# Revisão sobre modelos de regressão normais lineares (parte II)

Prof. Caio Azevedo

# Contexto

- Vimos até agora dois experimentos:
  - (Absorbância): o qual envolve apenas um único fator (tipo de solvente) qualitativo.
  - (Cardiopulmonar): o qual envolve um fator qualitativo (tipo de cardiopatia) e uma variável quantitativa (consumo de oxigênio).
- Lembrete: em ambos os casos a variável resposta é quantitativa contínua.

# Contexto

- Em muitas situações, o pesquisador tem interesse em como dois ou mais fatores (qualitativos) afetam o comportamento da variável resposta.
- Nem todos os fatores são, necessariamente, de interesse. Contudo, em princípio, todos devem ser controlados de alguma forma.

# Descrição

- Fator A: possui $a$ níveis.
- Fator B: possui $b$ níveis.
- Grupos: há um total de $a \times b$ grupos (tratamentos), que são definidos pelas interseções dos níveis de cada grupo.
- Para cada grupo vamos considerar um total de $n_{ij}, i = 1, ..., a; j = 1, ..., b$ observações (não, necessariamente, balanceado). Cada uma das $n_{ij}$ observações são alocadas aleatoriamente à cada uma das combinações (fatores). Temos um PCA (planejamento completamente casualizado).

# Descrição (Cont.)

- Note que se tem um total de $n = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij}$ observações.
- Conceito importante: interação entre os fatores.
- Interação (com duas variáveis explicativas):
  - Uma qualitativa e uma quantitativa: a estrutura de regressão, relativa à variável quantitativa, pode mudar ao longo dos níveis da variável qualitativa.
  - Interação: a diferença entre as médias da variável resposta, entre dois níveis do Fator A, não são iguais ao longo dos níveis do Fator B (vice-versa).

# Voltanto ao exemplo 8: Teste de esforço cardiopulmonar

**Modelo sem interação**

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \xi_i, i = 1, ..., 124$$

- $\xi_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$.
- $(\beta_0, \beta_1, \sigma^2)'$ : parâmetros desconhecidos.
- $x_i$: carga à que o paciente $i$ foi submetido (conhecido e não aleatório).
- Parte sistemática: $\mathcal{E}(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$.
- Parte aleatória: $\xi_i$.
- O modelo acima implica que $Y_i \overset{ind.}{\sim} N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$

# Voltanto ao exemplo 8: Teste de esforço cardiopulmonar

**Modelo com interação**

$$Y_{ij} : \beta_{0i} + \beta_{1i}x_{ij} + \xi_{ij}, i = 1, ..., ; j = 1, ..., n_i$$

- Etiologias = CH ($i = 1$), ID ($i = 2$), IS ($i = 3$), C: ($i = 4$).
- $\xi_{ij} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$.
- $(\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}, \beta_{04}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}, \sigma^2)'$ : parâmetros desconhecidos.
- $x_{ij}$: carga à que o paciente $j$ que apresenta a etiologia cardíaca $i$ foi submetido (conhecido e não aleatório).
- Parte sistemática: $\mathcal{E}(Y_{ij}) = \beta_{0i} + \beta_{1i}x_{ij}$. Parte aleatória: $\xi_{ij}$.
- O modelo acima implica que $Y_{ij} \overset{ind.}{\sim} N(\beta_{0i} + \beta_{1i}x_{ij}, \sigma^2)$.

# Inexistência de interação

- Testar a inexistência de interação, equivale à testar a igualdade simultânea dos interceptos (entre si) e dos coeficientes angulares (entre si):

$$H_0 : \begin{cases} \beta_{01} - \beta_{02} = 0, \\ \beta_{01} - \beta_{03} = 0, \\ \beta_{01} - \beta_{04} = 0, \\ \beta_{11} - \beta_{12} = 0, \\ \beta_{11} - \beta_{13} = 0, \\ \beta_{11} - \beta_{14} = 0. \end{cases} \quad \text{vs } H_1 : \text{há pelo menos uma diferença}$$

- Lembramos que tal hipótese não foi rejeitada, ou seja, o modelo sem interação é preferível ao modelo com interação.

