

# Introdução, motivação, notação e revisão sobre matrizes

Prof. Caio Azevedo

# Introdução

- Estatística: área do conhecimento/Ciência que trata de metodologias (análise de dados) apropriadas para se coletar, organizar e analisar dados.
- A Estatística incorpora elementos de Probabilidade, Matemática (<https://cursos.ime.unicamp.br/disciplinas/>, Álgebra de Matrizes, Teoria da Medida, Análise Funcional etc), Computação e Ciência de dados (envolve outras formas de análise de dados), desenvolvendo (novas) metodologias.
- A Estatística é uma ferramenta muito importante na resolução de problemas levantados em diversas áreas: Biologia, Psicometria, Educação, Medicina, Física, Computação entre outras.
- É importante que o Estatístico participe de todas as etapas de um estudo (pesquisa/consultoria).

# Etapas para a resolução de um problema

- 1 Determinação do problema/objeto de estudo (incluindo a população de interesse).
- 2 Determinação dos objetivos (gerais e específicos).
- 3 Determinação do tamanho da amostra-delineamento amostral/experimental.
- 4 Levantamento dos dados: entrevistas, experimento, coleta de dados etc.
- 5 **Análise Descritiva.**
- 6 **Análise Inferencial (Modelos de regressão).**
- 7 Conclusões e elaboração dos relatórios/artigos/trabalhos pertinentes.

Pode-se retornar a pontos anteriores ou mesmo avançar, desconsiderando-se alguns pontos, consoante a necessidade.

# Pré-requisitos

- Cálculo diferencial e integral: [Cálculo I](#), [Cálculo II](#), [Cálculo III](#).
  - Probabilidade I : [página do curso de Probabilidade I](#)
  - Probabilidade II : [página do curso de Probabilidade II](#)
- Inferência: [página do curso de ME 419/ME 420 \(Graduação\)](#), [MI 402 \(Mestrado\)](#)
- Análise de regressão: [página do curso de ME 613 \(Graduação\)](#), [MI 406 \(Mestrado\)](#)

# Motivação

- Em geral, principalmente com o advento do “Big data” (ver também material enviado via Moodle) e (res)surgimento da nomenclatura “Data Science”, os conjuntos de dados, das mais diversas áreas, costumam apresentar estruturas multivariadas (por diversas razões, tais estruturas não são consideradas, ou o são de forma pouco apropriada).
- Até o momento, essencialmente, estudou-se metodologias para a análise de uma (única) variável resposta por vez.

# Motivação

- Em muitos casos, pode-se obter resultados mais precisos quando se analisa duas ou mais variáveis resposta simultaneamente.
- Outras vezes, há a necessidade (pelo próprio problema em si) de analisar duas ou mais variáveis resposta.
- Estudaremos métodos para a análise de duas ou mais variáveis resposta, simultaneamente, podendo haver ou não variáveis explicativas (covariáveis).

# Motivação

- Situação hipotética: a altura e o peso de dois grupos podem ser comparados separadamente (análise univariada) ou simultaneamente (análise multivariada).
  - Por exemplo, na primeira abordagem (univariada), as alturas médias podem não ser diferentes e os pesos médios sim.
  - Na segunda (multivariada) pelo menos uma das duas médias podem ser diferentes, entre os grupos.

# Motivação

- Caracterizar ([classificar](#)) melhor as unidades experimentais (pessoas, animais, cidades, objetos etc) (várias medidas precisam ser consideradas).
- [Charles Spearman](#), [Thomson](#), [Thurstone](#) e [Burt](#), buscaram obter uma melhor compreensão para “inteligência”. Este conceito está relacionado à várias variáveis cognitivas ([Análise Fatorial](#)).

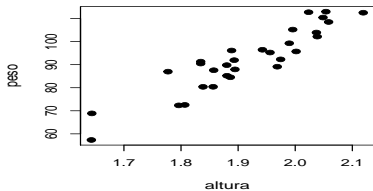


# Exemplo artificial “Toy example”

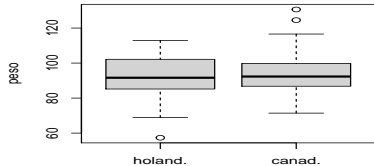
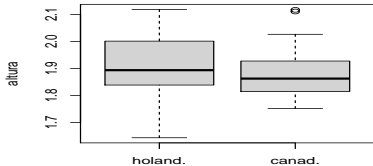
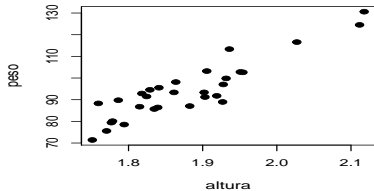
- Suponha o interesse em comparar dois grupos (holandeses e canadenses), em relação à sua altura e peso.
- Coletou-se (segundo determinado método de amostragem, [página do curso de ME430](#)) as informações de 30 indivíduos de cada população (homens e mulheres) e lhes foram medidos o peso (kg) e altura (em m).
- Pode-se realizar comparações para cada variável em separado (análise univariada) ou de forma conjunta (análise multivariada).

