

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Variáveis aleatórias contínuas: vamos considerar agora quantidades (variáveis) as quais não é possível associar uma tabela de probabilidades pontuais ou frequências
 - tempo de duração de uma chamada telefônica
 - tempo de vida de uma lâmpada
 - altura das pessoas
- Para esse tipo de quantidades as quais não podemos associar frequências pontuais tais que a soma de todas elas seja igual a 1, surge o conceito de "função de densidade de probabilidade" (f.d.p.).

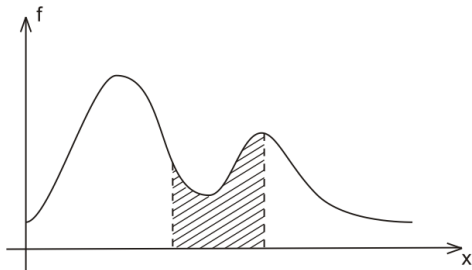
Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:
 - $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (f é integrável)
- Toda v.a. X à qual seja possível associar uma f.d.p. será chamada de v.a. contínua.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença a um intervalo da reta $(a,b]$, $a < b$ é dada por:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



Variáveis Aleatórias Contínuas

- Notação: se X v.a. contínua com função de densidade de probabilidade f , no lugar de f denotaremos f_X
- À probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença ao intervalo da reta $(-\infty, x]$ daremos o nome de função de distribuição acumulada (f.d.a.), e a denotaremos por F_X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du = P(X \leq x)$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Exemplo: X v.a. contínua com f.d.p.:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Pela definição de f.d.p.:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x) dx = 1$

- Podemos também calcular $P(0 < X \leq 0.8) = \int_0^{0.8} x dx = 0.32$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como f.d.p.) tem probabilidade pontual nula: $P(X = x) = 0$
- Resumindo: $F(x) = P(X \leq x)$
 - caso discreto: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$
 - caso contínuo: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X , dizemos que X possui esperança finita se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$$

- Nesse caso, definimos:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X , se a quantidade $E(|X|^k) < \infty$, $k \geq 1$, definimos por **momento** de ordem k da v.a. o valor $E(X^k)$

- caso discreto: $E(X^k) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^k P(X = x_i)$

- caso contínuo: $E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx$

Variáveis Aleatórias Contínuas

■ Exercício: Para a função f_X , calcular

■ $E(X^2)$

■ $E(X^3)$

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja X v.a. com valor esperado $E(X)$, $E(X^2) < \infty$, definimos por variância, a quantidade:

$$\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2)$$

- E definimos como desvio padrão:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- Note que assim como no caso discreto, ambas as quantidades oferecem medidas de dispersão da variável X em relação ao valor esperado $E(X)$.

Variáveis Aleatórias Contínuas

■ Exemplo:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx = 1$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x - 1]^2 f_X(x) dx = \frac{1}{6}$$