Vetores aleatórios discretos (parte 2)

Prof. Caio Azevedo

Transformação de vetores aleatórios discretos

- Vamos definir transformações envolvendo vetores aleatórios discretos bivariados.
- Vamos considerar o exemplo da aula introdutória de vea (aqui).
- Definamos $W = X + Y$ e $V = X - Y$. Note que (potencialmente) $w \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $v \in \{-1, 0, 1, 2\}$.
- Vamos encontrar a distribuição conjunta de $(W, V)'$ com base na distribuição conjunta de $\boldsymbol{Z}$.

Exemplo

- Note que:

x	y	w	v	$P(X = x, Y = y)$
0	0	0	0	0
0	1	1	-1	$3/10$
1	0	1	1	$3/10$
1	1	2	0	$3/10$
2	0	2	2	$1/10$
2	1	3	1	0

Exemplo

- Da tabela anterior, temos que:

	W		
V	1	2	
-1	3/10	0	3/10
0	0	3/10	3/10
1	3/10	0	3/10
2	0	1/10	1/10
	6/10	4/10	1

Exemplo

- Marginalmente, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(W = w) &= \frac{6}{10}\mathbb{1}_{\{1\}}(w) + \frac{4}{10}\mathbb{1}_{\{2\}}(w), \\
P(V = v) &= \frac{3}{10}\mathbb{1}_{\{-1,0,1\}}(v) + \frac{1}{10}\mathbb{1}_{\{2\}}(v).
\end{aligned}
$$

- Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(W) &= \frac{6+8}{10} = \frac{7}{5}, \\
\mathcal{E}(W^2) &= \frac{6+16}{10} = \frac{11}{5}, \\
\mathcal{V}(W) &= \frac{55-49}{25} = \frac{6}{25}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(V) &= \frac{-3+0+3+2}{10} = \frac{1}{5}, \\
\mathcal{E}(V^2) &= \frac{3+0+3+4}{10} = 1, \\
\mathcal{V}(V) &= \frac{25-1}{25} = \frac{24}{25}.
\end{aligned}
$$

- Note que (dos resultados vistos aqui)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(W) &= \mathcal{E}(X+Y) = \mathcal{E}(X) + \mathcal{E}(Y) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}, \\
\mathcal{E}(V) &= \mathcal{E}(X-Y) = \mathcal{E}(X) - \mathcal{E}(Y) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(W) &= \mathcal{V}(X+Y) = \mathcal{V}(X) + \mathcal{V}(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} - \frac{9}{25} \\
&= \frac{6}{25}, \\
\mathcal{V}(V) &= \mathcal{V}(X-Y) = \mathcal{V}(X) + \mathcal{V}(Y) - 2Cov(X,Y) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} + \frac{9}{25} \\
&= \frac{24}{25}.
\end{aligned}$$

- Por outro lado,

$$\mathcal{E}(WV) = -1 \times 1 \times \frac{3}{10} + 1 \times 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times 2 \times \frac{1}{10} = \frac{2}{5}.$$

Exemplo

- Logo

$$\sigma_{WV} = \frac{2}{5} - \frac{7}{25} = \frac{3}{25}.$$

- Por outro lado,

$$\begin{aligned} Cov(W, V) &= Cov(X + Y, X - Y) = \\ &= Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(Y, X) - Cov(Y, Y) \\ &= \mathcal{V}(X) - \mathcal{V}(Y) = \frac{9}{25} - \frac{6}{25} = \frac{3}{25}. \end{aligned}$$

Exemplo

- Também, temos que

$$\rho_{WV} = \frac{\frac{3}{25}}{\sqrt{\frac{6}{25}\frac{24}{25}}} = \frac{3}{\sqrt{144}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Transformação de vetores aleatórios discretos

- Exemplo seja $X_i \overset{iid}{\sim}$ Poisson(λ). Defina $S = X + Y$.
- Queremos obter $P(S = s)$. Note que $s \in A = \{0, 1, 2, ...\}$. À rigor, precisamos obter as probabilidade de cada evento em A (suporte de S).
- Sabemos que

$$P(S = s) = \sum_{x} P(S = s, X = x).$$

Transformação de vetores aleatórios discretos

- Primeiramente, note que $s \geq x (x \leq s)$. Além disso, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(S = s, X = x) &= P(X + Y = s, X = x) \\
&= P(Y = s - x)P(X = x) \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{s-x}}{(s-x)!}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-2\lambda}\lambda^{s}}{x!(s-x)!} \\
&= \frac{e^{-2\lambda}\lambda^{s}}{x!(s-x)!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)\mathbb{1}_{\{x,\ldots\}}(s) \\
&= \frac{e^{-2\lambda}\lambda^{s}}{x!(s-x)!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,s\}}(x)\mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(s)
\end{aligned}
$$

Transformação de vetores aleatórios discretos

- Portanto, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(S=s) &= \sum_{x} \frac{e^{-2\lambda}\lambda^{s}}{x!(s-x)!} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,s\}}(x) \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(s) \\
&= \frac{e^{-2\lambda}\lambda^{s}}{s!} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(s) \sum_{x=0}^{s} \frac{s!}{x!(s-x)!} \\
&= \frac{e^{-2\lambda}\lambda^{s}}{s!} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(s) \sum_{x=0}^{s} \binom{s}{x} 1^{x} \times 1^{s-x} \\
&= \frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^{s}}{s!} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(s), S \sim \text{Poisson}(2\lambda).
\end{aligned}
$$

Transformação de vetores aleatórios discretos

- Por outro lado, note que:

$$
\begin{aligned}
P(X = x|S = s) &= \frac{P(X = x, S = s)}{P(S = s)} \\
&= \frac{\frac{e^{-2\lambda}\lambda^s}{x!(s-x)!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,s\}}(x)\mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(s)}{\frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^s}{s!}\mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(s)} \\
&= \binom{s}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^s \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(s).
\end{aligned}
$$

Logo $X|S = s \sim \text{binomial}(n, 1/2)$.

Mais um exemplo

- Vamos considerar um exemple de duas va's discretas dependentes, mas com covariância nula.

	X			
Y	-1	0	1	
0	1/6	0	1/6	1/3
1	1/6	1/3	1/6	2/3
	1/3	1/3	1/3	1

Mais um exemplo

- Da Tabela anterior, obtemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(XY) &= \sum_{x=-1}^{1}\sum_{y=0}^{1} xyP(X=x, Y=y) = -\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0,\\
\mathcal{E}(X) &= \sum_{x=-1}^{1} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3},\\
\mathcal{E}(Y) &= \sum_{y=0}^{1} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Mais um exemplo

- Logo,

$$Cov(X, Y) = \mathcal{E}(XY) - \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = 0 - 0 \times \frac{2}{3} = 0$$

- Por outro lado, temos que:

$$P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

- Logo, as variáveis são dependentes, embora a covariância entre elas seja igual a zero.