Função geradora de momentos

Prof. Caio Azevedo

Funções geradoras de momentos

- Seja X uma v.a. qualquer (discreta ou contínua). Assim (como visto aqui e aqui) seu n-ésimo *momento* (centrado em 0 se existir é dado por

$$\mathcal{E}(X^n) = \begin{cases} \sum_x x^n f(x); \text{ se } \ X \text{ é discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx; \text{ se } \ X \text{ é contínua} \end{cases}$$

Funções geradoras de momentos

- A *função geradora de momentos* (fgm) de uma v.a. X é uma função $\phi_X : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^+$

$$\phi_X(t) := \mathcal{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f_X(x); \text{ se } X \text{ é discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx; \text{ se } X \text{ é contínua.} \end{cases}$$

- Lembre que, se $\mathcal{E}(g(X))\ \exists$, então é possível utilizar a fdp de X para calcular tal esperança.

Características

- ϕ_X é chamada de fgm pois, a partir dela, é possível obter (todos) os momentos de X (quando estes existem).
- Nem sempre a fgm de uma va existe.
- Nem sempre a fgm terá uma forma útil (expressão fechada).
- É necessário apenas que a fgm existam $\forall t \in (-a, a)$, para algum $a > 0$, tão pequeno quanto necessário.

Obtenção dos momentos a partir da fgm

- Por exemplo,

$$\phi_X'(t) = \frac{d}{dt}E(e^{tX}) = E\left[\frac{d}{dt}e^{tX}\right] = E(Xe^{tX}),$$

portanto $\phi_X'(0) = E(X)$.

- Similarmente,

$$\phi_X''(t) = \frac{d}{dt}\phi_X'(t) = E\left[\frac{d}{dt}Xe^{tX}\right] = E(X^2e^{tX}),$$

logo $\phi_X''(0) = E(X^2)$.

Obtenção dos momentos a partir da fgm

- Em geral, a n-ésima derivada de $\phi_X(t)$ avaliada em $t = 0$ é igual a $E(X^n)$, pois

$$\phi_X^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n}\phi_X(t) = E(X^n e^{tX}).$$

- Logo $\phi_X^{(n)}(0) = E(X^n), \; n \geq 1$.
- Dem: exercício (indução finita).

Variáveis aleatórias independentes

- Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ va's quaisquer (discretas, contínuas, algumas discretas, outras contínuas). Assim, dizemos que elas são conjuntamente independentes se, e somente se:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \mathbb{1}_{A_i}(x_i).$$

em que $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)'$ e $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)'$.

- Neste caso, vale a independência para qualquer subconjuntos de $\boldsymbol{X}$.

FGM de soma de va's independentes

- Uma propriedade importante da função geradora de momentos é a seguinte: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a's independentes, e defina $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Então

$$\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \cdots \phi_{X_n}(t).$$

- Ou seja, a f.g.m. da soma de v.a's independentes é igual ao produto das f.g.m. de cada v.a.

- Se além de independentes foram identicamente distribuídas (ou seja $X_i \overset{iid}{\sim} X$), então

$$\phi_{S_n}(t) = \phi_X^n(t).$$

Funções geradoras de momentos de distribuições especiais

- Se duas variáveis aleatórias, digamos X e Y, tiverem a mesma fgm, então elas tem a mesma distribuição.
- É possível encontrar a fdp (discreta ou contínua) a partir de uma dada fgm. Contudo, isto está além do escopo deste curso.
- Vamos calcular a fgm (e, através dela, alguns dos momentos) para alguns dos modelos discretos e contínuos especiais, vistos anteriormente.

Distribuição binomial

- Exemplo: Seja $X \sim \text{binomial}(n, p)$, temos que (pelo binômio de Newton)

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{n-k} \\
&= (pe^t + 1 - p)^n.
\end{aligned}$$

Distribuição binomial

- Derivando $\phi_X(t)$ com relação a t, segue que

$$\phi_X'(t) = n(pe^t + 1 - p)^{n-1} pe^t.$$

- Portanto,

$$E(X) = \phi_X'(0) = np.$$

Distribuição binomial

- Agora, derivando $\phi'_X(t)$, podemos obter o segundo momento de X, ou seja

$$\phi''_X(t) = n(n-1)(pe^t + 1 - p)^{n-2}(pe^t)^2 + n(pe^t + 1 - p)^{n-1}pe^t,$$

então $E(X^2) = \phi''_X(0) = n(n-1)p^2 + np$.

- Portanto

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np(1-p)$$

- Exercício: calcule a fgm de $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ e, através dela, obtenha a fgm da binomial(n, p).

