de repente nos deparamos:

Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto deste mesmo lado.

Além da falta de simplicidade e concisão em relação aos outros postulados, Euclides propositalmente o vai deixando de lado para demonstrar suas proposições e acaba utilizando-o somente na proposição $I29$, de modo que as vinte e oito primeiras proposições do livro I são verdadeiras numa geometria em que $P5$ não é válida. Alguns autores consideram que Euclides poderia ter utilizado o quinto postulado já na proposição $I17$, a qual teria se tornado mais simples e também facilitado raciocínios posteriores.

A proposição $I29$ onde se utilizou o quinto postulado é a seguinte:

Quando uma linha reta corta duas paralelas formam-se ângulos alternos internos iguais, ângulos correspondentes iguais e ângulos interiores de um mesmo lado iguais a dois retos.

É importante dizer o que Euclides entendia por paralelas; isto aparece como definição 23:

Linhas retas paralelas são linhas retas que, estando no mesmo plano e sendo prolongadas indefinidamente em ambas as direções, não se encontram em qualquer das direções.

Pela definição de Euclides, o conceito de linhas retas paralelas está desvinculado da noção de eqüidistância. Como se já não bastasse tudo isto, a proposição $I28$ abaixo enunciada pode ser entendida como a afirmação inversa do quinto postulado, o que fez alguns historiadores considerarem que Euclides o colocasse como postulado por não conseguir demonstrá-lo.

$I27$ - *Se uma linha reta corta duas outras formando ângulos alternos internos iguais, então as duas linhas retas são paralelas.*

A prova desta proposição é simples conseqüência da proposição $I16$, que é chamado teorema do ângulo externo. Se as retas se encontrassem (não fossem paralelas), teríamos um triângulo com um ângulo externo igual a um dos ângulos internos não adjacentes.

$I28$ - *Se uma linha reta corta duas outras formando ou ângulos correspondentes iguais ou ângulos interiores do mesmo lado iguais a dois ângulos retos então as duas linhas retas são paralelas.*

O cenário está montado para que todos nossos colegas matemáticos, desde a época de Euclides, saíssem tentando mostrar que o quinto postulado era, na verdade, um teorema que poderia ser deduzido das outras afirmações iniciais. O fato de não se conseguir uma tal prova abre a possibilidade de existirem outras geometrias diferentes da Euclidiana, o que até então era visto como impossível, pois contrariava o senso comum, a intuição e o observado na natureza, não se tratando de um simples capricho dos matemáticos.

Nesta busca da prova do quinto postulado foram geradas muitas afirmações equivalentes a ele, afirmações estas chamadas de substitutos. As 23 definições de Euclides, as cinco noções comuns, os quatro primeiros postulados e mais a proposição substituta, nos dá uma teoria axiomática que coincide com a geometria de Euclides.

O matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819) colocou em seu texto de geometria o substituto mais comum nos atuais livros de geometria:

Por um ponto fora de uma reta dada não há mais que uma paralela a essa reta.

Outras alternativas ao postulado das paralelas são:

- há pelo menos um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual a um ângulo raso;
- existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes;
- existe um par de retas eqüidistantes
- por três pontos não colineares pode-se traçar uma circunferência;
- por qualquer ponto no interior de um ângulo de medida menor que 60^o pode-se sempre traçar uma reta que intersecta ambos os lados do ângulo.

O fato é que por quase dois mil anos os matemáticos tentaram provar o postulado das paralelas a partir dos demais postulados. Cedo ou tarde foi apontado erro nas demonstrações que vieram a ser dadas.

Alguns matemáticos que se empenharam na busca de uma prova do quinto postulado:

- Posidonius e Geminus (século I a.C.)
- Ptolomeu (87-165)
- Proclo (410-485)
- Aganis (século VI)
- Al-Nirizi (século IX)
- Nasiredin (1201-1274)

É interessante salientar que as versões dos Elementos que chegaram a Europa feitas a partir de cópias árabes dos séculos XII, $XIII$ e mesmo as dos séculos XV e XVI com base em textos gregos não tinham notas críticas com relação ao quinto postulado. Estas apareceram somente nos séculos XVI e $XVII$ com a tradução dos comentários de Proclo impressos pela primeira vez em Basle (Suíça) em 1533, e depois em Pádua (Itália) em 1560 numa tradução latina de Barozzi. Abaixo citamos os matemáticos da Europa que escreveram trabalhos críticos sobre o quinto postulado.