# Exemplo artificial cont.

holandeses



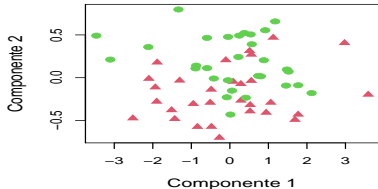
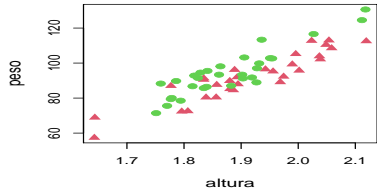
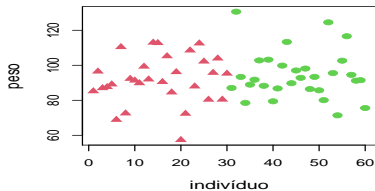
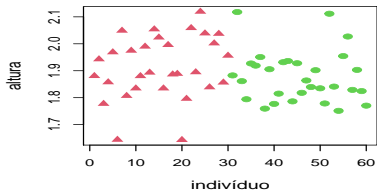
canadenses



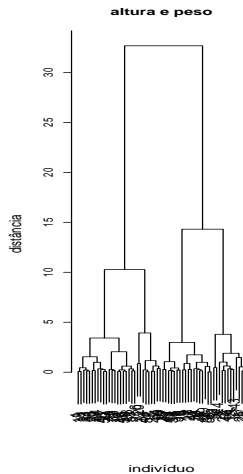
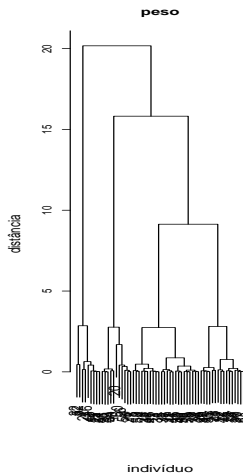
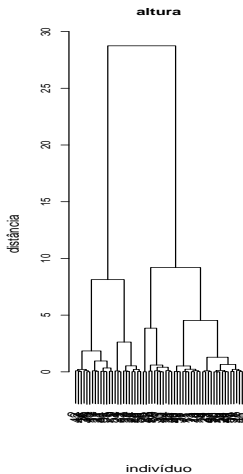
## Exemplo artificial cont.

- O teste t para verificar a igualdade entre as médias de altura e peso, feitos de forma separado para cada variável e considerando as variâncias populacionais iguais (veja), resultaram nos seguintes p-valores : 0,1927 (altura) e 0,5031 (peso).
- Assim, não rejeitamos a igualdade entre as médias, para cada variável, entre os grupos.
- Um determinado teste para a igualdade simultanea das médias das variáveis (que será visto mais adiante), resultou no seguinte p-valor:  $< 0,0001$ .
- Dessa forma, para o teste multivariado, rejeitamos a igualdade (de pelo menos) uma das médias, entre os grupos.

# Exemplo artificial cont. ▲ - holandeses, ● - canadenses



# Exemplo artificial cont.



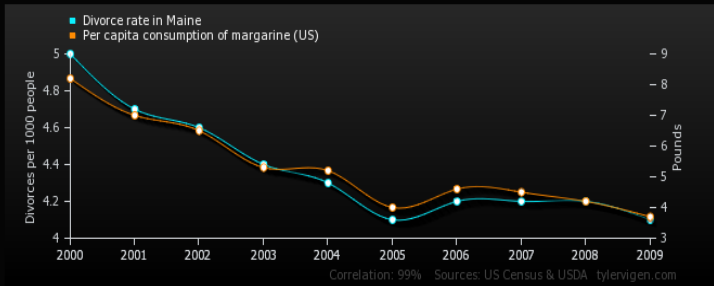
# Idéias gerais sobre análise multivariada

- Toda metodologia de análise multivariada busca estudar e/ou compreender e/ou utilizar, quando existem, estruturas de dependência e/ou correlação.
  - Estrutura de **dependência**: modelo probabilístico ou modelo estatístico (modelo de regressão), ou seja, a distribuição conjunta das variáveis (resposta) de interesse.
  - Estrutura de correlação: **Pearson** (variáveis contínuas e/ou discretas com suporte correspondendo à um conjunto infinito), **Spearman**, **Kendall** (não paramétricas), **tetracórica**, **policórica** (variáveis discretas com suporte correspondendo à a um conjunto finito).