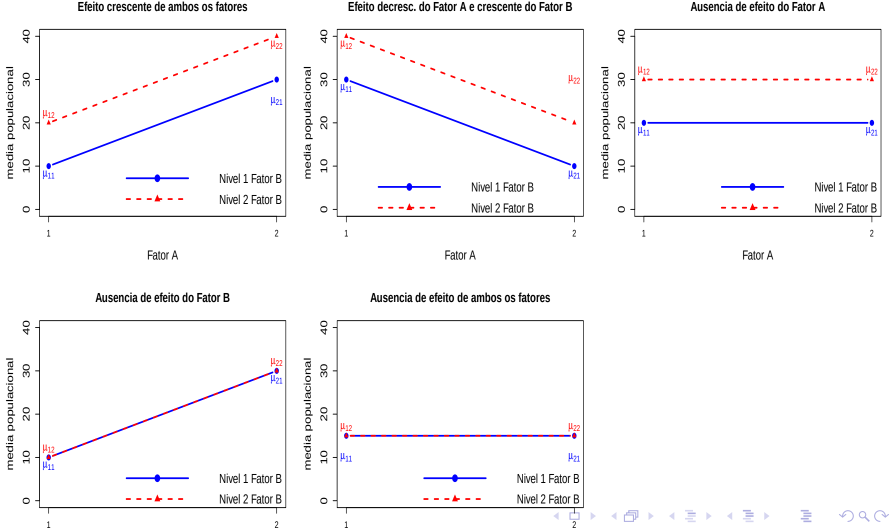
# Exemplo 10: Resistência de materiais

- Um engenheiro está desenvolvendo um tipo de bateria para ser usado em um dispositivo eletrônico sujeito à variações extremas de temperatura.
- Fatores de interesse:
  - Tipo de material da placa: 1, 2 e 3.
  - Temperatura: 15$^o$F, 70$^o$F e 125$^o$F. Equivalente à -9,44$^o$C, 21,11$^o$C e 51,67 $^o$C, respectivamente
- Para cada combinação (tipo de material da placa $\times$ temperatura) 4 baterias foram feitas.
- Variável resposta: tempo de vida, em horas, de cada bateria .

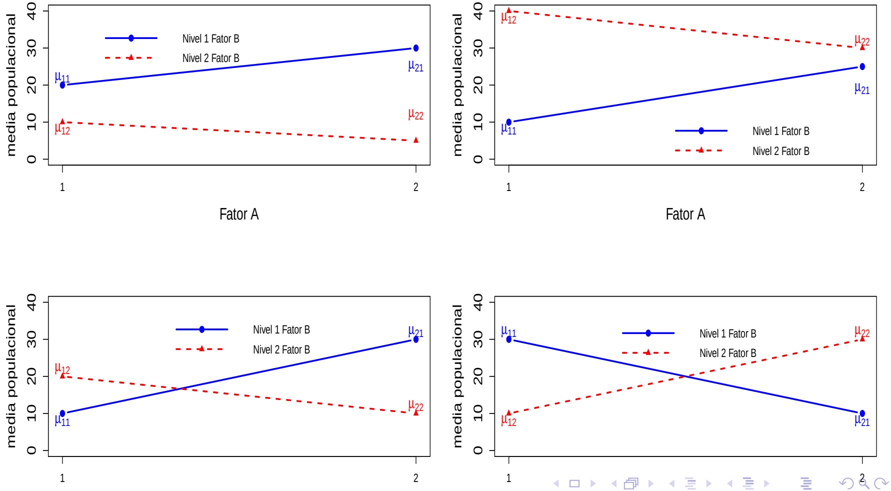
# Exemplo 10: continuação

- Experimento balanceado: 4 observações por tratamento.
- Um fator quantitativo (temperatura) e um fator qualitativo (tipo de material da placa).
- Como analisar o experimento?
- Qual seria um modelo apropriado?
- Como estimar os parâmetros e comparar as médias de interesse?