- Frederico Comandino (1509-1575, Itália)
- Chistopher S. Clavio (1537-1612, Alemanha)
- Pietro A. Cataldi (1548-1626, Itália)
- G.A. Boreli (1608-1679, Itália)
- Giordano Vitale (1633-1711, Itália)
- J. Wallis (1616-1703, Inglaterra)
- Girolamo Saccheri (1667-1733, Itália)
- Johann Heinrich Lambert (1728-1777, Suiça) / Adrien Marie Legendre (1752-1833, França)
- Nicolai Lobachevsky (1792-1856, Russia)
- Farkas Bolyai (1775-1856, Hungria)
- Janos Bolyai (1802-1860, Hungria)
- Beltrami(1835-1900, Itália)
- Arthur Cayley (1821-1895, Inglaterra)
- Felix Klein(1849-1925, Alemanha)
- Henri Poincaré (1854-1912, França)
- Georg Bernhard Riemann (1826-1866, Alemanha)

6 Noção De Curvatura

Segundo os historiadores da matemática, Boyer (1974) e Eves (1993), até o século XIX, a Geometria Plana descrevia o mundo com aproximação. Mas no que se refere a distâncias inter-galácticas ou subatômicas, os modelos euclidianos não são suficientes: são necessários outros tipos de geometria, seja hiperbólica ou esférica. Para uma compreensão das geometrias hiperbólica e elíptica, faz-se necessário compreender a noção de curvatura.

Tal noção de curvatura se acha intimamente ligada à noção de *círculo osculador*. Imaginemos um círculo de centro O e raio r variável. Quanto maior for r, tanto mais o arco perderá a sua curvatura, aproximando-se da reta r. Assim, a curvatura será tanto menos acentuada quanto maior for r. Do mesmo modo, a curvatura será tanto mais acentuada, quanto menor for o raio r. Diz-se que a curvatura de um círculo é o inverso de seu raio.

$$curvatura = \frac{1}{r}$$

Conhecendo a curva de um círculo, vamos definir a curvatura de uma curva C qualquer num de seus pontos P. Suponhamos que em P a curva C admita uma tangente x. Podemos traçar um círculo de raio r qualquer, que passe por um ponto Q da curva C e seja tangente em P. O arco $\overline{PQ}$ do círculo assume tanto mais a forma do contorno C, quanto mais próximo Q se acha de P. Somos conduzidos a dizer que, à medida que Q tende para o ponto P, a curvatura do círculo tende para a curvatura da curva C. Se esse círculo-limite existir (o que acontece na maioria das curvas), a sua curvatura será igual à da curva C. Tal círculo recebe o nome de *círculo osculador*. É como se quiséssemos afirmar que ele *beija* a curva C em P (Figura 3). Portanto:

$$curvatura_C = \frac{1}{r_{circuloosculador}}$$

Figure 3: Círculo Osculador

A curvatura de uma superfície é definida quase da mesma maneira que uma curva. Apenas devemos ter o cuidado de notar que a curvatura de uma superfície num ponto não tem que ser a mesma em todas as direções. Isso pode ser observado numa montanha, que apresenta diversas curvaturas em várias direções.

Agora que já temos uma noção de curvatura, podemos dizer que há dois tipos clássicos de geometrias não-euclidianas: a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica.

Na Geometria Hiperbólica, o quinto postulado de Euclides é substituído pelo Postulado de Lobachesvky:

Por um ponto fora de uma reta dada passa mais de uma paralela a essa reta.

Na Geometria Elíptica, o quinto postulado é substituído pelo Postulado De Riemann:

Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro.

Isto é equivalente a dizer que não existe reta paralela. Note em ambos postulados a semelhança das palavras e a sutil diferença com relação ao postulado substituto de John Playfair, visto anteriormente.

Acostumados às nossas experiências, fica difícil imaginar as situações descritas por essas geometrias. Aceitam-se melhor tais possibilidades, usando superfícies nas quais visualizam-se modelos para tais geometrias.

A *pseudo-esfera* e a *esfera* são as superfícies tridimensionais adequadas à modelagem, respectivamente, das geometrias planas Hiperbólica e Elíptica. A esfera e a pseudo-esfera têm, a primeira, curvatura positiva e, a segunda, curvatura negativa. O plano, superfície de curvatura nula, está ligado à Geometria Euclidiana que pode ser considerada o meio termo entre as duas clássicas Geometrias Não-Euclidianas.

7 Geometria Hiperbólica

Esta geometria foi desenvolvida, independentemente, por Nicolai Lobachevsky e, quase que simultaneamente, por Janos Bolyai.

Nicolai dedicou mais de vinte anos à sua descoberta; a primeira apresentação pública de seu trabalho foi feita à Sociedade de Física-Matemática da cidade de Kazan, em 1826, sem nenhuma aceitação; suas afirmações punham em dúvida a inquestionável Geometria de Euclides.