# Correlação

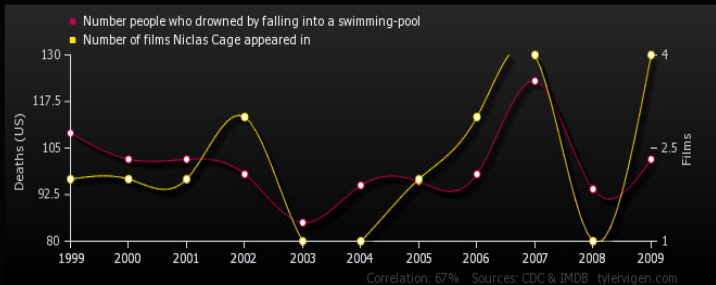
- Existência de correlação (correlação significativa) não implica, necessariamente, numa relação de **causalidade** (ref 2, ref 3) (do ponto de vista do problema).
  - Em geral, altura e peso são positivamente correlacionados, mas a altura não é determinada (biologicamente) pelo peso e vice-versa.
  - Outros fatores: genética, alimentação, meio-ambiente, de fato determinam (simultaneamente) a altura e peso.
  - Dependência é uma conceito mais amplo do que correlação.
- Os dois gráficos a seguir foram extraídos do site: [link](#)

# Número de divórcios em Maine × Consumo per capita de margarina (EUA)





# Número de pessoas que se afogaram em piscinas × número de filmes em que o Nicolas Cage apareceu



# Notações

- $X$ : variável aleatória,  $x$ : valor observado da variável aleatória.
- $\mathbf{X}$ : vetor aleatório,  $\mathbf{x}$ : valor observado do vetor aleatório.
- $f_X(x)$ : fdp (função densidade de probabilidade, ou simplesmente densidade, no caso contínuo, ou função de probabilidade, no caso discreto), relativa à uma variável aleatória.
- $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ : fdp (função densidade de probabilidade, ou simplesmente densidade, no caso contínuo, ou função de probabilidade, no caso discreto), relativa à um vetor aleatório.
- $\mathcal{E}(X)$  média,  $\mathcal{V}(X)$  (variância),  $Cov(X_1, X_2)$  (covariância/matriz de variâncias e covariâncias  $\equiv$  matriz de covariâncias),  $Corre(X_1, X_2)$  (correlação/matriz de correlações).

# Matriz de dados

Indivíduo	Variável 1	Variável 2	...	Variável p
1	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1p}$
2	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$X_{n1}$	$X_{n2}$	...	$X_{np}$

Em geral matrizes e vetores serão escritos com letra maiúscula (se forem objetos aleatórios) e com letra minúscula (se forem objetos não aleatórios).

## Revisão de álgebra de matrizes [ref 1](#), [ref 2](#), [ref 3](#), [ref 4](#)

- Uma matriz é um arranjo retangular de elementos (números, variáveis aleatórias, letras):

$$\mathbf{A}_{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

- Um vetor é uma matriz com somente uma linha (vetor linha) ou somente uma coluna (vetor coluna).

$$\mathbf{A}_{(1 \times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

- Se a matriz tiver apenas uma linha e uma coluna teremos um escalar.

- Denotaremos uma matriz ou vetor por uma letra maiúscula ou minúscula em negrito.
- Uma matriz é dita ser quadrada se o número de linhas for igual ao número de colunas.

$$\mathbf{A}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal: matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são iguais à 0.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal inferior: matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal principal são iguais à 0.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal superior: matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais à 0.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz identidade: matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos iguais à 1.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz simétrica ( $A_{ij} = A_{ji}$ ),  $\forall i, j; i \neq j$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

# Operações com matrizes

- Soma de matrizes :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \\ A_{31} + B_{31} & A_{32} + B_{32} \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \\ A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} & A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} \end{bmatrix}$$



- Traço de uma matriz quadrada: é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

- O operador  $\text{vec}$  cria um vetor coluna, a partir de uma matriz, pela concatenação de suas colunas:

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \text{vec} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix}$$

- Sejam  $\mathbf{A}_{(n \times p)}$  e  $\mathbf{B}_{(m \times q)}$  duas matrizes quaisquer. O produto de Kronecker entre elas é definido por:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{B} & A_{12}\mathbf{B} & \dots & A_{1p}\mathbf{B} \\ A_{21}\mathbf{B} & A_{22}\mathbf{B} & \dots & A_{2p}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1}\mathbf{B} & A_{n2}\mathbf{B} & \dots & A_{np}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

- A resultante do produto de Kronecker será uma matriz  $\mathbf{C}_{(nm \times pq)}$ .
- O posto ou “rank” de uma matriz é o mínimo entre o número de linhas (posto linha) ou colunas (posto coluna) linearmente independentes.

