Vetores aleatórios discretos (parte 4): distribuição multinomial

Prof. Caio Azevedo

Vetores aleatórios

- Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade.
- Definamos um experimento aleatório que consiste em repetir ensaios independentes, digamos n vezes, em que três eventos são possíveis de serem observados: A_1, A_2 ou algo que não seja em A_1 e nem A_2. Assuma ainda que $p_i = P(A_i), i = 1, 2$, ao longo das repetições.
- Defina $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ de sorte que X_i mede o número de vezes que o evento A_i, $i = 1, 2$ fora observado.
- Exemplo, lançar um dado n vezes, de sorte que X_1 : número de vezes em que a face 2 aparece e X_2 : número de vezes em que uma face ímpar é observada.

Vetores aleatórios

- Considere $n = 5$ e a seguinte configuração (em que A_3 representa um evento que não é nem A_1 e nem A_2:

$$A_1 A_2 A_1 A_3 A_1.$$

- A probabilidade dessa sequência é $p_1^3 p_2 (1 - p_1 - p_2)$. Temos um total de $\frac{5!}{3!1!1!}$ configurações distintas.
- Para cada sequência com um número fixado de eventos A_1, A_2 e A_3, temos um total de $\frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!}$ cuja probabilidade é

Vetores aleatórios

- Portanto, seguindo raciocínio análogo ao feito para a distribuições binomial (aqui), temos que:

$$
\begin{aligned}
P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{n!}{x_1!x_2!(n - x_1 - x_2)!} \\
&\times \quad p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x_1) \\
&\times \quad \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n-x_1\}}(x_2) \\
&= \frac{n!}{x_1!x_2!(n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2} \\
&\times \quad \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x_2) \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n-x_2\}}(x_1)
\end{aligned}
$$

Vetores aleatórios

- Teorema (dem.: exercício): Temos que:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{x_1=0}^{n}\sum_{x_2=0}^{n-x_1}\frac{n!}{x_1!x_2!(n-x_1-x_2)!}a^{x_1}b^{x_2}c^{n-x_1-x_2} \\
= \quad & \sum_{x_2=0}^{n}\sum_{x_1=0}^{n-x_2}\frac{n!}{x_1!x_2!(n-x_1-x_2)!}a^{x_1}b^{x_2}c^{n-x_1-x_2} = (a+b+c)^n
\end{aligned}
$$

Vetores aleatórios

- Distribuições marginais:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = x_1) &= \sum_{x_2} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = \sum_{x_2} \frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \\
&\times (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x_1) \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n-x_1\}}(x_2) \\
&= \frac{p_1^{x_1} n!}{x_1!(n - x_1)!} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x_1) \\
&\times \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n - x_1)!}{x_2!(n - x_1 - x_2)!} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2} \\
&= \frac{p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n - x_1} n!}{x_1!(n - x_1)!} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x_1) \\
&= \binom{n}{x} p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n - x_1} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x_1)
\end{aligned}
$$

Vetores aleatórios

- Assim $X_1 \sim \text{binomial}(n, p_1)$.
- Analogamente (demonstrar) $X_2 \sim \text{binomial}(n, p_2)$.
- Distribuições condicionais:

$$P(X_1 = x_1 | X_2 = x_2) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)}$$

$$= \frac{\frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2} \mathbb{1}_{\{0,\ldots,n\}}(x_2) \mathbb{1}_{\{0,\ldots,n-x_2\}}(x_1)}{\frac{n!}{x_2!(n - x_2)!}{}_1 p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n - x_2} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x_2)}$$

$$= \frac{(n - x_2)!}{x_1!(n - x_1 - x_2)!} \left(\frac{p_1}{1 - p_2}\right)^{x_1} \left(1 - \frac{p_1}{1 - p_2}\right)^{n - x_2 - x_1} \mathbb{1}_{\{0,\ldots,n-x_2\}}(x_1).$$

- Logo $X_1 | X_2 = x_2 \sim \text{binomial}\left(n - x_2, \frac{p_1}{1 - p_2}\right)$.

Vetores aleatórios

- Analogamente, (demonstrar) $X_2|X_1 = x_1 \sim \text{binomial}\left(n - x_1, \dfrac{p_2}{1-p_1}\right)$.
- Covariância e Correlação. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(X_1X_2) &= \sum_{x_1}\sum_{x_2} x_1x_2P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{x_1}\sum_{x_2} \frac{n!x_1x_2}{x_1!x_2!(n-x_1-x_2)!} p_1^{x_1}p_2^{x_2}(1-p_1-p_2)^{n-x_1-x_2} \\
&\times \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x_1)\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n-x_1\}}(x_2) \\
&= \sum_{x_1=0}^{n}\sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{n!x_1x_2}{x_1!x_2!(n-x_1-x_2)!} p_1^{x_1}p_2^{x_2}(1-p_1-p_2)^{n-x_1-x_2}
\end{aligned}
$$

Vetores aleatórios

- (Cont.)(*: todos os termos com x_1 e x_2 se anulam e, além disso, $\sum_{k=a}^{b} f(k) = 0$, se $a < b$)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(X_1X_2) &\overset{*}{=} \sum_{x_1=1}^{n-1}\sum_{x_2=1}^{n-x_1} \frac{n!}{(x_1-1)!(x_2-1)!(n-x_1-x_2)!} \\
&\times \; p_1^{x_1}p_2^{x_2}(1-p_1-p_2)^{n-x_1-x_2} \\
&= n!p_2 \sum_{x_1=1}^{n-1}\sum_{y_2=0}^{n-1-x_1} \frac{1}{(x_1-1)!y_2!(n-1-x_1-y_2)!} \\
&\times \; p_1^{x_1}p_2^{y_2}(1-p_1-p_2)^{n-1-x_1-y_2} \\
&= n!p_2 \sum_{x_1=1}^{n-1} \frac{p_1^{x_1}}{(n-1-x_1)!(x_1-1)!} \sum_{y_2=0}^{n-1-x_1} \frac{(n-1-x_1)!}{y_2!(n-1-x_1-y_2)!} \\
&\times \; p_2^{y_2}(1-p_1-p_2)^{n-1-x_1-y_2}
\end{aligned}
$$