Janos, em carta a seu pai Farkas Bolyai escrevia em 1823: *Resolvi publicar um trabalho sobre a teoria das paralelas tão logo tenha o material organizado... o objetivo ainda não foi alcançado, mas tenho feito descobertas maravilhosas que quase sou esmagado por elas... do nada criei o universo.* Em contrapartida, Farkas, que passou a vida inteira tentando provar o postulado das paralelas, quando soube que seu filho também estava absorvido pelo problema, escreveu-lhe: *Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema, tanto isto quanto as paixões sensuais, porque isso também pode tomar todo seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida!.*

Bolyai não mostrou nenhuma indecisão nas suas convicções, porém não aprofundou as suas idéias, como o fez o russo Lobachevsky, que foi o primeiro a expor publicamente as suas descobertas em um número de *papers*, culminando com sua *Pangeometria* de 1855, que foi ditada, pois já se achava velho cego, provando, no entanto, a força de sua mente e a confiança na sua criação. Por isso, esta geometria é também conhecida por Geometria de Lobachevsky.

Lobachevsky, por suas idéias revolucionárias, rivalizou-se com o criador da Teoria Heliocêntrica do Sistema Solar, sendo por isso chamado de Copérnico da Geometria.

Como vimos anteriormente, a Geometria Hiperbólica utiliza o Postulado de Lobachevsky (por um ponto fora de uma reta dada passa mais de uma reta paralela à reta dada), ao invés do quinto postulado de Euclides. Mais ainda, diz-se que, por um ponto P não pertencente à reta r dada, passam infinitas retas que não interceptam r; porém apenas duas dessas retas são chamadas *paralelas*; as demais retas são chamadas *não-secantes* a r. Tais afirmações podem ser visualizadas na superfície da pseudo-esfera.

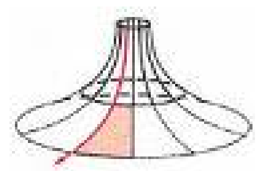

Figure 4: Pseudo-Esfera

Um modelo plano para a Geometria Hiperbólica foi apresentado pelo matemático Felix Klein. Trata-se de um círculo no plano euclidiano, e é considerado apenas o interior do círculo; tal círculo é chamado de plano de Lobachevsky. As retas desse plano são as cordas do círculo excluindo suas extremidades. Assim, dada a reta AB e o ponto P fora dela, as retas AP e BP são paralelas a AB; as infinitas retas que passam por P e situadas no interior do ângulo θ, são as retas não-secantes.

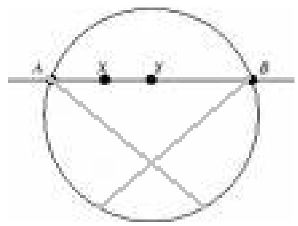

Figure 5: Modelo de Klein

Para complementar o modelo, é preciso que as retas tenham uma extensão infinita dentro de uma área finita. Vence-se a dificuldade introduzindo uma unidade de medida variável, isto é, seu tamanho diminui na proporção que se aproxima da fronteira do plano (circunferência do círculo). Com esse expediente a extensão de uma reta (no modelo, uma corda) torna-se infinita, pois se insistirmos em medi-la, não conseguiremos atingir a *extremidade* da corda, porquanto a nossa unidade de medida vai encolhendo numa razão tanto maior quanto mais próximos estivermos da fronteira. Por exemplo, se começamos *medir a reta* com meia unidade, e tal unidade de medida diminui na razão 2, isto é,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

nunca conseguiremos atingir a unidade.

Alguns resultados que podem ser obtidos, na Geometria Hiperbólica, pelo Modelo de Klein, por exemplo, são:

- o ângulo de paralelismo é agudo;
- o ângulo de paralelismo é variável, ou seja, depende da distância do ponto P à reta AB;
- duas retas distintas e perpendiculares à reta AB formam um quadrilátero $PQMK$, que vem a ser o *retângulo* da Geometria Hiperbólica; como conseqüência desse retângulo, extrai-se um resultado característico dessa geometria: a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180^o.

Outro modelo plano para tal geometria é o Modelo de Poincaré; sua diferença com relação ao modelo anterior diz respeito às retas: nesse modelo, as retas são arcos de círculos perpendiculares ao círculo considerado.

