Aula de Exercícios 7: Variáveis aleatórias contínuas

Notas de Aula da Professora Verónica González-López, digitadas por Beatriz Cuyabano, Pós-Graduação IMECC/UNICAMP, com modificações do Prof. Caio Azevedo

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Exemplo

Dada a função

$$f_X(x) = 2e^{-2x}\mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(x)$$

- [(a)] Mostre que esta é uma legítima f.d.p. .
- [(b)] Calcule a probabilidade de $X > 10$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 166.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

- [(a)] Uma função densidade de probabilidade deve satisfazer as seguintes propriedades:
  - [(i)] $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$.
  - [(ii)] $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Note que e^{-x} é positiva para qualquer x, e consequentemente $2e^{-2x}$. Resta mostrar que sua integral, na reta, é igual a 1. Mas, sabemos a antiderivada de $2e^{-2x}$ é dada por:

$$\int 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

- [(a)] (cont.) Note que a função é positiva $\forall x > 0$; enquanto que para $x \leq 0$, ela é 0. Então:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-0}\right) = 1.\end{aligned}$$

- [(b)] A probabilidade requerida é dada por:

$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} 2e^{-2x}dx = \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-2\times 10}\right) = \frac{1}{e^{20}}.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Exemplo

Uma variável aleatória X tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f_X(x) = Cx\mathbb{1}_{[0,1/2)}(x) + C(1-x)\mathbb{1}_{[1/2,1]}(x).$$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 166.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

- [(a)] Devemos escolher C de modo que f_X satisfaça
  - [(i)] $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$.
  - [(ii)] $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Por (i) e pela definição de uma fdp, temos que $C > 0$.

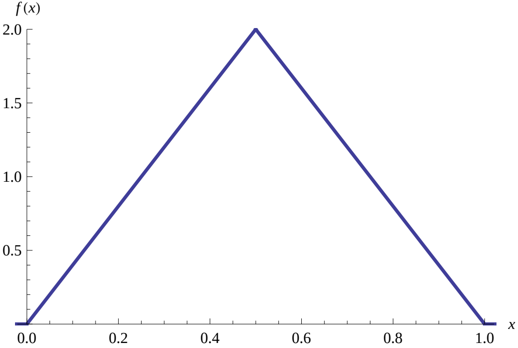
Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

- Por outro lado, para que C satisfaça (ii), temos que:

$$
\begin{aligned}
1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} Cxdx + \int_{1/2}^{1} C(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx \\
&= C\int_{0}^{1/2} xdx + C\int_{1/2}^{1}(1-x)dx \\
&= C\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}\right) \\
&= C\left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = C\frac{1}{4} \\
&\Rightarrow C = 4
\end{aligned}
$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

- [(b)] O gráfico de $f(x)$ é dado por:



Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

- [(c)] Para encontrarmos as probabilidades dos eventos, basta integrar nas regiões correspondentes, ou seja:

$$P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} 4xdx = 1/2$$

- Note que $P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$. Além disso, temos que:

$$P(1/4 \leq X \leq 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} f(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} 4xdx + \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)dx = \frac{3}{4}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Exemplo

Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da variável aleatória X com a densidade triangular em $[0, 1]$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 171.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

- Basta aplicar as definições do valor esperado e da variância, ou seja, para a média:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1/2} 4x^2 dx + \int_{1/2}^{1} 4x(1-x)dx \\ &= \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{2}{3}x^2(3-2x)\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

- Para a variância

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathcal{E}(X))^2 f(x)dx = \int_0^{1/2} 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 x dx \\
&+ \int_{1/2}^{1} 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 (1-x)dx = \left[x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} \\
&+ \left[-x^4 + \frac{8}{3}^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

- Calcule $\mathcal{V}(X)$ usando $\mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}^2(X)$.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

- A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

- Temos que para $x \in [0, 1/2)$, F_X é dada por

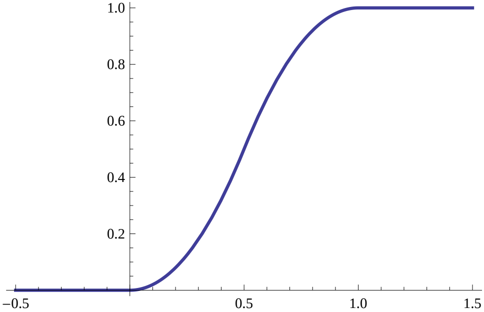
$$F_X(x) = \int_{0}^{x} 4tdt = 2x^2.$$

- Para $x \in [1/2, 1]$, a fda é dada por

$$F_X(x) = \int_{0}^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^{x} = 4(1-t)dt = -2x^2 + 4x - 1$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Para valores de $x \geq 1$, a acumulada assume valor 1. O gráfico de F_X é dado por:



Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Exemplo

O tempo médio que um consumidor gasta no supermercado é de 25 minutos. Qual é a probabilidade que um consumidor gaste mais de trinta minutos?