- Matriz transposta (cada coluna da matriz original é transformada em uma linha) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Determinante de uma matriz quadrada: é uma função que associa um escalar para uma dada matriz quadrada. Existem alguns métodos para se calcular o determinante de uma matriz. Exemplo:

$$|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = -1 - 8 = -9$$

- Inversa de uma matriz : a inversa de uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  denotada por  $\mathbf{A}^{-1}$  é tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Existem diversos métodos para se obter (numericamente) a inversa de uma matriz. A solução analítica é dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{C}$$

em que  $\mathbf{C}$  é a matriz adjunta de  $\mathbf{A}$ , ou seja, a transposta da matriz que se obtém substituindo cada termo  $A_{ij}$  pelo determinante da matriz resultante ao se retirar de  $\mathbf{A}$  a linha  $i$  e a coluna  $j$  multiplicado por  $(-1)^{i+j}$ . Naturalmente, se  $\det(\mathbf{A}) = 0$  sua inversa não existe.

- Inversa generalizada de uma matriz (não necessariamente quadrada), é uma matriz  $\mathbf{A}^-$  tal que

$$\mathbf{AA}^- \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

- Em princípio, uma matriz pode ter infinitas inversas generalizadas.
- Mesmo que o  $\det(\mathbf{A}) = 0$  sua inversa generalizada pode ser obtida.

- Autovalores de uma matriz quadrada de dimensão  $n$ : são os  $n$  números, digamos  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)'$ , que satisfazem:

$$|\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}| = 0$$

- Autovetores de uma matriz quadrada de dimensão  $n$ : são os  $n$  vetores que satisfazem a seguinte relação:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i; i = 1, \dots, n$$

Os autovalores e autovetores são de extrema importância na decomposição e na verificação de certas propriedades de matrizes.

# Tipos de matrizes

- Uma matriz (quadrada) é dita ser idempotente se  $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$ .
- Uma matriz (quadrada) é dita ser ortogonal  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$ .
- Uma matriz (quadrada) é dita ser:
  - Positiva definida: se  $\lambda_i > 0, \forall i$ .
  - Positiva semi-definida: se  $\lambda_i \geq 0, \forall i$  e  $\exists$  pelo menos um  $\lambda_i = 0$ .
  - Negativa semi-definida: se  $\lambda_i \leq 0, \forall i$  e  $\exists$  pelo menos um  $\lambda_i = 0$ .
  - Negativa definida: se  $\lambda_i < 0, \forall i$ .

# Propriedades

- Se todas as operações estiverem bem definidas, teremos:
- $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$ .
- $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ .
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .
- $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$ .
- $tr(a\mathbf{A}) = atr(\mathbf{A})$ ,  $a$  um escalar.
- $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$ .



- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}')$ .
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = [\det(\mathbf{A})]^{-1}$ .
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$  se  $A$  e  $B$  forem ambas quadradas.
- $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}$ .
- $a \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes a = a\mathbf{A}$ ,  $a$  escalar.
- $a\mathbf{A} \otimes b\mathbf{B} = ab(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$ .
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$ .
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}')$ .
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1})$ .
- $\text{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A})\text{tr}(\mathbf{B})$ .
- Para  $\mathbf{A}_{(m \times m)}$  e  $\mathbf{B}_{(n \times n)}$ , temos que  $|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|^m |\mathbf{B}|^n$

- Forma quadrática. Sejam  $\mathbf{Y}$  um vetor e  $\mathbf{A}$  uma matriz quadrada. Dizemos que  $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}$  é uma forma quadrática em  $\mathbf{Y}$  com matriz núcleo  $\mathbf{A}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p Y_i A_{i1} & \sum_{i=1}^p Y_i A_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^p Y_i A_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_p \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p A_{ij} Y_i Y_j, \text{ se } \mathbf{A} = \mathbf{I}, \text{ então } \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^p Y_i^2. \end{aligned}$$

# Decomposição de Cholesky

- Seja  $\Sigma_{p \times p}$ , simétrica e positiva definida (todos os seus auto-valores são positivos).
- Exemplo: Matriz de covariâncias e matriz de correlações.
- Definição: Dada uma matriz  $\Sigma$  existe uma matriz  $L$ , diagonal inferior com os valores da diagonal estritamente positivos,  $\Sigma = LL'$ .
- Tal decomposição é única.
- Existem alguns algoritmos que possibilitam a obtenção de  $L$ .