Distribuição geométrica

- Seja $X \sim$ geométrica(p) (número de tentativas até obter o primeiro sucesso). Então, temos que

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} p(1-p)^{n-1} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} (e^t(1-p))^n \\
&= \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\log(1-p)
\end{aligned}$$

Distribuição geométrica

- Derivando uma primeira e uma segunda vez, obtemos, respectivamente:

$$\phi'_X(t) = \frac{pe^t}{\left[(p-1)e^t+1\right]^2}; \;\; \phi''_X(t) = -\frac{pe^t\left[(p-1)e^t-1\right]}{\left[(p-1)e^t+1\right]^3}.$$

- Portanto $E(X) = \phi'_X(0) = \dfrac{1}{p}$; $E(X^2) = \phi''_X(0) = \dfrac{2-p}{p^2}$; $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Distribuição de Poisson

- Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, temos que

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}.\end{aligned}$$

Distribuição de Poisson

- Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, temos que
- Derivando uma primeira e uma segunda vez, obtemos, respectivamente:

$$\phi'_X(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)},$$

$$\phi''_X(t) = (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t - 1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

- Portanto $E(X) = \phi'_X(0) = \lambda$; $E(X^2) = \phi''_X(0) = \lambda^2 + \lambda$; $V(X) = \lambda$.

Distribuição uniforme(α, β)

- Seja $X \sim$ uniforme$[\alpha, \beta]$, então

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \int_\alpha^\beta e^{tx} \frac{1}{\beta - \alpha} dx \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta e^{tx} dx \\ &= \frac{e^{t\beta} - e^{t\alpha}}{t(\beta - \alpha)}, \ t \neq 0\end{aligned}$$

- Exercício: Calcule $\phi'_X(t)$ e $\phi''_X(t)$ e obtenha o primeiro momento e a variância de X.

Distribuição $\exp(\theta)$

- Seja $X \sim$ exponencial(θ), então

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx}\theta e^{-\theta x} dx \\
&= \theta \int_0^\infty e^{-(\theta - t)x} dx = \frac{\theta}{\theta - t};\ t < \theta
\end{aligned}$$

- Derivando com relação à t, obtemos que

$$\phi'_X(t) = \frac{\theta}{(\theta - t)^2}; \phi''_X(t) = \frac{2\theta}{(\theta - t)^3}.$$

- Logo, $E(X) = \phi'_X(0) = \frac{1}{\theta};\ E(X^2) = \phi''_X(0) = \frac{2}{\theta^2};\ V(X) = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}.$

Distribuição N(μ, σ^2)

- Sejam $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z \sim N(0,1)$, assim $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Por outro lado

$$
\begin{aligned}
\phi_Z(t) &= E(e^{tZ}) = \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tz} e^{-z^2/2} dz = e^{t^2/2} \underbrace{\int_{\mathcal{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-t)^2/2} dz}_{1} \\
&= e^{t^2/2}.
\end{aligned}
$$

- Mas,

$$
\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E(e^{tX}) = E(e^{t\sigma Z + t\mu}) = e^{t\mu} E(e^{(t\sigma)Z}) = e^{t\mu}\phi_Z(t\sigma) \\
&= e^{t\mu} e^{\sigma^2 t^2/2} = e^{t\mu + \sigma^2 t^2/2}
\end{aligned}
$$

Distribuição N(μ, σ^2)

- Logo

$$\begin{aligned} \phi_X^{'}(t) &= e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2}(\mu + \sigma^2 t), \\ \phi_X^{''}(t) &= e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2}(\mu + \sigma^2 t)^2 + e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2}(\sigma^2). \end{aligned}$$

- Portanto

$$\begin{aligned} \phi_X^{'}(0) &= E(X) = e^0(\mu) = \mu, \\ \phi_X^{''}(0) &= E(X^2) = e^0\mu^2 + e^0(\sigma^2) = \mu^2 + \sigma^2, \\ V(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Distribuição Qui-quadrado

- Se $X \sim \chi^2_n$, então $\left(u = \dfrac{x(1-2t)}{2}; du = zds\dfrac{(1-2t)dx}{2}\right)$:

$$
\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \int_{\mathcal{R}^+} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x(1-2t)/2} dx \\
&= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)(1-2t)^{n/2}} \int_{\mathcal{R}^+} u^{n/2-1} e^{-u} du \\
&= \frac{2^{n/2}\Gamma(n/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)(1-2t)^{n/2}} = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}
\end{aligned}
$$

Distribuição Qui-quadrado

- Por outro lado, podemos provar que se $Z_1, \ldots, Z_n$ são v.a's iid com distribuição $N(0,1)$, então $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ tem distribuição qui-quadrado com n- graus de liberdade, denotada por $\chi^2_{(n)}$.
- Definindo $X_i = Z_i^2$, temos que

$$
\begin{aligned}
\phi_{X_i}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx^2} e^{-x^2/2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\tau^2} dx \ (\tau^2 = (1-2t)^{-1}) \\
&= (1-2t)^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

Distribuição Qui-quadrado

- Logo, como $Z_i \overset{iid}{\sim} Z$, e $Z \sim N(0,1)$, então:

$$\phi_X(t) = \phi_Z(t)^n = (1-2t)^{-n/2}.$$

- Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} \phi'_X(t) &= n(1-2t)^{-(n+2)/2}, \\ \phi''_X(t) &= n(n+2)(1-2t)^{-(n+4)/2}. \end{aligned}$$

Distribuição Qui-quadrado

- Consequentemente:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(X) = \phi'_X(0) &= n(1-0t)^{-(n+2)/2} = n, \\
\mathcal{E}(X^2) = \phi''_X(0) &= n(n+2)(1-0t)^{-(n+4)/2} = n(n+2), \\
\mathcal{V}(X) &= n^2 + 2n - n^2 = 2n.
\end{aligned}
$$