# Perfis médios: ausência de interação



# Perfis médios: presença de interação



# Voltando ao Exemplo 4

- Vamos considerar, inicialmente, somente os dois primeiros níveis de cada fator.
- Dados:

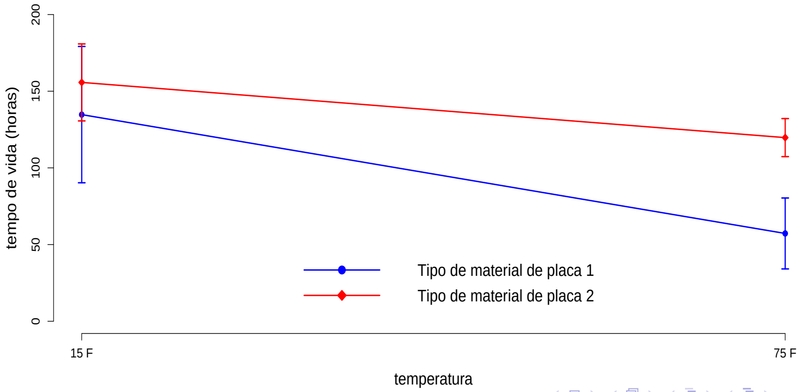
| **Material** | **Temperatura ($^oF$)** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **15** | | **70** | |
| 1 | 130 | 155 | 34 | 40 |
| | 74 | 180 | 80 | 75 |
| 2 | 150 | 188 | 136 | 122 |
| | 159 | 126 | 106 | 112 |

- Fator A (1: material 1, 2: material 2).
- Fator B (1: $15^oF$, 2: $75^oF$).

# Análise descritiva

| Material | Temp. | Medida descritiva | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **Média** | **DP** | **Var.** | **CV%** | **Máximo** | **Mínimo** |
| 1 | 15 $^o$F | 134,75 | 45,35 | 2056,92 | 74,00 | 180,00 | 33,66 |
| | 70 $^o$F | 57,25 | 23,60 | 556,92 | 34,00 | 80,00 | 41,22 |
| 2 | 15 $^o$F | 155,75 | 25,63 | 656,25 | 126,00 | 188,00 | 16,45 |
| | 70 $^o$F | 119,75 | 12,66 | 160,25 | 106,00 | 136,00 | 10,57 |

# Gráfico de perfis médios



# Modelo (parametrização de médias)

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \xi_{ijk},$$

(Fator A), $i = 1, 2$; (Fator B), $j = 1, 2$; (unidades experimentais), $k = 1, 2, 3, 4$

- Erros $\xi_{ijk} \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $\mu_{ij}$ não aleatórios.
- $\mathcal{E}_{\xi_{ijk}}(Y_{ijk}) = \mu_{ij}, \mathcal{V}_{\xi_{ijk}}(Y_{ijk}) = \sigma^2$.
- $\boldsymbol{\beta} = (\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22})'$.
- $Y_{ijk} \overset{ind.}{\sim} N(\mu_{ij}, \sigma^2)$.

# Forma matricial (parametrização de médias)

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{113} \\ Y_{114} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ Y_{123} \\ Y_{124} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{213} \\ Y_{214} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \\ Y_{223} \\ Y_{224} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_4 \otimes \mathbf{1}_4, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{111} \\ \xi_{112} \\ \xi_{113} \\ \xi_{114} \\ \xi_{121} \\ \xi_{122} \\ \xi_{123} \\ \xi_{124} \\ \xi_{211} \\ \xi_{212} \\ \xi_{213} \\ \xi_{214} \\ \xi_{221} \\ \xi_{222} \\ \xi_{223} \\ \xi_{224} \end{bmatrix}$$

# Lembrando

- Em que $\boldsymbol{I}_k$ é uma matriz identidade de ordem $k$, $\mathbf{1}_r = (1, 1, ...., 1)'_{(r \times 1)}$ e "$\otimes$" representa o produto de Kronecker entre duas matrizes.
- Sejam $\boldsymbol{A}_{(n \times p)}$ e $\boldsymbol{B}_{(m \times q)}$ duas matrizes quaisquer. O produto de Kronecker entre elas é definido por:

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} A_{11}\boldsymbol{B} & A_{12}\boldsymbol{B} & \dots & A_{1p}\boldsymbol{B} \\ A_{21}\boldsymbol{B} & A_{22}\boldsymbol{B} & \dots & A_{2p}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1}\boldsymbol{B} & A_{n2}\boldsymbol{B} & \dots & A_{np}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

- A resultante do produto de Kronecker será uma matriz $\boldsymbol{C}_{(nm \times pq)}$.

