

Princípio de Contagem

- Os conceitos a serem introduzidos nesta seção facilitam o cálculo de probabilidades;
- **Princípio multiplicativo:** Se uma tarefa pode ser executada em duas etapas, a primeira feita de n , e a segunda de m maneiras diferentes, então a tarefa completa pode ser feita de $n \times m$ maneiras diferentes.

Definições

- População: conjunto de objetos ou indivíduos ζ tendo pelo menos uma característica comum observável.
- Amostra: uma amostra de tamanho $n < N$ de um conjunto ζ que possui N elementos é um subconjunto de ζ
 - Ordenada: se os elementos da amostra foram ordenados, ou seja, duas amostras com os mesmos elementos, mas em ordens diferentes serão diferentes amostras
 - Não Ordenada: não importa a ordem dos elementos, as amostras serão iguais

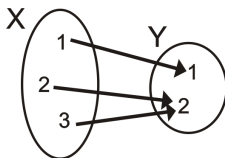
Exemplo

Consideremos uma pesquisa para estudar os salários dos 500 funcionários de uma companhia. Seleciona-se uma amostra de 36 indivíduos. A população é formada pelos 500 salários correspondentes aos 500 funcionários. Conseqüentemente, a amostra será formada pelos 36 salários dos 36 funcionários selecionados.

- **Objetivo:** estudar a distribuição dos salários na amostra, esperando que a mesma reflita a distribuição de todos os salários.

Seleção de Amostras

- Consideremos dois conjuntos:
 - $X = \{1, 2, \dots, n\}$
 - $Y = \{1, 2, \dots, m\}$
 - por exemplo: $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2\}$



Seleção de Amostras

- No diagrama, as aplicações exemplificadas são:

- $f(1) = 1$

- $f(2) = 2$

- $f(3) = 2$

- Quantas aplicações são possíveis no total?

- 1 em X possui duas possibilidades em Y

- 2 em X possui duas possibilidades em Y

- 3 em X possui duas possibilidades em Y

Portanto, $2 \times 2 \times 2 =$ total de aplicações entre X e Y

Seleção de Amostras

- No caso geral, $X = \{1, 2, \dots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \dots, m\}$
 $m^n =$ total de aplicações entre X e Y
- Note que são permitidas as associações de pontos diferentes no domínio (X) ao mesmo ponto da imagem (Y)

Seleção de Amostras

- Considere agora que o interesse é em aplicações 1 : 1
- $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (um elemento na imagem corresponde a um único elemento no domínio)
- $X = \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{f} Y = \{1, 2, \dots, m\}, m \geq n$
 - 1 em X possui m possibilidades em Y
 - 2 em X possui $(m - 1)$ possibilidades em Y
 - \vdots
 - n em X possui $(m - (n - 1))$ possibilidades em Y portanto,
 $m(m - 1) \dots (m - (n - 1)) = \text{total de aplicações 1 : 1 entre } X \text{ e } Y$

Seleção de Amostras

- Lema: o número de amostras ordenadas *com reposição*, de tamanho n , tiradas de um conjunto com N elementos é N^n (número de aplicações = N^n)
- Lema: o número de amostras ordenadas *sem reposição*, de tamanho n tiradas de um conjunto com N elementos é $N(N - 1)\dots(N - (n - 1))$ (número de aplicações 1 : 1 = $N(N - 1)\dots(N - (n - 1))$)

Análise Combinatória

Seja X um conjunto finito com m elementos, e $n \leq m$.

- Desejamos saber quantos subconjuntos com n elementos tem X
 - exemplo: $X = \{1, 2, 3, 4\}$
 - quantos subconjuntos com 3 elementos há em X ?

$\{1, 2, 3\}_{*1}$	$\{2, 1, 3\}_{*1}$	$\{3, 1, 2\}_{*1}$	$\{4, 1, 2\}_{*2}$
$\{1, 2, 4\}_{*2}$	$\{2, 1, 4\}_{*2}$	$\{3, 1, 4\}_{*3}$	$\{4, 1, 3\}_{*3}$
$\{1, 3, 2\}_{*1}$	$\{2, 3, 1\}_{*1}$	$\{3, 2, 1\}_{*1}$	$\{4, 2, 1\}_{*2}$
$\{1, 3, 4\}_{*3}$	$\{2, 3, 4\}_{*4}$	$\{3, 2, 4\}_{*4}$	$\{4, 2, 3\}_{*4}$
$\{1, 4, 2\}_{*2}$	$\{2, 4, 1\}_{*2}$	$\{3, 4, 1\}_{*3}$	$\{4, 3, 1\}_{*3}$
$\{1, 4, 3\}_{*3}$	$\{2, 4, 3\}_{*4}$	$\{3, 4, 2\}_{*4}$	$\{4, 3, 2\}_{*4}$

Análise Combinatória

- Observe que os subconjuntos marcados com:
 - *₁ possuem os mesmos elementos, apenas com outra ordem
 - *₂ possuem os mesmos elementos, apenas com outra ordem
 - *₃ possuem os mesmos elementos, apenas com outra ordem
 - *₄ possuem os mesmos elementos, apenas com outra ordem
- Assim, o total de subconjuntos com 3 elementos de um conjunto com 4 elementos é dado por $\frac{4!}{3!1!}$

Análise Combinatória

■ Resumo

Repetição	Ordenação	número de amostras possíveis
Sim	Importa	N^n
Sim	Não importa	—
Não	Importa	$\frac{N!}{(N-n)!}$
Não	Não importa	$\frac{N!}{(N-n)!n!}$

em que $n_i, i = 1, 2, \dots, k$ é o número de vezes que o elemento i aparece na amostra, $k \leq n$.

Análise Combinatória

- No caso geral, o número total de subconjuntos com n elementos de um conjunto com $m \geq n$ é dado por $\frac{m!}{n!(m-n)!}$
- Lema: o número de amostras não ordenada de tamanho n tiradas de um conjunto com N elementos é igual a $\frac{N!}{n!(N-n)!}$
- Exemplo: Uma comissão formada por 3 estudantes tem que ser selecionada numa classe de 20 alunos, para organizar os jogos olímpicos. De quantas formas diferentes pode ser selecionada essa comissão?

$$\text{Resposta: } \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{6} = 1140$$

Análise Combinatória

- Exemplo: Um ônibus possui 10 assentos disponíveis. De quantas formas 7 passageiros podem ocupar os assentos?

Resposta: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604800$

- Exemplo: Quantos números de 4 dígitos podemos formar com os dígitos 1,2,3,4,5,6?

Resposta: $6^4 = 1296$

Análise Combinatória

- Definição: A amostra casual simples de tamanho n de uma variável aleatória (v.a.) X com uma dada distribuição é um conjunto de n realizações da variável X , digamos (x_1, x_2, \dots, x_n) .
- Exemplo
 - Variável: salários
 - Amostra casual simples: os 36 salários que constituem os dados da tabela dada

Determinando Amostras e Calculando Probabilidades

- Exemplo: formar números de 4 dígitos com os dígitos 1,2,3,4,5,6
 - total : 6^4 amostras
 - os dois primeiros dígitos são, necessariamente, iguais entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros: $6 \times 1 \times 5 \times 5$ amostras
 - qual a probabilidade, de escolher um número ao acaso (formado por 4 dígitos), e este possuir os dois primeiros dígitos necessariamente iguais entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros:

$$\text{Resposta: } \frac{6 \times 1 \times 5 \times 5}{6^4} = \frac{5 \times 5}{6^3} = \frac{25}{216} \approx 0,12$$

- Exemplo: formar números de 4 dígitos com os dígitos 1,2,3,4,5,6
 - total : 6^4 amostras
 - os dois primeiros dígitos podem ou não ser iguais entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros: temos dois casos.
 - Os dois primeiros iguais entre si: $6 \times 1 \times 5 \times 5$ amostras.
 - Os dois primeiros diferentes entre si: $6 \times 5 \times 4 \times 4$ amostras.
 - qual a probabilidade, de escolher um número ao acaso (formado por 4 dígitos), e este possuir os dois primeiros dígitos iguais ou não entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros:

$$\text{Resposta: } \frac{6 \times 1 \times 5 \times 5 + 6 \times 5 \times 4 \times 4}{6^4} = \frac{25 + 80}{216} = \frac{105}{216} \approx 0,49$$