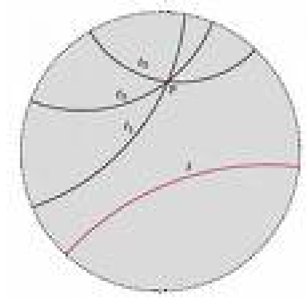

Figure 6: Modelo de Poincaré

Alguns resultados com relação aos triângulos também são obtidos na Geometria Hiperbólica; porém, antes de enunciarmo-los, vamos apresentar algumas definições.

Sabe-se que duas retas paralelas não têm ponto comum; porém, diz-se que elas se encontram num *ponto ideal* (no Modelo de Klein, este ponto seria a extremidade da *corda*, e estaria sobre o círculo). Assim, ponto ideal é o ponto de encontro entre duas retas paralelas. Da mesma maneira, ponto ultra-ideal é o ponto de encontro entre duas retas não-secantes (também chamado *ponto gama*). Um *triângulo ômega* é o triângulo com um dos vértices num ponto ideal. Note que é possível haver triângulos com dois ou até três vértices em pontos ideais.

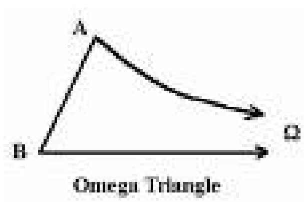

Figure 7: Triângulo Ômega

Com relação aos triângulos ômegas, demonstram-se os seguintes resultados:

- se uma reta corta um triângulo ômega por um de seus vértices, ou por um outro ponto que não um vértice, então intercepta o lado oposto;
- para qualquer triângulo ômega $AB\Omega$ as medidas dos ângulos exteriores formados pelo prolongamento de AB são maiores do que as medidas dos ângulos opostos interiores.

Note que o Postulado de Pasch e o Teorema do Ângulo Externo valem na

Geometria Hiperbólica, também para triângulos ômegas. Com relação aos casos de congruência de triângulos, demonstram-se também:

- dois triângulos ômegas $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$; são congruentes se os lados de extensão finita são congruentes e se o par de correspondentes ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{A}'$ ou $\widehat{B}$ e $\widehat{B}'$ são congruentes;

- dois triângulos ômegas $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$; são congruentes se os dois pares de ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{A}'$, $\widehat{B}$ e $\widehat{B}'$ são congruentes;

Agora analisando os quadriláteros da Geometria Hperbólica, temos as seguintes definições: *Quadrilátero de Saccheri: tem dois ângulos retos e dois lados congruentes*; *Quadrilátero de Lambert: tem três ângulos retos.* Os resultados mais importantes são:

- o segmento que une os pontos médios da base e do topo do Quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos;

- os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são congruentes e agudos;

- a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor que 180^o;

- dois triângulos são congruentes se os três correspondentes pares de ângulos são congruentes.

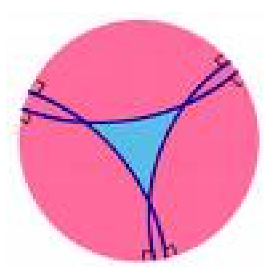

Figure 8: Triângulo Hiperbólico

Outro resultado importante, porém não relacionado diretamente com os quadriláteros, é o seguinte:

- retas não-secantes, além de terem um ponto gama em comum, têm a surpreendente propriedade de possuírem uma reta perpendicular comum, e mais: prova-se que esta perpendicular comum é única e não poderia ser de outra forma, pois do contrário teríamos o retângulo da Geometria Euclidiana, que não existe na Geometria Hiperbólica.

Agora que temos noção de quadrilátero, sabemos que não existe quadrado (ou retângulo) na Geometria Hiperbólica; assim, tal geometria lança mão do triângulo como unidade de área, e temos a seguinte definição: *dois polígonos são equivalentes se podem ser divididos no mesmo número finito de pares de triângulos congruentes.*

Por fim, com relação às curvas, sabe-se que toda a teoria dos círculos que depende do quinto postulado de Euclides não é mais válida. Assim, surgem dois tipos de lugares geométricos na geometria de Lobachevsky: *curva limitante* e *curva eqüidistante*. A primeira, é a trajetória ortogonal de um feixe de retas com vértices num ponto ideal, isto é, a curva descrita por um vetor, cuja direção é sempre perpendicular a cada uma das infinitas retas do feixe; a segunda, é a trajetória ortogonal de um feixe de retas com uma perpendicular comum, ou seja, é a trajetória dada por um vetor cuja direção é sempre perpendicular a cada uma das retas do feixe e a mesma distância da perpendicular comum a essas retas.