# Interpretações dos parâmetros

- $\mu_{11}$ : tempo médio de vida (em horas) de componentes fabricados com o tipo de material 1 e submetidos à uma temperatura de 15 $^o$F.
- $\mu_{12}$ : tempo médio de vida (em horas) de componentes fabricados com o tipo de material 1 e submetidos à uma temperatura de 75 $^o$F.
- $\mu_{21}$ : tempo médio de vida (em horas) de componentes fabricados com o tipo de material 2 e submetidos à uma temperatura de 15 $^o$F.
- $\mu_{22}$ : tempo médio de vida (em horas) de componentes fabricados com o tipo de material 2 e submetidos à uma temperatura de 75 $^o$F.

# Modelo (parametrização casela de referência)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \xi_{ijk},$$

(Fator A), $i = 1, 2$; (Fator B), $j = 1, 2$; (unidades experimentais), $k = 1, 2, 3, 4$

- Erros $\xi_{ijk} \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $\mu, \alpha_i, \beta_j, (\alpha\beta)_{ij}$ não aleatórios.
- $\mathcal{E}_{\xi_{ijk}}(Y_{ijk}) = \mu_{ij}, \mathcal{V}_{\xi_{ijk}}(Y_{ijk}) = \sigma^2$.
- Restrições : $\alpha_1 = \beta_1 = (\alpha\beta)_{1j} = (\alpha\beta)_{i1} = 0, \forall i, j$.
- $\boldsymbol{\beta} = (\mu, \alpha_2, \beta_2, (\alpha\beta)_{22})'$.
- $Y_{ijk} \overset{ind.}{\sim} N(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma^2)$.

# Interpretações dos parâmetros

- Neste caso, temos que $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$.

$$
\begin{aligned}
\mu_{11} &= \mu \\
\mu_{21} &= \mu + \alpha_2 \\
\mu_{12} &= \mu + \beta_2 \\
\mu_{22} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{22}
\end{aligned}
$$

# Forma matricial (parametrização casela de referência)

$$
\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{113} \\ Y_{114} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ Y_{123} \\ Y_{124} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{213} \\ Y_{214} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \\ Y_{223} \\ Y_{224} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ (\alpha\beta)_{22} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{111} \\ \xi_{112} \\ \xi_{113} \\ \xi_{114} \\ \xi_{121} \\ \xi_{122} \\ \xi_{123} \\ \xi_{124} \\ \xi_{211} \\ \xi_{212} \\ \xi_{213} \\ \xi_{214} \\ \xi_{221} \\ \xi_{222} \\ \xi_{223} \\ \xi_{224} \end{bmatrix}
$$

