Modelo Uniforme

- Exemplo: Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93. Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?
  - espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
  - assumindo honestidade da rifa, todos os números têm a mesma probabilidade de ocorrência, com $\frac{1}{100}$ para cada um.
  - como eu e meu colega temos 5 bilhetes, temos a mesma probabilidade de ganhar a rifa: $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
  - assim, a probabilidade de ganhar depende somente da quantidade de bilhetes que se tem na mão, independente da numeração.

Modelo Uniforme

- Modelo Empírico
  - X é uma variável aleatória cujos possíveis valores são representados por $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$
  - X segue o modelo uniforme discreto se atribui a mesma probabilidade $\frac{1}{k}$ a cada um desses possíveis valores
  - $P(X = x_j) = \dfrac{1}{k} \qquad \forall \;\; 1 \leq j \leq k$
  - $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i x_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$
  - $Var(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - E(X))^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2$

Propriedade Geral da Variância

- Definição: $Var(X) = E([X - E(X)]^2)$

$$
\begin{aligned}
E([X - E(X)]^2) &= E([X - \mu_X]^2) = E(X^2 - 2X\mu_x + \mu_X^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - 2\mu_X\mu_X + \mu_X^2 \\
&= \mu_{X^2} - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - \mu_X^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2
\end{aligned}
$$

- Então: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Modelo Uniforme

- Retomando o modelo da uniforme
  - já sabemos que $E(X) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i$
  - portanto $[E(X)]^2 = \dfrac{1}{k^2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2$
  - $E(X^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i^2$
  - finalmente $Var(X) = \dfrac{1}{k}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \dfrac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2\right]$

Modelo Uniforme

- Exemplo: $X =$ resultado obtido no lançamento de um dado honesto

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

  - $E(X) = \frac{1}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5$
  - $Var(X) = \frac{1}{6}[(1+4+9+16+25+36) - \frac{1}{6} \times (21)^2] = \frac{35}{2} = 17.5$

Modelo Uniforme

- Cálculo da f.d.a. de uma variável uniforme discreta:
  - $F(x) = P(X \leq x) = \frac{n(x)}{k}$
  - $n(x) =$ número de x_i's tais que $x_i \leq x$
- Retomando o exemplo do dado:
  - $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$
  - $F(2.5) = P(X \leq 2.5) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$

Modelo Bernoulli

- Consideremos um experimento E com espaço de resultados Ω e o evento A.
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se se o evento A aconteceu. Se A não aconteceu ocorreu fracasso.
- Exemplo: Experimento lançar uma moeda e verificar se cai cara ou coroa. Consideramos como sucesso, a obtenção de cara.
- Este tipo de experimento se chama de ensaio Bernoulli.

Modelo Bernoulli

- Ensaios tipo Bernoulli: estamos interessados na ocorrência de um sucesso ou fracasso.
- Exemplo: uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto. As possíveis respostas são apenas "Sim"ou "Não".
- $\Omega = \{\text{Sim}, \text{Não}\}$
- $X = \begin{cases} 1, & \text{evento de interesse ocorre} \\ 0, & \text{caso contário} \end{cases}$
- $P(X=1) = P(sucesso) = p \Rightarrow P(X=0) = P(fracasso) = 1-p$

Modelo Bernoulli

- Forma geral de escrever a probabilidade de uma variável Bernoulli:

  $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$ em que $x = 0, 1$

- $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

- $E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$

- $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$

- f.d.a.: $\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & x \in [0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Modelo Bernoulli

- Exemplo: lançamos um dado e consideramos como sucesso, a obtenção da face 5. Supondo que o dado é honesto:

x	0	1
$p(x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

  - $P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x} = (\frac{1}{6})^x(\frac{5}{6})^{1-x}$ em que $x = 0, 1$
  - $E(X) = \frac{1}{6}$
  - $E(X^2) = \frac{1}{6}$
  - $Var(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6-1}{36} = \frac{5}{36}$

Modelo Binomial

- Consideremos novamente um experimento E com espaço de resultados Ω e o evento A.
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se se o evento A aconteceu. Se A não aconteceu ocorreu fracasso.
- Repetimos o experimento n vezes, de forma independente.
- X=Número de sucessos nos n experimentos.
- Exemplo: lançar uma moeda 3 vezes e verificar se cai cara ou coroa. Consideramos como sucesso, a obtenção de cara.
- Os valores possiveis de X são $\{0, 1, 2, 3\}$.

Modelo Binomial

- A repetição de ensaios Bernoulli independentes dá origem a uma variável aleatória Binomial.
- Exemplo: Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%. Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um submetido a testes para averiguar se está imunizado. Nesse caso, consideramos como sucesso, a imunização.
  - $X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo i está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
  - pelo enunciado, sabe-se que $P(X_i = 1) = p = 0.8$

Modelo Binomial

- Os indivíduos X_1, X_2 e X_3 são independentes e cada um é uma variável Bernoulli
- Se o interesse está em estudar $X =$ número de indivíduos imunizados no grupo, X poderá assumir valores em $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$
- Note que $X = X_1 + X_2 + X_3$

Modelo Binomial

evento	P(evento)	X
$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0$	$(0.2)^3$	0
$X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1$	$(0.8)^3$	3

Modelo Binomial

- Assim, as probabilidades de cada valor possível de X são:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$(0.2)^3$	$3 \times 0.8 \times (0.2)^2$	$3 \times (0.8)^2 \times 0.2$	$(0.8)^3$

- E o comportamento de X é completamente determinado pela função

$$P(X = x) = \binom{3}{x}(0.8)^x(0.2)^{3-x}$$

Modelo Binomial

- Modelo Geral: Considere a repetição de n ensaios X_i Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p. A variável aleatória $X = X_1 + ... + X_n$ que representa o total de sucessos corresponde ao modelo Binomial com parâmetros n e p.
  - A probabilidade de se observar x é dada pela expressão geral

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \forall \;\; x = 0, 1, ..., n$$

  - notação: $X \sim Bin(n, p)$

Modelo Binomial

- No exemplo da vacina, temos então $n = 3$ e $p = 0.8$
  - $X \sim Bin(3, 0.8)$
  - $E(X) = 3 \times 0.8$
  - $Var(X) = 3 \times 0.8 \times 0.2$

Propriedades da Esperança e Variância

- A esperança de uma soma de variáveis aleatórias é a soma das esperanças dessas variáveis

  X e Y variáveis aleatórias $\Rightarrow E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

- A variância de uma soma de duas variáveis aleatórias independentes é a soma da variância dessas variáveis

  $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

- Lembrando que duas variáveis aleatórias são independentes $\Leftrightarrow$

  $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$

Modelo Geométrico

- Consideremos novamente um experimento E com espaço de resultados Ω e o evento A.
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se se o evento A aconteceu.
- Repetimos o experimento até o primeiro sucesso.
- Y=Número de repetições.
- Exemplo: lançar uma moeda repetidas vezes ate a primeira cara.
- Os valores possiveis de Y são $\{1, 2, 3, ...\}$.
- Repetimos um ensaio Bernoulli ate o primeiro sucesso ($p = P(\text{sucesso})$).
- Y=Número de ensaios Bernoulli até o primeiro sucesso.

Modelo Geométrico

- $P(Y = 1) = p.$
- $P(Y = 2) = (1 - p)p.$
- $P(Y = k) = (1 - p)^{k-1}p.$
- $Y \sim G(p).$
- $E(Y) = \frac{1}{p}.$
- $V(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$
- $P(Y \geq k + m | Y \geq m) = P(Y \geq k).$ (Perda de memoria)

Distribuição Hipergeométrica

- População dividida em duas características
- Extrações casuais sem reposição
- Detalhes:
  - N objetos
  - r têm a característica A
  - $N - r$ têm a característica B
  - um grupo de n elementos é escolhido ao acaso, dentre os N possíveis, sem reposição
- Objetivo: calcular a probabilidade de que este grupo de n elementos contenha x elementos com a característica A

Distribuição Hipergeométrica

- Modelo Geral:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{para todo } \; 0 \leq x \leq min\{r, n\}$$

- X registra o número de elementos dentre os n sorteados, que possuem a característica A
- X tem distribuição Hipergeométrica

Distribuição Hipergeométrica

- Notação: $X \sim Hip(N, n, r)$
- X tem distribuição Hipergeométrica com parâmetros N, n, r, então:
    - $E(X) = \frac{nr}{N}$
    - $Var(X) = \frac{nr}{N}\left(1 - \frac{r}{N}\right)\frac{(N-n)}{(N-1)}$

Distribuição Hipergeométrica

- Aplicação: Controle de Qualidade

  Suponha um lote com $N = 100$ elementos a ser analisado. São escolhidas $n = 5$ peças sem reposição. Sabendo que neste lote de 100 elementos, $r = 10$ são defeituosos, a probabilidade de não se obter nenhuma peça defeituosa na amostra retirada é:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{100-10}{5-0}}{\binom{100}{10}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{10}} \approx 0.584$$

Distribuição Hipergeométrica

- A probabilidade de se obter pelo menos uma peça defeituosa é:
$$\sum_{i=1}^{5} P(X=i) = 1 - P(X=0) \approx 0.426$$
- $E(X) = \frac{nr}{N} = \frac{5\times 10}{100}$
- $Var(X) = \frac{nr}{N}\left(1-\frac{r}{N}\right)\frac{(N-n)}{(N-1)} = \frac{5\times 10}{100}\left(1-\frac{10}{100}\right)\frac{(100-10)}{(100-1)} \approx 0.409$

Distribuição de Poisson

- Uma variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad \forall \ x = 0, 1, 2, \ldots$$

- λ é chamado de taxa de ocorrência
- $E(X) = Var(X) = \lambda$
- Notação: $X \sim P(\lambda)$

Distribuição de Poisson

- Exemplo: O Comportamento da emissão de partículas radioativas (de alguma fonte) são, em geral, modeladas através de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada.

  Supondo que o número de partículas α emitidas por minuto é uma variável aleatória seguindo o modelo Poisson com parâmetro $\lambda = 5$, ou seja, a taxa de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto, podemos estar interessados em calcular a probabilidade de haver mais de duas emissões por minuto.

Distribuição de Poisson

- $X \sim P(5)$
- $P(X > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-5}5^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-5}5^x}{x!} \approx 0.875$
- $E(X) = \lambda = 5$
- $Var(X) = \lambda = 5$

Distribuição de Poisson

- Considerando a distribuição $Bin(n, p)$, quando temos grandes valores para n e p pequeno (mantendo-se o produto np constante), podemos usar a seguinte aproximação para a probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{e^{-np}(np)^x}{x!} \quad \forall \ x = 0, 1, 2, \ldots$$

- Geralmente considera-se o critério $np \leq 7$ para usar essa aproximação

Distribuição de Poisson

- Exemplo: $X \sim Bin(100, 0.065)$, deseja-se obter $P(X = 10)$
  - $\lambda = np = 100 \times 0.065 = 6.5 \leq 7$
  - no modelo Binomial:

    $P(X = 10) = \binom{100}{10}(0.065)^{10}(0.935)^{100-10} = 0.055$
  - no modelo Poisson: $P(X = 10) = \frac{e^{-6.5}(6.5)^{10}}{10!} \approx 0.056$