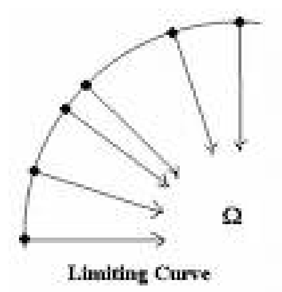

Figure 9: Curva Limitante

8 Geometria Elíptica

Após a Geometria Hiperbólica, surgiu a possibilidade de novas geometrias; foi então que o matemático alemão Riemann criou a Geometria Elíptica.

Uma Geometria Elíptica (conhecida também como Geometria Riemanniana) é uma geometria tal que, dada uma reta L e um ponto P não pertencente a L, não existe reta paralela a L passando por P.

Modelos de geometria elíptica incluem a *Geometria Projetiva*, a *Geometria Estereográfica* (modelos estes que não serão tratados aqui) e a *Geometria Hiperesférica*.

Na geometria hiperesférica, os pontos do espaço elíptico n-dimensional são os versores pertencentes a $\Re^{n+1}$, ou seja, os pontos na superfície da hiperesfera de raio unitário de dimensão $n+1$, e as retas neste modelo são hipercírculos máximos (que são intersecções da hiperesfera com subespaços da hipersuperfície). Vamos considerar aqui um caso particular deste tipo de geometria (de fácil visualização), que é a *Geometria Esférica*.

Nesta geometria, abandona-se a noção de *estar entre* e a reta não é mais infinita como na Geometria Euclidiana, mas sim, ilimitada.

Tal geometria foi considerada pela primeira vez na aula inaugural pronunciada em 1851 por Riemann para sua admissão como professor-adjunto na Universidade de Göttingen. Na verdade, Riemann, na ocasião, apontou as possibilidades de outras geometrias e, conseqüentemente, outros espaços, o que motivou, a partir de então, os nomes *geometrias* ou *espaços de Riemann*.

Conforme fora visto anteriormente, tal geometria usa o Postulado de Riemann (*Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro*) no lugar do quinto postulado de Euclides. Um modelo ideal de visualização é a superfície esférica; nela, as *retas* seriam as geodésicas ou círculos máximos da superfície. Observa-se, entretanto, que tais círculos máximos se interceptam em dois pontos; evita-se esse inconveniente considerando idênticos os dois pontos.

Deste modo, diz-se que duas retas interceptam-se em pontos antípodas (extremidades de um mesmo diâmetro da esfera). Uma reta perpendicular a duas outras é a polar comum de tais pontos antípodas, e esses dois pontos são os *pólos* da reta. A distância de cada um desses pontos à reta polar é constante. Nota-se que duas retas secantes têm uma única reta perpendicular em comum. Observa-se também que as retas têm comprimento finito e constante, equivalente a quatro vezes a distância polar.

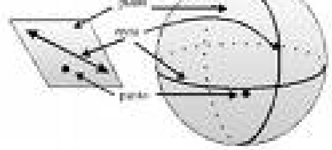

Figure 10: Retas Perpendiculares

O uso do modelo esférico ajuda a explicar o que significa uma reta ilimitada. Embora um círculo máximo na esfera, representando uma reta da Geometria Elíptica, tenha um comprimento finito, não pode ser enclausurado por uma curva da superfície.

Resultados importantes desta geometria são:

- o segmento que liga os pontos médios da base e do topo de um Quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos;
- os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são congruentes e obtusos;
- o Quadrilátero de Lambert tem o seu quarto ângulo obtuso e os lados do quadrilátero adjacentes a esse ângulo são maiores do que os correspondentes lados opostos;
- a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é maior do que 180^o;
- a soma das medidas dos ângulos de qualquer quadrilátero é maior do que 360^o.

Sabe-se que a geometria de Riemann tem importante aplicação prática: a navegação marítima. No sentido de incentivar uma pesquisa mais aprofundada neste tema, iremos aqui, nos limitar a algumas definições importantes.

Se um plano corta uma esfera, a sua interseção com essa esfera é um círculo máximo ou círculo menor; se o plano passa pelo centro da esfera, trata-se de um círulo máximo; caso contrário, trata-se de um círculo menor.

Dados dois pontos A e B sobre uma esfera, a distância entre esses pontos é a menor porção do círculo máximo que contém tais pontos.

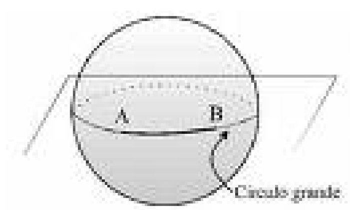

Figure 11: Círculo Máximo e Distância Entre A e B

Ângulo esférico é a intersecção de dois círculos máximos, e tem a mesma medida do ângulo plano formado pelas tangentes tiradas do ponto de intersecção.