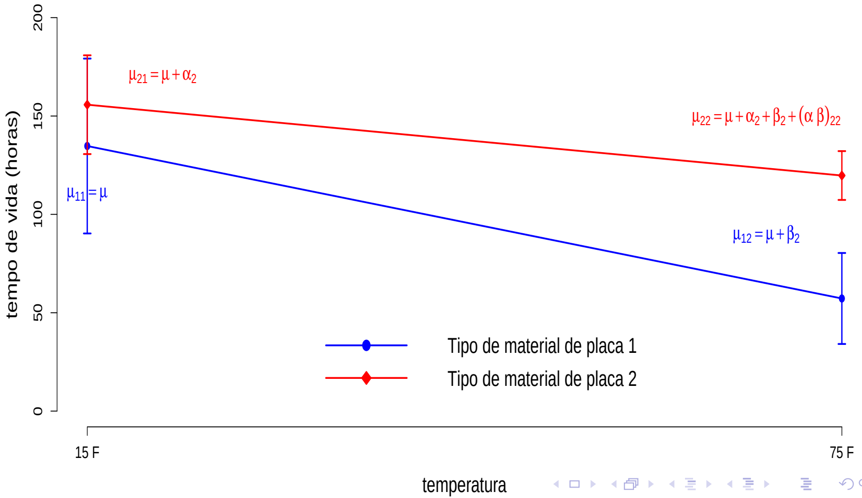
# Interpretações dos parâmetros

- Se $(\alpha\beta)_{22} = 0$.
  - $\alpha_2 = \mu_{21} - \mu_{11} = \mu_{22} - \mu_{12}$: incremento (diferença) na vida média de baterias feitas com material 2 em relação àquelas feitas com material 1 submetidas à qualquer uma das duas temperaturas.
  - $\beta_2 = \mu_{12} - \mu_{11} = \mu_{22} - \mu_{21}$: incremento (diferença) na vida média de baterias submetidas à temperatura de $75^oF$ em relação submetidas à temperatura de $15^oF$, feitas com qualquer um dos dois tipos de material.

# Interpretações dos parâmetros (cont.)

- A não nulidade de $(\alpha\beta)_{22}$ faz com que os incrementos (diferenças) anteriores não dependam somente de $\alpha_2$ e $\beta_2$. Neste caso:
  - Dependendo da temperatura, a diferença entre a vida média de baterias feitas com os materiais 1 e 2 não é a mesma.
  - Dependendo do tipo de material, a diferença entre a vida média de baterias submetidas as temperaturas $15^o F$ e $75^o F$ não é a mesma.
- O parâmetro $(\alpha\beta)_{22}$ determina a existência ou não de interação.

# Visualização dos significados dos parâmetros



# Interpretações dos parâmetros (cont.)

- Não existe interação, neste caso $\leftrightarrow H_0 : \mu_{21} - \mu_{11} = \mu_{22} - \mu_{12}$ for verdadeira.
- Por outro lado, a hipótese acima equivale à:

$$H_0 : \cancel{\mu} + \cancel{\alpha_2} - \cancel{\mu} = \cancel{\mu} + \cancel{\alpha_2} + \cancel{\beta_2} + (\alpha\beta)_{22} - \cancel{\mu} - \cancel{\beta_2} \leftrightarrow (\alpha\beta)_{22} = 0$$

- Portanto, inexiste interação $\leftrightarrow (\alpha\beta)_{22} = 0$.

# Interpretações dos parâmetros (cont.)

- Se existe interação, portanto se $(\alpha\beta)_{22} \neq 0$, temos que:
- $\alpha_2$: incremento na vida média de baterias feitas com material 2 em relação àquelas feitas com material 1 submetidas à temperatura de $15^o F$.
- $\beta_2$: incremento na vida média de baterias submetidas à temperatura de $75^o F$ em relação submetidas à temperatura de $15^o F$, feitas com material do tipo 1.
- $(\alpha\beta)_{22}$ : interação entre os fatores.

# Hipótese de interesse

- O pesquisador pode ter interesse em comparações (específicas) entre as médias. Caso não tenha, podemos seguir os seguintes passos.
- Primeira hipótese (ausência de interação): $H_0 : (\alpha\beta)_{22} = 0$ vs $H_1 : (\alpha\beta)_{22} \neq 0$
- Se a hipótese acima ($H_0$) não for rejeitada, então:
  - Ausência de efeito principal de material: $H_0 : \alpha_2 = 0$ vs $H_1 : \alpha_2 \neq 0$.
  - Ausência de efeito principal de temperatura: $H_0 : \beta_2 = 0$ vs $H_1 : \beta_2 \neq 0$.
- Eventualmente, algum tipo de comparação entre as médias "remanescentes".

# Hipótese de interesse

- Note que o roteiro acima é apenas uma sugestão.
- Pode-se, por exemplo, testar $H_0 : \alpha_2 = 0$ vs $H_1 : \alpha_2 \neq 0$ e/ou $H_0 : \beta_2 = 0$ vs $H_1 : \beta_2 \neq 0$.
- No entanto, se a interação for significativa, as implicações da validade das hipóteses acima serão outras.
- Se a hipótese de ausência de interação não for rejeitada, então não faz sentido estudar os efeitos principais isoladamente.
- Portanto, deve-se efetuar algum tipo de comparação entre as médias.