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

- Quando desejamos modelar o tempo de espera entre dois fenômenos que assumimos independentes (por exemplo, "o cliente chega" e "o cliente vai embora"), é possível mostrar, sob algumas condições de regularidade, que a distribuição exponencial é a distribuição de probabilidade do tempo entre os eventos (se o processo de contagem seguir uma distribuição de Poisson).
- Sendo assim, temos que $X \sim exp(\lambda)$, e como $25 = \mathcal{E}(X) = 1/\lambda$, então $\lambda = 1/25$. Logo

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{30}{25}}\right) = 0.3013$$

Distribuição Uniforme, exemplo I

Exemplo

Dada a v.a. X, uniforme em $(5, 10)$, calcule as probabilidades abaixo:

- [(a)] $P(X < 7)$
- [(b)] $P(8 < X < 9)$
- [(c)] $P(X > 8{,}5)$
- [(d)] $P(|X - 7{,}5| > 2)$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 195.

Distribuição Uniforme, exemplo I

- Note que a densidade de X é $f(x) = 1/(10-5)$ se $x \in (5,10)$ e 0 caso contrário. Basta integrar na região dos eventos, isto é:
  - [(a)] $P(X < 7) = \int_5^7 \frac{1}{5} dx = \frac{7}{5} - \frac{5}{5} = \frac{2}{5}.$
  - [(b)] $P(8 < X < 9) = \int_8^9 \frac{1}{5} dx = \frac{9}{5} - \frac{8}{5} = \frac{1}{5}.$
  - [(c)] $P(X > 8{,}5) = \int_{8{,}5}^{10} \frac{1}{5} dx = \frac{10}{5} - \frac{17}{10} = \frac{3}{10}$
  - [(d)] $P(|X - 7{,}5| > 2) = P(X > 9{,}5 \text{ ou } X < 5{,}5) =$

$$\int_{9{,}5}^{10} \frac{1}{5} dx + \int_5^{5{,}5} \frac{1}{5} dx = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

Distribuição Normal, exemplo I

Exemplo

Se $X \sim N(10, 4)$, calcular:

- [(a)] $P(8 < X < 10)$
- [(b)] $P(9 \leq X \leq 12)$
- [(c)] $P(X > 10)$
- [(d)] $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 182.

Distribuição Normal, exemplo I

- Para calcular as probabilidades, é necessário integração numérica, pois e^{-x^2} não tem antiderivada. Contudo, os valores para $Z \sim N(0,1)$ encontram-se tabelados. Recomenda-se utilizar a tabela disponível na página do curso. Tudo o que precisamos fazer é transformar a variável $N(\mu, \sigma^2)$ em uma $N(0,1)$.
- Lembre que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$ e $(X - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$. Neste problema, sabemos que $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 4$, logo $\sigma = 2$. Então $(X - 10)/2 \sim N(0,1)$.

Distribuição Normal, exemplo I

- [(a)] Devemos transformar X de modo que o evento $8 < X < 10$ permaneça inalterado. Fazemos isso transformando todos os lados da inequação:

$$8 < X < 10 \Leftrightarrow 8 - 10 < X - 10 < 10 - 10 \Leftrightarrow -2 < X - 10 < 0$$
$$\Leftrightarrow -2/2 < (X - 10)/2 < 0/2 \Leftrightarrow -1 < Z < 0.$$

- O valor $\Phi(0)$ está disponível na tabela, e é igual a 0,5. Para obtermos $\Phi(-1)$, podemos usar a simetria da função Φ em torno do zero, isto é, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Distribuição Normal, exemplo I

- [(a)] A tabela nos fornece $\Phi(1) = 0{,}8413$, de onde deduzimos que $\Phi(-1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$. Concluimos portanto que

$$P(8 < X < 10) = P(-1 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = 0{,}3413$$

Distribuição Normal, exemplo I

Esta é a tabela da normal, com os valores de $\Phi(1)$ e $\Phi(0)$ destacados:

