

3ª Lista de Exercícios, MA 141, 2011

SUPERFÍCIES E COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

1. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a quádrlica que ela representa e esboce o gráfico.
- a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$; b) $3x^2 + 4y^2 + z^2 - 12x - 8y - 2z + 16 = 0$.
c) $x^2 + y + z^2 = 0$; d) $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 36z + 3 = 0$.
2. a) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$. Que conjunto é este?
b) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam das retas $r : y = z = 0$ e $l : x = y - 1 = 0$. Que conjunto é este?
c) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a soma das distâncias de P aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual a 6. Que lugar geométrico é este?
3. Dados a esfera \mathcal{S} de centro $C = (h, k, p)$ e raio r e $P = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto da esfera. Mostre que: $\pi \cap \mathcal{S} = \{P\}$, onde π é o plano que é normal ao vetor \vec{CP} e passa por P . Tal plano é chamado de plano tangente à esfera por P .
4. Dada a esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 11 = 0$.
- a) Encontre o seu centro e seu raio.
b) Encontre a equação do plano tangente à esfera e que passa pelo ponto $P = (2, 1, 4) \in S$.
5. Dadas as equações da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes determine a equação da superfície cilíndrica.
- a) $y^2 = 4x, z = 0$ e $V = (1, -1, 1)$ b) $x^2 - y^2 = 1, z = 0$ e $V = (0, 2, -1)$
c) $x^2 + z^2 = 1, y = 0$ e $V = (4, 1, 0)$ d) $4x^2 + z^2 + 4z = 0, y = 0$ e $V = (4, 1, 0)$.
6. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cilíndrica e determine a equação da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes.
- a) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$; b) $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$.
7. Determine a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo especificado.
- a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ e $z = 0$ em torno do eixo y ; b) $yz = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo z .
8. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície de revolução e determine o seu eixo de revolução e a equação da curva geratriz.
- a) $x^2 + y^2 - z^3 = 0$; b) $y^6 - x^2 - z^2 = 0$.
9. Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada:
- a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$; b) $x^2 - y^2 = 3z^2$.
10. Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada:
- a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9z$; b) $x^2 + y^2 = 9$.
11. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é dada:
- a) $r = 3 \cos \theta$; b) $z^2 \sin \theta = r^3$.
12. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é dada:
- a) $r = 2 \tan \theta$; b) $r = 9 \sec \phi$.

CIRCUNFERÊNCIA E ROTAÇÃO NO PLANO

13. Seja ℓ a curva com equações paramétricas $x = a(1 + t^2)/(1 - t^2), y = 2bt/(1 - t^2)$. Determine ℓ .
14. A elipse ℓ tem focos $F_1(1, 2)$ e $F_2(2, 4)$ e vértices $A_1(0, 0)$ e $A_2(3, 6)$. Dê as equações paramétricas de ℓ .
15. A hipérbole ℓ tem focos F_1 e F_2 e vértices A_1 e A_2 . Encontrar equações paramétricas de ℓ se
a) $F_1(2, 0), F_2(8, 0), A_1(3, 0), A_2(7, 0)$; b) $F_1(0, 0), F_2(4, 8), A_1(1, 2), A_2(3, 6)$.
16. Considere o plano com o sistema cartesiano canônico xy e faça uma rotação de um ângulo θ obtendo um novo sistema $\bar{x}\bar{y}$. Seja P um ponto do plano.

- a) Se $P = (2, 2)$ no sistema xy e $\theta = \pi/3$, encontre as coordenadas de P no sistema $\bar{x}\bar{y}$.
 b) Se $P = (2, 2)$ no sistema $\bar{x}\bar{y}$ e $\theta = \pi/3$, encontre as coordenadas de P no sistema xy .
 c) Transforme a equação $x^2 + y^2 = 4$ para o sistema $\bar{x}\bar{y}$.
 d) Suponha que $0 < \theta < \pi/2$ e que $a = \tan \theta$ ($a = \text{tangente de } \theta$). Transforme a equação $y = ax$ para o sistema $\bar{x}\bar{y}$.