# Modelo (parametrização desvios com restrição)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \xi_{ijk},$$

(Fator A), $i = 1, 2$; (Fator B), $j = 1, 2$; (unidades experimentais), $k = 1, 2, 3, 4$

- Erros $\xi_{ijk} \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $\mu, \alpha_i, \beta_j, (\alpha\beta)_{ij}$ não aleatório.
- $\mathcal{E}_{\xi_{ijk}}(Y_{ijk}) = \mu_{ij}, \mathcal{V}_{\xi_{ijk}}(Y_{ijk}) = \sigma^2$.
- Restrições : $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = \sum_{j=1}^{2} \beta_j = \sum_{i=1}^{2} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{2} (\alpha\beta)_{ij} = 0, \forall i, j$.
- $\boldsymbol{\beta} = (\mu, \alpha_1, \beta_1, (\alpha\beta)_{11})'$.
- $Y_{ijk} \overset{ind.}{\sim} N(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma^2)$.

# Interpretações dos parâmetros

- Note que $\alpha_2 = -\alpha_1$, $\beta_2 = -\beta_1$, $(\alpha\beta)_{12} = -(\alpha\beta)_{11}$, $(\alpha\beta)_{21} = -(\alpha\beta)_{11}$ e $(\alpha\beta)_{22} = (\alpha\beta)_{11}$.
- Assim

$$
\begin{aligned}
\mu_{11} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11} \\
\mu_{21} &= \mu - \alpha_1 + \beta_1 - (\alpha\beta)_{11} \\
\mu_{12} &= \mu + \alpha_1 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{11} \\
\mu_{22} &= \mu - \alpha_1 - \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}
\end{aligned}
$$

# Forma matricial (parametrização desvios com restrição)

$$
\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{113} \\ Y_{114} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ Y_{123} \\ Y_{124} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{213} \\ Y_{214} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \\ Y_{223} \\ Y_{224} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ (\alpha\beta)_{11} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{111} \\ \xi_{112} \\ \xi_{113} \\ \xi_{114} \\ \xi_{121} \\ \xi_{122} \\ \xi_{123} \\ \xi_{124} \\ \xi_{211} \\ \xi_{212} \\ \xi_{213} \\ \xi_{214} \\ \xi_{221} \\ \xi_{222} \\ \xi_{223} \\ \xi_{224} \end{bmatrix}
$$

# Interpretações dos parâmetros

- Lembremos que $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$.
- $\mu = \overline{\mu} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}$ (média das médias).
- $\alpha_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij} - \overline{\mu} = \mu_{i.} - \overline{\mu}$
- $\beta_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\mu_{ij} - \overline{\mu} = \mu_{.j} - \overline{\mu}$
- $(\alpha\beta)_{11} = \mu_{ij} - \overline{\mu} - \alpha_i - \beta_j = \mu_{ij} - \overline{\mu}_{i.} - \overline{\mu}_{.j} + \overline{\mu}$.

# Interpretações dos parâmetros

- Se $(\alpha\beta)_{11} = 0$.
  - $\alpha_1 = \dfrac{\mu_{11} - \mu_{21}}{2} = \dfrac{\mu_{12} - \mu_{22}}{2}$: diferença (média) entre a vida média de baterias feitas com material 1 em relação àquelas feitas com material 2 submetidas à qualquer uma das duas temperaturas.
  - $\beta_1 = \dfrac{\mu_{11} - \mu_{12}}{2} = \dfrac{\mu_{21} - \mu_{22}}{2}$: diferença (média) na vida média de baterias submetidas à temperatura de $15^o F$ em relação submetidas à temperatura de $75^o F$, feitas com qualquer um dos dois tipos de material.

# Interpretações dos parâmetros (cont.)

- A não nulidade de $(\alpha\beta)_{11}$ faz com que as diferenças (médias) anteriores não dependam somente de $\alpha_1$ e $\beta_1$. Neste caso:
  - Dependendo da temperatura, a diferença entre a vida média de baterias feitas com os materiais 1 e 2 não é a mesma.
  - Dependendo do tipo de material, a diferença entre a vida média de baterias submetidas as temperaturas $15^o F$ e $75^o F$ não é a mesma.
- O parâmetro $(\alpha\beta)_{11}$ determina a existência ou não de interação.