Se A, B e C são três pontos distintos e não pertencentes ao mesmo círculo máximo, a figura formada pelos arcos de círculos máximos que unem esses pontos dois a dois é denominada *triângulo esférico*.

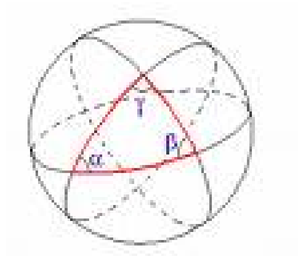

Figure 12: Ângulo e Triângulo Esféricos

Tais conceitos e outros são usados constantemente por marinheiros, seja na busca por melhores rotas, melhores estratégias de ataque, etc., e portanto, esta geometria é a mais recomendada quando se quer estudar a superfície do planeta (por exemplo), embora este não seja exatamente esférico.

9 Geometria Do Motorista De Táxi

Eis aqui um exemplo de uma geometria simples, que não teve origem no mesmo contexto histórico que as geometrias hiperbólica e elíptica (apresentadas anteriormente), e, talvez por isso, não tenha a mesma importância ou aplicação (na prática), mas que é, mais um exemplo dentre a infinidade das geometrias que passaram a existir, a partir de uma axiomática bem próxima da axiomática euclidiana.

Da problematização do motorista de táxi que apanha um cliente num ponto e deve levá-lo a outro, surge a Geometria do Motorista de Táxi. Isto porque, em geral, as ruas são perpendiculares umas às outras, havendo edifícios, casas, construções, etc., entre as ruas, fazendo com que o motorista percorra (quase sempre) direções perpendiculares, e não a menor distância euclidiana. Desta forma, a Geometria do Motorista de Táxi (GMT) acaba sendo uma geometria não-euclidiana, no sentido de que a noção de distância não é a mesma. Essa mudança origina conseqüências importantes nesta geometria, e implica numa alteração em seus axiomas fundamentais.

Vejamos agora algumas características da tal GMT. Sejam (a_1, b_1) e (a_2, b_2) respectivamente as coordenadas dos pontos de origem e destino do motorista. Então, a menor distância (segundo à geometria euclidiana), a ser percorrida pelo motorista, seria dada por $d_E = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$; já na GMT, tal distância é dada por $d_T = |a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|$. É interessante notar que a geometria euclidiana admite apenas um percurso minimizado, enquanto a GMT, normalmente, admite vários.

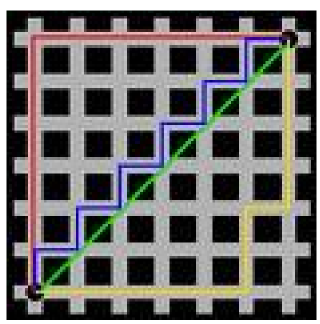

Figure 13: Noção de Distância

Agora partindo das definições, pode-se encontrar a representação de várias *entidades* geométricas de acordo com a GMT. Por exemplo, sabe-se que circunferência é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de um centro C qualquer; traçando a circunferência de acordo com a noção de distância da GMT, (numa quadrícula, de preferêcia, de modo a facilitar o trabalho), encontra-se uma figura idêntica a um quadrado (na representação euclidiana). Também por definição, mediatriz é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos extremos de um segmento $\overline{AB}$ dado. Há várias representações para a mediatriz na GMT; numa delas, forma-se uma reta idêntica à representação euclidiana; em outra, a mediatriz de um segmento se transforma em duas semi-retas e um segmento; em outra, há um segmento e duas superfícies (planas).

Analogamente, pode-se tentar encontrar todas representações existentes na geometria euclidiana, verificando-se uma a uma, para a noção de taxidistância. Partindo-se das definiões das cônicas, por exemplo, encontramos um conjunto de seis segmentos para representar uma elipse, duas superfícies planas para representar uma hipérbole, enquanto que a parábola é visualizada com dois segmentos e duas semi-retas.

Por fim, é de extrema importância ressaltar também que, estudos sobre a GMT, cuja origem axiomática fora semelhante aos axiomas de Euclides, revelam que apenas um resultdo da geometria euclidiana não é verificado pela GMT: o caso de congruência de triângulos *lado-ângulo-lado* (L.A.L.). Assim, a não validade deste resultado violaria a hipótese de a GMT ser considerada uma geometria do tipo euclidiana, logo, ela também não o é.