Tabela distribuição acumulada da Normal padrão

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt, \;\; Z \sim N(0,1)$$

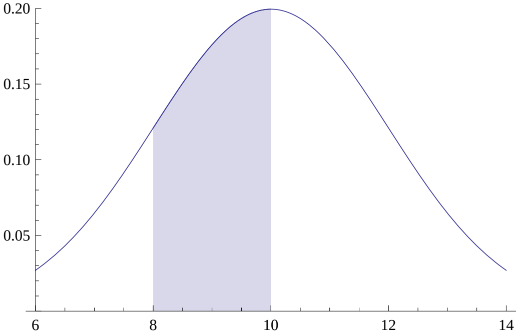
Turmas coordenadas ME203, ME180, ME480 e ME414

UNICAMP, 1^o semestre 2010

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	$\boxed{0.5000}$	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	$\boxed{0.8413}$	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

Distribuição Normal, exemplo I

Este é o gráfico da curva N(10,4), com a região $(8, 10]$ correspondente ao item (a) em destaque:



Distribuição Normal, exemplo I

- [(b)] $P(9 \leq X \leq 12) = P((9-10)/2 \leq (X-10)/2 \leq (12-10)/2) = P(-1/2 \leq Z \leq 1) = 0{,}5328$

- [(c)] $P(X > 10) = P((X-10)/2 > (10-10)/2) = P(Z > 0) = 0{,}5$

- [(d)] $P(X < 8 \text{ ou } X > 11) = P(X < 8) + P(X > 11)$, pois $\{X < 8\} \cap \{X > 11\} = \emptyset$.

  $P(X < 8) = P((X-10)/2 < (10-8)/2) = P(Z < -1) = 0{,}1587$ e $P(X > 11) = P((X-10)/2 > (11-10)/2) = P(Z > 1/2) = 0{,}3085$, logo $P(X < 8 \text{ ou } X > 11) = 0{,}4672$

Distribuição Exponencial, exemplo I

Exemplo

Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em 1.000 horas) que possa ser considerado uma v.a. contínua com f.d.p. $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 reais e o preço de venda seja 5,00 reais. O fabricante garante total devolução se $X \leq 0{,}9$. Qual o lucro esperado por item?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 183.

Distribuição Exponencial, exemplo I

- A probabilidade do item durar menos que 900 horas é dada por

$$P(X < 0{,}9) = \int_0^{0{,}9} e^{-x} dx = 0{,}5934.$$

- Temos, portanto, que o item será devolvido com essa probabilidade (implicando numa perda de \$2), ou permanecerá com o cliente (implicando num ganho de $\$5 - \$2 = \$3$).
- Segue que portanto o lucro líquido é de $-2 \times 0{,}5934 + 3 \times 0{,}4066 = \$0{,}033$, ou aproximadamente três centavos de lucro por item.

Distribuição Uniforme, exemplo II

Exemplo

Seja X uma variável aleatória distribuida uniformemente, com média 15 e variância 25/3.

- [(a)] Encontre a densidade de X.
- [(b)] Qual é a probabilidade de que $X > 14$?

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Distribuição Uniforme, exemplo II

- [(a)] Lembre-se que a esperança de uma v.a. uniforme em $[a, b]$ é dada por

$$\mathcal{E}(X) = \frac{a+b}{2},$$

e sua variância por

$$\mathcal{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Distribuição Uniforme, exemplo II

- [(a)] (cont.) Temos o seguinte sistema, :

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} & = & 15 \\ \frac{(b-a)^2}{12} & = & \frac{25}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b & = & 30 \\ (b-a)^2 & = & 100 \end{cases}$$

Ou simplesmente

$$\begin{cases} a & + & b & = & 30 \\ b & - & a & = & 10. \end{cases}$$

- O sistema tem solução $a = 10$, $b = 20$, o que nos mostra que $X \sim U[10, 20]$ e $f(x) = \dfrac{1}{10}\mathbb{1}_{[10,20]}(x)$.

Distribuição Uniforme, exemplo II

- [(b)] A probabilidade de $X > 14$ é dada por

$$P(X > 14) = \int_{14}^{20} \frac{1}{10} dx = \frac{(20 - 14)}{10} = 0,6$$

Distribuição Exponencial, exemplo II

Exemplo

O tempo de vida, X, em horas, de um componente eletrônico segue uma distribuição exponencial de tal forma que $P(X \leq 1000) = 0,75$. Qual é o tempo médio de vida do componente?

