Função geradora de momentos

Prof. Caio Azevedo

Função característica

- Seja X uma v.a. qualquer (discreta ou contínua).
- A *função característica* (fc) de uma v.a. X é uma função, digamos (φ_X), $\varphi_X : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$

$$\varphi_X(t) := \mathcal{E}(e^{itX}) = \begin{cases} \sum_x e^{itx} f_X(x); \text{ se } X \text{ é discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx; \text{ se } X \text{ é contínua.} \end{cases}$$

- Lembre que, se $\mathcal{E}(g(X))$ $\exists$, então é possível utilizar a fdp de X para calcular tal esperança.

Características/Propriedades

- A fc de uma dada va X sempre existe, mesmo quando f_X e/ou ϕ_X não exista(m).
  - Prova: Sabemos que $\mathcal{E}(e^{itX}) < \infty \leftrightarrow \mathcal{E}(|e^{itX}|) < \infty$. Além disso, temos que:

$$
\begin{aligned}
e^{itx} &= \cos(tx) + i\text{sen}(tx) \rightarrow \left|e^{itx}\right| = |\cos(tx) + i\text{sen}(tx)| \\
&= \cos^2(tx) + \text{sen}^2(tx) = 1
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\mathcal{E}(\left|e^{itx}\right|) = \mathcal{E}(1) = 1.$$

Características/Propriedades

- $\varphi(0) = 1$.
- $|\varphi(t)| \leq 1, \forall t$.
- Se $Y = a + bX$, $a, b \in \mathcal{R}$, então $\varphi_Y(t) = e^{iat}\varphi_X(bt)$
- Pelo teorema da unicidade, dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, temos que:
    - Para uma dada φ_X temos uma única f_X (fdp) e vice-versa.
    - Para duas variáveis aleatórias, digamos X e Y, $f_X = f_Y \leftrightarrow \varphi_X = \varphi_Y$

Características

- Também é possível obter momentos (quando estes existem) através da função característica. Com efeito (exercício):

$$\frac{\partial}{\partial t^n}\varphi_X(t)\Big|_{t=0} = \varphi_X^{(n)}(0) = i^n E(X^n),\ n \geq 1$$

- Obs: ao nível de Graduação, apesar de ser um função complexa, em termos práticos, trata-se a obtenção da FC de uma va qualquer, como se fosse a integral de uma função real.

FC de soma de va's independentes

- Uma propriedade importante da função característica é a seguinte: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a's independentes, e defina $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Então

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdots \varphi_{X_n}(t).$$

- Ou seja, a f.g.m. da soma de v.a's independentes é igual ao produto das f.g.m. de cada v.a.

- Se além de independentes foram identicamente distribuídas (ou seja $X_i \overset{iid}{\sim} X$), então

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_X^n(t).$$

Observações

- A FC tem esse nome por sempre existir e por determinar, unicamente, cada va X definida em um dado espaço de probabilidade.
- Devido à OBS anterior, para obter a FC de uma va, podemos calcular a fgm (se existir) e fazer na respectiva fórmula da fgm $t = it$.
- Exercício: obter a FC de todas os modelos (discretos e contínuos) especiais, vistos anteriormente.