10 Superfície De Dehn

A superfície de Dehn consiste no conjunto formado por todos os pontos (x, y) tais que x e y sejam números hiperreais finitos. Neste caso, ainda é válido que duas retas s e t cortadas por uma transversal nos pontos P e Q com a soma dos ângulos de um mesmo lado resultando em um reto sejam paralelas; porém, se o desvio de uma das retas em relação à transversal por infinitesimal (uma reta s'), as duas retas s' e t se interseccionam em um ponto que não se encontra na parte finita do plano. Como a supefície é restringida somente a valores de x e y finitos, obtém-se uma geometria onde existe mais de uma paralela à reta t que passa pelo ponto P (que está fora desta), e portanto, o postulado das paralelas não é válido.

11 Geometria Absoluta

Geometria Absoluta é uma geometria que não assume o postulado das paralelas nem qualquer uma de suas alternativas. Por esse motivo é também conhecida como Geometria Neutra (para expressar a neutralidade quanto ao paralelismo), e é fácil perceber que tanto as Geometrias Euclidianas quanto as Não Euclidianas são casos particulares dela. Todos os teoremas da Geometria Absoluta devem ser válidos tanto para Euclidianas quanto Não Euclidianas, e portanto, existem proposições indecidíveis presentes, fazendo com que esse tipo de Geometria constitua um exemplo de Sistema Postulacional Incompleto.

12 Sugestão De Atividades

Atividade 1 - Construção sobre a esfera

Figure 14: Atividade 1

- Desenhe dois pontos distintos sobre sua esfera. Chame-os de A e B.
- Desenhe um grande círculo interno que passe através desses dois pontos.

Questões

- Quantos arcos conectam os pontos A e B?
- Use a medida marcada sobre sua régua esférica para medir o comprimento de cada arco em graus.
- Qual é a distância entre os pontos A e B?
- Qual é a medida do arco que preferiu como distância? Explique por que você preferiu essa medida.
- Descreva um par de pontos sobre a esfera entre os quais é possível medir a distância mais curta.
- Há um par de pontos sobre o plano entre os quais é possível medir a distância mais longa que um segmento que os une?
- Como é a mais longa distância possível entre os dois pontos sobre o plano?
- Como é a mais longa distância possível entre dois pontos sobre a esfera?
- Como é a mais curta distância entre dois sobre o plano?
- Como é a mais curta distância entre dois pontos sobre a esfera?

Atividade 2 - Soma dos ângulos exteriores de um triângulo

- Estenda os lados do triângulo plano e construa todos os três ângulos exteriores.
- Então use seu transferidor plano para achar suas medidas e adicioná-las.

Questões

- Qual é a soma dos ângulos exteriores?
- Agora faça o mesmo como um triângulo esférico e seu transferidor de disco. O que você achou? Qual é a soma dos ângulos exteriores do triângulo na esfera?
- Qual é a soma dos ângulos exteriores de um triângulo sobre o plano?
- Agora, faça o mesmo com um triângulo esférico, usando o transferidor de disco. O que você encontrou? Qual é a soma dos ângulos exteriores de um triângulo sobre a esfera?
- Compare os resultados em a e b. Houve alterações? Justifique sua resposta.

Atividade 3 - Fuso Horário

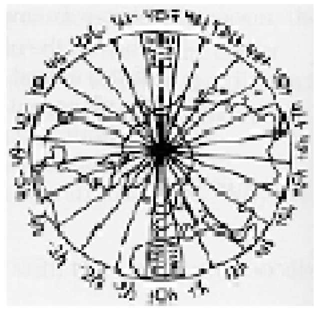

Figure 15: Atividade 3

- Você já ouviu dizer que quando no Brasil é dia, no Japão é noite? Discuta com seus colegas por que isso ocorre. Essas diferenças de horário podem ser calculadas através deste esquema:

Questões

- Sabendo que cada fuso que você avança para oeste deve diminuir 1 hora, calcule que horas são em Brasília quando em Dakar (Senegal, Norte da África) são 12 horas. De quantas horas é a diferença de horário?

- Como poderia um avião partir de Hong Kong na quinta-feira e aterrissar em São Francisco na quarta-feira? Localize essas cidades no mapa, discuta com seus colegas essa possibilidade e anote suas conclusões.

Atividade 4 - Onde você está no mundo?

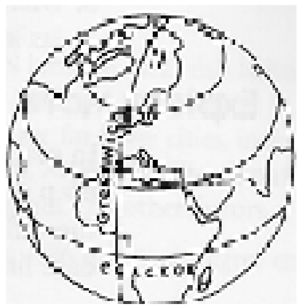

Figure 16: Atividade 4

- Construindo o sistema de coordenadas sobre o seu globo: Os círculos sobre seu globo, paralelos para ao Equador, são chamados Latitudes ou Paralelos. O nome de latitude é o nº de graus que se encontram ao norte e ao sul do Equador. Usando uma canetinha, contorne a linha de Equador e marque zero grau (0º) de latitude.