# Exemplo

- Exemplo:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L \approx \begin{bmatrix} 1,732 & 0 & 0 \\ 0,577 & 1,291 & 0 \\ 0,289 & 0,491 & 1,917 \end{bmatrix}$$

- Seja  $\Sigma_{p \times p}$ . Então,  $\Sigma$  pode ser fatorizada como

$$\Sigma = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}'$$

em que  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  (autovalores) e as colunas da matriz  $\mathbf{E}$  são formadas pelos respectivos autovetores orto-normalizados.

- A decomposição acima também vale se autovetores não estiverem ortonormalizados, neste caso, ela é dada por:

$$\Sigma = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^{-1}$$

- **Observação:** basicamente todas as operações e decomposições matriciais apresentadas estão implementadas no **programa R**.

# Alguns comandos para operações matriciais em R

Operação	Comando
$\mathbf{A}'$	<code>t(A)</code>
$\mathbf{A}^{-1}$	<code>solve(A)</code>
Cholesky( $\mathbf{A}$ )	<code>chol(A)</code>
$\mathbf{AB}$	<code>A%*%B</code>
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	<code>kron(A,B)</code>
Autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$	<code>eigen(A)</code>

```
> # Criando uma matriz A
> A = matrix(c(1,2,3,0,1,4,5,6,0),ncol=3,nrow=3,byrow=TRUE)
> A
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    0    1    4
[3,]    5    6    0
> # transposta da matriz
> t(A)
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    5
[2,]    2    1    6
[3,]    3    4    0
```

```
> # determinante da matriz
```

```
> det(A)
```

```
[1] 1
```

```
> # inversa da matriz
```

```
> solve(A)
```

```
      [,1] [,2] [,3]
```

```
[1,] -24  18  5
```

```
[2,]  20 -15 -4
```

```
[3,]  -5  4  1
```



```
> # multiplicação entre as matrizes A e B
> B = matrix(c(7,2,1,0,3,-1,-3,4,-2),ncol=3,nrow=3,byrow=TRUE)
> B
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    7    2    1
[2,]    0    3   -1
[3,]   -3    4   -2
> A%*%B
      [,1] [,2] [,3]
[1,]   -2   20  -7
[2,]  -12   19  -9
[3,]   35   28  -1
```

```
> # produto de Kronecker entre matrizes A e B
> B = matrix(c(1,0,-1,2),ncol=2,nrow=2,byrow=TRUE)
> kronecker(A,B)
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]
[1,]	1	0	2	0	3	0
[2,]	-1	2	-2	4	-3	6
[3,]	0	0	1	0	4	0
[4,]	0	0	-1	2	-4	8
[5,]	5	0	6	0	0	0
[6,]	-5	10	-6	12	0	0

```
> # decomposição de A em autovalores e autovetores
```

```
> eigen(A)
```

```
eigen() decomposition
```

```
$values
```

```
[1] 7.25602242 -5.22966960 -0.02635282
```

```
$vectors
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	-0.4992702	0.2257802	-0.7576984
[2,]	-0.4667420	0.5263485	0.6321277
[3,]	-0.7299871	-0.8197442	-0.1621965

```
> Lambda = eigen(A)$value # autovalores
```

```
> E = eigen(A)$vectors # autovetores
```

```
> E%%diag(Lambda)%%solve(E)
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1.000000e+00	2	3.00000e+00
[2,]	-2.111158e-15	1	4.00000e+00
[3,]	5.000000e+00	6	-7.65772e-16

```

# decomposição de Cholesky
> A = matrix(c(4,12,-16,12,37,-43,-16,-43,98),ncol=3,nrow=3,byrow=TRUE)
> L = chol(A); L # note que aqui L é diagonal superior
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    6   -8
[2,]    0    1    5
[3,]    0    0    3
> t(L)%*%L
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    4   12  -16
[2,]   12   37  -43
[3,]  -16  -43   98

```

# Objetivos

- Desenvolvimento, por parte do aluno, da compreensão e do poder de desenvolvimento Estatístico de metodologias e das necessárias ferramentas matemáticas.
- Desenvolvimento de habilidades computacionais.
- Aprendizado de modelagem e resolução de problemas com dados multivariados.
- O quanto possível, estimular a interação com o responsável pelo problema, a fim de buscar as melhores soluções. Neste curso, analisar-se-á conjuntos de dados reais para os quais, basicamente, nunca, não se disporá de um consultante (o Prof. tentará fazer esse papel).