Revisão sobre matrizes

Prof. Caio Azevedo

Revisão de álgebra de matrizes

- Uma matriz é um arranjo retangular de elementos (números, variáveis aleatórias, letras):

$$\mathbf{A}_{(2\times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

- Um vetor é uma matriz com somente uma linha (vetor linha) ou somente uma coluna (vetor coluna).

$$\mathbf{A}_{(1\times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{(3\times 1)} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

- Se a matriz tiver apenas uma linha e uma coluna teremos um escalar.

- Denotaremos uma matriz ou vetor por uma letra maiúscula ou minúscula em negrito.
- Uma matriz é dita ser quadrada se o número de linhas for igual ao número de colunas.

$$\mathbf{A}_{(3\times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal: matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são iguais à 0.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal inferior: matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal principal são iguais à 0.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal superior: matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais à 0.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz identidade: matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos iguais à 1.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz simétrica $(A_{ij} = A_{ji}), \forall i, j; i \neq j$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

- Soma de matrizes :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \\ A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21} & A_{31}B_{12}+A_{32}B_{22} \end{bmatrix}$$

- Traço de uma matriz quadrada: é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

$$tr(\mathbf{A}) = tr\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

- O operador *vec* cria um vetor coluna, a partir de uma matriz, pela concatenação de suas colunas:

$$vec(\mathbf{A}) = vec\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix}$$

- Sejam $\mathbf{A}_{(n \times p)}$ e $\mathbf{B}_{(m \times q)}$ duas matrizes quaisquer. O produto de Kronecker entre elas é definido por:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{B} & A_{12}\mathbf{B} & \ldots & A_{1p}\mathbf{B} \\ A_{21}\mathbf{B} & A_{22}\mathbf{B} & \ldots & A_{2p}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1}\mathbf{B} & A_{n2}\mathbf{B} & \ldots & A_{np}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

- A resultante do produto de Kronecker será uma matriz $\mathbf{C}_{(nm \times pq)}$.
- O posto ou "rank" de uma matriz é o mínimo entre o número de linhas (posto linha) ou colunas (posto coluna) linearmente independentes.

- Matriz transposta (cada coluna da matriz original é transformada em uma linha) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Determinante de uma matriz quadrada: é uma função que associa um escalar para uma dada matriz quadrada. Existem alguns métodos para se calcular o determinante de uma matriz. Exemplo:

$$|\mathbf{A}| = det(\mathbf{A}) = det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = -1 - 8 = -9$$

- Inversa de uma matriz : a inversa de uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ denotada por $\mathbf{A}^{-1}$ é tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Existem diversos métodos para se obter (numericamente) a inversa de uma matriz. A solução analítica é dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{C}$$

em que $\mathbf{C}$ é a matriz adjunta de $\mathbf{A}$, ou seja, a transposta da matriz que se obtem substituindo cada termo A_{ij} pelo determinante da matriz resultante ao se retirar de $\mathbf{A}$ a linha i e a coluna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Naturalmente, se $det(\mathbf{A}) = 0$ sua inversa não existe.

- Inversa generalizada de uma matriz (não necessariamente quadrada), é uma matriz $\mathbf{A}^{-}$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

- Em princípio, uma matriz pode ter infinitas inversas generalizadas.
- Mesmo que o $det(\mathbf{A}) = 0$ sua inversa generalizada pode ser obtida.

- Autovalores de uma matriz quadrada de dimensão n: são os n números, digamos $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)'$, que satisfazem:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0}$$

- Autovetores de uma matriz quadrada de dimensão n: são os n vetores que satisfazem a seguinte relação:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i; i = 1, ..., n$$

Os autovalores e autovetores são de extrema importância na decomposição e na verificação de certas propriedas de matrizes.

Tipos de matrizes

- Uma matriz (quadrada) é dita ser idempotente se $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$.
- Uma matriz (quadrada) é dita ser ortogonal $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$.
- Uma matriz (quadrada) é dita ser:
  - Positiva definida: se $\lambda_i > 0, \forall i$.
  - Positiva semi-definida: se $\lambda_i \geq 0, \forall i$ e $\exists$ pelo menos um $\lambda_i = 0$.
  - Negativa semi-definida: se $\lambda_i \leq 0, \forall i$ e $\exists$ pelo menos um $\lambda_i = 0$.
  - Negativa definida: se $\lambda_i < 0, \forall i$.

Propriedades

- Se todas as operações estiverem bem definidas, teremos:
- $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.
- $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$.
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
- $tr(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$.
- $tr(a\mathbf{A}) = a tr(\mathbf{A})$, a um escalar.
- $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$.

- $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}')$.
- $det(\mathbf{A}^{-1}) = [det(\mathbf{A})]^{-1}$.
- $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})det(\mathbf{B})$ se A e B forem ambas quadradas.
- $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}$.
- $a \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes a = a\mathbf{A}$, a escalar.
- $a\mathbf{A} \otimes b\mathbf{B} = ab(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$.
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$.
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}')$.
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1})$.
- $tr(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A})tr(\mathbf{B})$.
- Para $\mathbf{A}_{(m \times m)}$ e $\mathbf{B}_{(n \times n)}$, temos que $|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|^m |\mathbf{B}|^n$

- Forma quadrática. Sejam $\mathbf{Y}$ um vetor e $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada. Dizemos que $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}$ é uma forma quadrática em $\mathbf{Y}$ com matriz núcleo $\mathbf{A}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{p1} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1p} & A_{2p} & \ldots & A_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{p} A_{1i} Y_1 & \sum_{i=1}^{p} A_{2i} Y_2 & \ldots & \sum_{i=1}^{p} A_{pi} Y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_p \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} A_{ij} Y_i Y_j, \text{Se}\, \mathbf{A} = \mathbf{I}, \text{então}\, \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{p} Y_i^2 .
\end{aligned}
$$

Decomposição de Cholesky

- Seja $\boldsymbol{\Sigma}_{p \times p}$, simétrica e positiva definida (todos os seus auto-valores são positivos).
- Exemplo: Matriz de covariâncias e matriz de correlações.
- Definição: Dada uma matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ existe uma matriz $\mathbf{L}$, diagonal inferior com os valores da diagonal estritamente positivos, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}'$.
- Tal decomposição é única.
- Existem alguns algoritmos que possibilitam a obtenção de $\mathbf{L}$.

Exemplo

- Exemplo:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \approx \begin{bmatrix} 1,732 & 0 & 0 \\ 0,577 & 1,291 & 0 \\ 0,289 & 0,491 & 1,917 \end{bmatrix}$$

- Seja $\mathbf{\Sigma}_{p \times p}$. Então, $\mathbf{\Sigma}$ pode ser fatorizada como

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{E}\Lambda\mathbf{E}'$$

em que $\Lambda = diag(\lambda_1, ...\lambda_p)$ (autovalores) e as colunas da matriz **E** são formadas pelos respectivos autovetores orto-normalizados.

- A decomposição acima também vale se autovetores não estiverem ortonormalizados, neste caso, ela é dada por:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{E}\Lambda\mathbf{E}^{-1}$$

- **Observação: basicamente todas as operações e decomposições matriciais apresentadas estão implementadas no programa R.**

Alguns comandos para operações matriciais em R

Operação	Comando
$\mathbf{A}'$	t(**A**)
$\mathbf{A}^{-1}$	solve(**A**)
Cholesky(**A**)	chol(**A**)
$\mathbf{AB}$	**A**%*%**B**
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	kronecker(**A**,**B**)
Autovalores e autovetores de **A**	eigen(**A**)