- As linhas que ligam o pólo Norte para o pólo Sul são chamadas Longitudes ou Meridianos. O nome de Longitude é o número de graus que se encontram ao Leste ou oeste de Greenwich, Inglaterra. A continuação do Meridiano de Greenwich é chamada de Linha Internacional de Data.

Questões

- Qual é a latitude do pólo norte? E do pólo sul?
- Qual é a longitude da Linha Internacional de Data?
- Qual é a longitude do Meridiano de Greenwich?
- O que acontece com o tempo e datas quando você cruza a Linha Internacional de Data?
- Explique por que a LID é necessária.

13 Conclusão

Uma maneira de conhecer a natureza do espaço em que vivemos é determinar a sua curvatura. No espaço euclidiano, a curvatura é constante e igual a zero. No lobachevskiano, a curvatura é negativa, enquanto no espaço riemanniano, é positiva.

O desenvolvimento das geometrias não euclidianas foi de grande valia para a Física, em especial a Física Moderna. Como exemplos, a Teoria Geral da Relatividade de Einstein descreve o espaço em regiões próximas a uma grande presença de matéria como elipticamente curvado; e, de acordo com as teorias recentes que admitem a expansão do Universo, algumas porções do espaço podem ser descritas usando um modelo hiperbólico.

Se o nosso Universo é elíptico, como pretende a teoria de Einstein, vivemos num mundo hiperesférico do espaço quadridimensional e, por conseqüência, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é maior do que 180^o, e essa diferença é tão maior quanto for a área do triângulo.

A curvatura positiva do nosso espaço, não sentida por nós, seria facilmente perceptível por um observador da quarta dimensão. Entende-se isto fazendo a analogia com os seres bidimensionais que habitassem uma superfície esférica. Esses seres hipotéticos não se aperceberiam da curvatura do seu mundo, enquanto que nós, seres de três dimensões, sentimo-la facilmente.

Da mesma forma seres imaginários da quarta dimensão, observando o nosso cosmo, veriam uma curvatura no sentido perpendicular às três dimensões que conhecemos.

Se, por outro lado, o Universo for hiperbólico, a curvatura é, também, constante, mas negativa. E, nesse caso, a hiper pseudo-esfera mergulhada no espaço de quatro dimensões seria a superfície indicada para modelar o nosso Universo.

Conhecer a natureza da curvatura do nosso espaço implica medidas que transcedem aos limites tridimensionais do homem. Não é possível, a este, medir diretamente a curvatura do seu espaço, porquanto ele próprio está embutido nessa curvatura. A maneira indireta de medir essa curvatura seria, novamente, levantar as medidas dos ângulos de um triângulo de imensas proporções (astronômicas); caso contrário, se essas proporções fossem não tão grandes, nenhuma conclusão poderia se obter, por conta dos prováveis erros instrumentais.

Para os seres bidimensionais da superfície esférica, a curvatura da esfera é inerente a cada um deles. Para medirem a curvatura do seu mundo, teriam que se transportar para a terceira dimensão e, de lá, então, mediriam a curvatura da esfera. Nós, também, teríamos que ir até a quarta dimensão e, de lá, então, mediríamos a curvatura no nosso espaço.

Uma vez que a curvatura no nosso espaço físico é inerente a cada um dos homens, não faz diferença considerá-la nula, positiva ou negativa e, menor diferença faz, saber se o Universo é ou não euclidiano; cabe a nós, portanto, decidir qual geometria é mais adequada à nossa realidade.

Assim sendo, como afirma Henri Poincaré: *Nenhuma geometria é mais correta do que qualquer outra - apenas é mais conveniente.*

14 Referências

- ALVES, Sérgio e FILHO, Luís C. S. (2006). *Encontro com o mundo não euclidiano*. Congresso de Matemática Aplicada e Computacional.

- BOYER, C. (1974). *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher.

- BRITO, A. (1995). *Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico*. Dissertação de Mestrado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

- COUTINHO, Lázaro (2001). *Convite às geometrias não-euclidianas*. 2ª edição. Rio de Janeiro: Interciência.

- EVES (1997). *Introdução à história da matemática*. Campinas: Ed. da Unicamp; Universidade Estadual de Campinas.

- MARTOS, Zionice Garbelini (2002). *Geometrias não-euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado - Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Carrera de Souza. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociêcias e Ciências Exatas.

- Enciclopédia Eletrônica Wikipedia, em http://en.wikipedia.org