# Interpretações dos parâmetros (cont.)

- Não existe interação, neste caso, $\leftrightarrow H_0 : \mu_{21} - \mu_{11} = \mu_{22} - \mu_{12}$ for verdadeira.
- Por outro lado, a hipótese acima equivale à:

$$
\begin{aligned}
H_0 \quad : \quad & \cancel{\mu} - \cancel{\alpha_1} + \cancel{\beta_1} - (\alpha\beta)_{11} - \cancel{\mu} - \cancel{\alpha_1} - \cancel{\beta_1} - (\alpha\beta)_{11} = \\
& \cancel{\mu} - \cancel{\alpha_1} - \cancel{\beta_1} + (\alpha\beta)_{11} - \cancel{\mu} - \cancel{\alpha_1} + \cancel{\beta_1} + (\alpha\beta)_{11} \leftrightarrow (\alpha\beta)_{11} = 0
\end{aligned}
$$

- Portanto, inexiste interação $\leftrightarrow (\alpha\beta)_{11} = 0$.
- Os passos a serem seguidos, descritos para a parametrização casela de referência, se aplicam também à esta parametrização (bem como nas parametrizações de médias e desvios sem restrição).

# Comentários

- Todas as hipóteses apresentadas e várias outras, podem sem escritas como $H_0 : \boldsymbol{C\beta} = \boldsymbol{M}$ vs $H_1 : \boldsymbol{C\beta} \neq \boldsymbol{M}$. Assim, as estatísticas $(Q_O, Q, Q_W, Q_W^*, Q_G, Q_G^*)$ vistas anteriormente, podem ser utilizadas, consoante a situação enfrentada.
- Exercício: repetir os desenvolvimentos anteriores considerando a parametrização desvios sem restrição. Note que, sob esta parametrização, os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ não possuem interpretação.

# Estimativas dos parâmetros do modelo (casela de referência)

| Parâmetro | Estimativa | EP | IC(95%) | Estat. t | pvalor |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | 134,75 | 14,64 | [106,05;163,45] | 9,20 | $< 0{,}0001$ |
| $\alpha_2$ | 21,00 | 20,71 | [-19,58;61,58] | 1,01 | 0,3305 |
| $\beta_2$ | -77,50 | 20,71 | [-118,09;-36,91] | -3,74 | 0,0028 |
| $(\alpha\beta)_{22}$ | 41,50 | 29,28 | [-15,90;98,90] | 1,42 | 0,1819 |

- Há evidência a favor da inexistência de interação (p-valor $=$ 0,1819).
- Dada a inexistência de interação, há evidência a favor da inexistência de efeito de tipo de material (perfis coincidentes).

# Modelo reduzido (casela de referência)

$$Y_{ijk} = \mu + \beta_j + \xi_{ijk},$$

(Fator A), $i = 1, 2$; (Fator B), $j = 1, 2$; (unidades experimentais), $k = 1, 2, 3, 4$

- Erros $\xi_{ijk} \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $\mu, \beta_j$, não aleatório.
- $\mathcal{E}_{\xi_{ijk}}(Y_{ijk}) = \mu_{ij}, \mathcal{V}_{\xi_{ijk}}(Y_{ijk}) = \sigma^2$.
- Restrições : $\beta_1 = 0, \forall i, j$.
- $Y_{ijk} \overset{ind.}{\sim} N(\mu + \beta_j, \sigma^2)$.

# Estimativas dos parâmetros do modelo

| Parâmetro | Estimativa | EP | IC(95%) | Estat. t | pvalor |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | 145,25 | 13,02 | [119,73;170,77] | 11,16 | $<$ 0,0001 |
| $\beta_2$ | -56,75 | 18,41 | [-92,84;-20,66] | -3,08 | 0,0081 |

# Estimativas finais das médias

| Tratamento | Estimativa | EP | IC(95%) |
|---|---|---|---|
| Temperatura de $15^oF$ e Material $1/2$ | 145,25 | 13,02 | [119,73;170,77] |
| Temperatura de $75^oF$ e Material $1/2$ | 88,50 | 13,01 | [62,98;114,01] |

# Perfis médios ajustados