17. Considere o plano com o sistema cartesiano canônico xy e faça uma rotação de um ângulo θ , com $0 \leq \theta \leq \pi/2$ obtendo o novo sistema $\bar{x}\bar{y}$. Seja (*) a equação:

$$(*) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ com } A, B, C, D, E, F \text{ números reais.}$$

Ao transformar (*) para o sistema $\bar{x}\bar{y}$ obtemos:

$$(**) \quad \bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0.$$

a) Mostre que:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta, & \bar{B} &= -2A \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta, \\ \bar{C} &= A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta, & \bar{D} &= D \cos \theta + E \sin \theta, & \bar{E} &= E \cos \theta - D \sin \theta & \text{ e } & \bar{F} = F. \end{aligned}$$

b) Supondo $A > 0$ e $F < 0$, conclua, a partir de a), que:

A equação (*) representa uma circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $r = \sqrt{\frac{-F}{A}}$ se e somente se para todo θ temos que $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$, $C = \bar{C}$, $D = \bar{D}$, $E = \bar{E}$ e $F = \bar{F}$.

c) Sejam $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, $\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{pmatrix}$ e $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Mostre, a partir de a), que $\bar{M} = R_\theta^t \cdot M \cdot R_\theta$ e calculando o determinante dos dois lados da igualdade conclua que $\Delta = B^2 - 4AC = \bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}$ qualquer que seja o ângulo θ (**OBS:** Δ é conhecido pelo nome de discriminante da equação (*) e o item c) está dizendo que ele é invariante por rotação).

18. Em cada uma das equações abaixo elimine, através de uma rotação, o termo xy . Identifique o conjunto solução e nos casos em que for uma cônica encontre as coordenadas, no sistema inicial, do(s) foco(s) e esboce o gráfico.

a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$; b) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$;
 c) $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$; d) $18x^2 + 12xy + 2y^2 + 94\frac{\sqrt{10}}{10}x - 282\frac{\sqrt{10}}{10}y + 94 = 0$.

19. Sejam \mathcal{C} a circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$ e $P = (x_1, y_1)$ um ponto do plano. Mostre que:

a) Se $P \in \mathcal{C}$ então a equação da reta tangente a circunferência por P é $x_1x + y_1y = r^2$.

(Lembre que a reta tangente em P sempre é perpendicular ao vetor \vec{OP} , com O sendo o centro de \mathcal{C} .)

b) Se $r = 1$ e l é a reta de equação $3x + 4y = 5$ então l é tangente a \mathcal{C} . Encontre o ponto de tangência.

c) Se P está no exterior da circunferência e $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ são os pontos de \mathcal{C} tais que as retas l_2 que passa por P e P_2 , e l_3 que passa por P e P_3 são tangentes à circunferência, então a reta (secante) que passa por P_2 e P_3 tem equação $x_1x + y_1y = r^2$.

(Sugestão: A partir de a) encontre as equações das retas l_2 e l_3 e use o fato de que P está em ambas.)

IDENTIFICAÇÃO DE CÔNICAS

20. A curva ℓ consiste de todos os pontos $P(x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação:

a) $3x^2 + 5y^2 + 4x - 2y - 10 = 0$; b) $x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2 = 0$; c) $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$;
 d) $x^2 + y^2 + (1/3)xy + 6x + 8y - 5 = 0$; e) $x^2 + (1/5)xy + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$; f) $x^2 + 5x + y - 9 = 0$;
 e) $x^2 + 3y^2 + 4xy + 4y - 4 = 0$; f) $x^2 - 2y^2 + 4xy - 6 = 0$; g) $x^2 + 2y^2 - 4xy + y - 1 = 0$.

21. Identificar as cônicas e calcular os focos, diretrizes, e assíntotas (quando couber):

a) $x^2 - 3y^2 - 2xy - x - y = 0$; b) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y - 1 = 0$; c) $x^2 + 3y^2 - 2xy + 3 = 0$;
 d) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$; e) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$; f) $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$.