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Distribuição Exponencial, exemplo II

- Sabemos que se $X \sim exp(\lambda)$, então $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ e $\mathcal{E}(X) = \lambda^{-1}$. Basta então observarmos que

$$P(X \leq 1000) = 1 - e^{-\lambda 1000} = 0,75 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(4)}{1000} = 0,0013863$$

- Concluimos, então, que o tempo médio de vida, $\mathcal{E}(X)$, é igual a $1/0,0013863 = 721,3475$ horas, e que espera-se que 75% dos componentes durem 1000 horas ou menos.

Distribuição Normal, exemplo II

Exemplo

Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuições $N(42, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se os aparelhos são feitos para ser usados por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 183.

Distribuição Normal, exemplo II

- [(i)] Para o caso de períodos de 45 horas, temos $P(D_1 > 45) = P(Z > [45 - 42]/6) = P(Z > 0.5) = 0{,}3085$, enquanto $P(D_2 > 45) = P(Z > [45 - 45]/3) = P(Z > 0) = 0{,}5$. Note que a probabilidade do segundo aparelho durar mais que 45 horas é maior que a do primeiro e, portanto, ele é preferível.
- [(ii)] Analogamente, $P(D_1 > 49) = P(Z > [49 - 42]/6) = P(Z > 1.1666) = 0{,}1216$, e $P(D_2 > 49) = P(Z > [49 - 45]/3) = P(Z > 1.3333) = 0{,}0912$. Neste cenário, é preferível o primeiro aparelho.

Distribuição Normal, exemplo III

Exemplo

Assumindo que X possui distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, calcule:

- [(a)] $P(X \leq \mu + 2\sigma)$
- [(b)] $P(|X - \mu| \leq \sigma)$
- [(c)] O número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0{,}99$

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Distribuição Normal, exemplo III

Queremos transformar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ em $Z \sim N(0, 1)$, para poder consultar a tabela da normal padronizada.

- [(a)] $P(X \leq \mu + 2\sigma) = P(X - \mu \leq 2\sigma) = P((X - \mu)/\sigma \leq 2) = P(Z \leq 2) = \Phi(2) = 0,9772$.

- [(b)] $P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(|X - \mu|/\sigma \leq 1) = P(|(X - \mu)/\sigma| \leq 1) = P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,6827$.

Distribuição Normal, exemplo III

- [(c)] Note que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = P(-a \leq (X - \mu)/\sigma \leq a) = P(-a \leq Z \leq a)$. Como X é simétrica, então sabemos que $2P(Z > a) = 2P(Z < -a) = 1 - P(-a \leq Z \leq a)$.
- Basta encontrar o valor de a tal que $P(Z > a) = 0{,}005$, ou simplesmente $P(Z \leq a) = \Phi(a) = 0{,}995$. Consultando a tabela, vemos que $a \approx 2,57$.

Distribuição Beta

Exemplo

Seja X a v. a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

- [(a)] Calcule a distribuição acumulada F_X, o valor esperado $\mathcal{E}(X)$, a variância $\mathcal{V}(X)$ e o desvio padrão $\sigma(X)$.
- [(b)] Calcule $P(0 < X < 1/2)$ e $P(1/3 < X < 1)$.
- [(c)] Esboce o gráfico de $F(x)$ e determine o valor de x_0 tal que $F(x_0) = 0,95$.

Distribuição Beta

- [(a)] A função de distribuição acumulada, em $[0, 1]$, é dada por:

$$\int_0^x 2t dt = x^2.$$

- Então, temos que

$$F_X(x) = x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x).$$

Distribuição Beta

- [(a)] (cont.) A esperança é de X é dada por

$$\mathcal{E}(X) = \int_0^1 x2xdx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

- Para calcular a variância, lembremo-nos de que $\mathcal{V}(X) = \mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}^2(X)$, então

$$\mathcal{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 2xdx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathcal{V}(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Distribuição Beta

- [(b)] Neste caso, já calculamos F_X, a função de distribuição acumulada. Então temos que

$$P(0 < X < 1/2) = P(X < 1/2) - P(X < 0) = F(0,5) - F(0) =$$

$$= 0,5^2 - 0 = 0,25.$$

$$P(1/3 < X \leq 1) = P(X < 1) - P(X < 1/3) = F(1) - F(1/3) =$$

$$= 1^2 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9}.$$

Distribuição Beta

- [(c)] O ponto x_0 que satisfaz $F(x_0) = (x_0)^2 = 0.95$ é $x_0 = 0,9746$. O gráfico de $F(x)$ com o par $(x_0, F(x_0))$ destacado é dado por: