Função geradora de probabilidades

Prof. Caio Azevedo

Funções geradoras de probabilidade

- Seja X uma vad (variável aleatória discreta), defina em uma espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Então, a fgp (função geradora de probabilidades) de X é uma função $G_X : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, tal que:

$$G_X(t) = \mathcal{E}(t^X) = \sum_x P(X = x)t^x = \sum_x f_X(x)t^X,$$

  se $\mathcal{E}(|t^X|) \leq \infty$.

- Observações:
  - Definida apenas para vad's.
  - Como o nome sugere, é útil para gerar probabilidades de uma dada vad X.

Funções geradoras de probabilidade

- Por generalidade, vamos considerar que o suporte de X seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, ...\}$ e vamos denotar, por simplicidade, $p_x = P(X = x) = f_X(x)$.
- Com as devidas adaptações os resultados valem para uma conjunto finito.
- Note que

$$G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} p_x t^x = p_0 t^0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 ...$$

Funções geradoras de probabilidade

- Assim:

$$G_X(0) = p_0 + p_1 \times 0 + p_2 \times 0^2 + p_3 \times 0^3 ... = p_0 = P(X = 0)$$

- Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} G_X(t) &= G'_X(t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{x=0}^{\infty} p_x t^x = \frac{\partial}{\partial t} \left(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + ... \right) \\
&= 0 + p_1 + 2p_2 t + 3p_3 t^2 + ... \\
&\rightarrow G'_X(0) = p_1 + 2p_2 \times 0^2 + 3p_3 \times 0^2 + ... = P(X = 1)
\end{aligned}$$

Funções geradoras de probabilidade

- Continuando:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} G_X(t) &= G''_X(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{x=0}^{\infty} p_x t^x = \frac{\partial}{\partial t} \left(p_1 + 2p_2 t + 3p_3 t^2 + ...\right) \\
&= 0 + 2p_2 + 6p_3 t + ... \\
&\rightarrow G''_X(0) = 2p_2 + 6p_3 \times 0 + ... = 2 \times P(X = 2)
\end{aligned}
$$

- Mais ainda:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial t^3} G_X(t) &= G'''_X(t) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \sum_{x=0}^{\infty} p_x t^x = \frac{\partial}{\partial t} \left(2p_2 + 6p_3 t + ...\right) \\
&= 0 + 6p_3 + ... \rightarrow G'''_X(0) = 6p_3 + ... = 6 \times P(X = 3) + ...
\end{aligned}
$$

Funções geradoras de probabilidade

- Assim é possível provar (exercício) que:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_X(t)\right|_{t=0} &= \left. G_X^{(k)}(t)\right|_{t=0} = k!P(X=k) \\
&\to \quad p_k = P(X=k) = \frac{1}{k!}\left. G_X^{(k)}(t)\right|_{t=0} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Funções geradoras de probabilidade

- Além disso, é possível provar que o k é-simo momento fatorial de X, ou seja, $\mathcal{E}\left(X(X-1)(X-2)...(X-k+1)\right)$ é tal que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(\frac{X!}{(X-k)!}\right) &= \left.\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_X(t)\right|_{t=1} = \left.\sum_{x=0}^{\infty}\left\{\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)\right\} p_x t^{x-k}\right|_{t=1} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\left\{\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)\right\} p_x = \mathcal{E}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right)
\end{aligned}
$$

FGP de soma de va's independentes

- Uma propriedade importante da função geradora de momentos é a seguinte: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a's independentes, e defina $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Então

$$G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t) \cdots G_{X_n}(t).$$

- Ou seja, a f.g.m. da soma de v.a's independentes é igual ao produto das f.g.m. de cada v.a.
- Se além de independentes foram identicamente distribuídas (ou seja $X_i \overset{iid}{\sim} X$), então

$$G_{S_n}(t) = G_X^n(t).$$

Exemplos: $X \sim \text{binomial}(n, p)$

- Temos que

$$
\begin{aligned}
G_X(t) &= E(t^X) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k} \\
&= (pt + 1 - p)^n.
\end{aligned}
$$

Exemplos: $X \sim$ geométrica(p)

- Temos que

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E(t^X) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n p(1-p)^{n-1} \\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}(t(1-p))^n \\ &= \frac{pt}{1-(1-p)t}. \end{aligned}$$

Exemplos: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

- Temos que

$$
\begin{aligned}
G_X(t) &= E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.
\end{aligned}
$$

Exemplos: $X \sim$ logaritmica(p)

- Se $X \sim \text{logaritmica}(p), p \in (0,1)$, então:

$$P(X = x) = f_X(x) = -\frac{1}{\ln(1-p)}\frac{p^x}{x}\mathbb{1}_{\{1,2,3,\ldots\}}(x)$$

- Obs: temos que $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{p^x}{x} = -\ln(1-p)$ (expansão em Séries de Maclaurin de $-\ln(1-p)$)

Exemplos: $X \sim \text{logaritmica}(p)$

- Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
G_X(t) &= E(t^X) = \sum_{x=1}^{\infty} -\frac{t^x}{\ln(1-p)}\frac{p^x}{x} = -\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{(tp)^x}{x} \\
&= \frac{\ln(1-pt)}{\ln(1-p)}, t \in (-1/p, 1/p)
\end{aligned}
$$

Observação

- Note que, uma vez que conhecemo a fgp de uma dada vad X, temos uma forma direta de encontrar sua respectiva fdp, através da Equação (1).