Vetores aleatórios

- (Cont.)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(X_1X_2) &= n!p_2 \sum_{x_1=1}^{n-1} \frac{p_1^{x_1}}{(x_1-1)!(n-1-x_1)!}(1-p_1)^{n-1-x_1} \\
&= n(n-1)p_1p_2 \sum_{y_1=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y_1!(n-2-y_1)!} p_1^{y_1}(1-p_1)^{n-2-y_1} \\
&= n(n-1)p_1p_2.
\end{aligned}
$$

- Logo

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \mathcal{E}(X_1X_2) - \mathcal{E}(X_1)\mathcal{E}(X_2) = n(n-1)p_1p_2 - n^2p_1p_2 \\
&= n^2p_1p_2 - np_1p_2 - n^2p_1p_2 = -np_1p_2 < 0
\end{aligned}
$$

Vetores aleatórios

- Assim

$$Corre(X_1, X_2) = \frac{-np_1p_2}{n\sqrt{p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)}} = -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}} < 0$$

- Uma outra forma de calcular $\mathcal{E}(X_1X_2)$ é através de:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X_1X_2) &= \mathcal{E}(\mathcal{E}(X_1X_2|X_2)) = \mathcal{E}(X_2\mathcal{E}(X_1|X_2)) \\
&= \mathcal{E}\left[X_2\left((n-X_2)\frac{p_1}{1-p_2}\right)\right] = \frac{p_1}{1-p_2}\left[n\mathcal{E}(X_2) - \mathcal{E}(X_2^2)\right] \\
&= \frac{p_1}{1-p_2}\left[n^2p_2 - np_2(1-p_2) - n^2p_2^2\right] \\
&= \frac{p_1}{1-p_2}\left[n^2p_2(1-p_2) - np_2(1-p_2)\right] = n(n-1)p_1p_2.
\end{aligned}$$

Distribuição Multinomial

- Dizemos que um vetor aleatório:

  1. $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_k)' \sim \text{multinomial}_k(n, \boldsymbol{p}^*)$, $\boldsymbol{p}^* = (p_1, ..., p_k)'$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1, p_i \in (0,1), \forall i$, $\sum_{i=1}^{k} y_i = n$, $y_i \in \{0, 1, ..., n\}$, ou
  2. $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_{k-1})' \sim \text{multinomial}_k(n, \boldsymbol{p}), \boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_{k-1})'$, $\sum_{i=1}^{k-1} p_i < 1, p_i \in (0,1), \forall i$, $\sum_{i=1}^{k-1} y_i < n$, $y_i \in \{0, 1, ..., n\}, \forall i$.

- Se sua fdp (em que A é o suporte da distribuição, $p_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i, y_k = n - \sum_{i=1}^{k-1} y_i$) é dada por (próxima página)

Distribuição Multinomial

- (Cont.)

$$
\begin{aligned}
P(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} y_i!} \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{y_i} \right) \mathbb{1}_A(\boldsymbol{y}) \\
&= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} y_i!} \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{y_i} \right) \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,n\}}(y_1) \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,n-y_1\}}(y_2) \times \\
\ldots & \times \mathbb{1}_{\left\{0,1,\ldots,n-\sum_{i=1}^{k-2} y_i\right\}}(y_{k-1})
\end{aligned}
$$

- Existem outras formas (inclusive em relação às funções indicadoras) de apresentar a fdp da multinomial.

Distribuição Multinomial

- Resultados
  - $Y_i \sim \text{binomial}(n, p_i)$.
  - $Y_i | Y_j = y_j \sim \text{binomial}\left(n - y_j, \frac{p_i}{1-p_j}\right), i \neq j$.
  - $Cov(Y_i, Y_j) = -n(n-1)p_i p_j$.
  - $Corre(Y_i, Y_j) = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$.
  - $\sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \ldots \sum_{x_{k-1}=0}^{n-\sum_{i=1}^{k-2} x_i} \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots\left(n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)!} \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i^{x_i}\right) a_k^{x_k} = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^n$

Distribuição Multinomial

- Função geradora de momentos ($\boldsymbol{t} = (t_1, .., t_{k-1})'$):

$$
\begin{aligned}
M_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t}) &= \mathcal{E}(e^{\boldsymbol{t}'\boldsymbol{Y}}) = \mathcal{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{k-1} t_i y_i}\right) \\
&= \sum_{y_1=0}^{n} \sum_{y_2=0}^{n-y_1} \dots \sum_{y_{k-1}=0}^{n-\sum_{i=1}^{k-2} y_i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k-1} y_i! \left(n - \sum_{i=1}^{k-1} y_i\right)!} \\
&\times \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(p_i e^{t_i}\right)^{y_i}\right) p_k^{y_k} = \left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i e^{t_i} + p_k\right)^n
\end{aligned}
$$

Distribuição Multinomial

- $\dfrac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} M_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t}) = n(n-1)p_i e^{t_i}\left[p_i e^{t_i} + p_j e^{t_j} + 1 - p_i - p_j\right] p_j e^{t_j}$
- $\mathcal{E}(Y_i Y_j) = \left.\dfrac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} M_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t})\right|_{\boldsymbol{t}=\mathbf{0}}.$