Cáculo de Probabilidades

- A probabilidade é uma quantidade que pode ser utilizada para se medir a incerteza sobre certos eventos ou caratcterósticas de interesse.
- Tais eventos, em geral, estão associados a experimentos aleatórios.
- Um **experimento aleatório** é um experimento para qual não se tem certeza sobre seu resultados, a priori.
- A probabilidade é útil, também, quando existem incertezas associadas à experimentos ou fenômenos de interesse:

Cáculo de Probabilidades

- Distribuição de Frequências
  - Observadas: calculada com base nos valores observados.
  - Modelo teórico: proposto pelo pesquisador para representar a distribuição de frequência populacional.

Cáculo de Probabilidades

- Exemplo: estudar as probabilidades de ocorrência das faces de um dado.
    - Procedimento empírico: lançar o dado um certo número n de vezes e contar, n_i, de vezes que a face $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ocorre.
      $f_i = \frac{n_i}{n}$ é a distribuição empírica das probabilidades
      Para diferentes vezes que esse experimento for realizado, a distribuição de frequência terá resultados diferentes. No entanto, espera-se que esses resultados, apesar de distintos, sejam semelhantes.
    - Procedimento teórico: construir a distribuição de frequências populacionais (probabilidades) através de suposições teóricas.

Cáculo de Probabilidades

- Suposições:
  - só podem ocorrer 6 faces (1,2,3,4,5,6)
  - o dado é perfeitamente equilibrado
  - então, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes, ou seja $f_i = \frac{1}{6}$

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Freq. Teórica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Cáculo de Probabilidades

Todo fenômeno aleatório terá seu modelo probabilístico especificado, em geral, no momento que estabelecemos:

- Espaço Amostral: todos os resultados possíveis do experimento(aleatório), denotado por $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ (Ω terá essa forma quando for possível enumerar os possíveis resultados)
- Probabilidade: $P(\omega)$, para cada "ponto amostral" ω

Cáculo de Probabilidades

- Exemplo: lançar uma moeda duas vezes.

  $C = cara$

  $X = coroa$

  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

    $\omega_1 = (C, C)$; $\omega_2 = (C, X)$; $\omega_3 = (X, C)$; $\omega_4 = (X, X)$
  - considerando que a moeda é honesta: $P(\omega_i) = \frac{1}{4}$, $\forall\ i = 1, 2, 3, 4$
  - seja o evento $A = \{\omega_1, \omega_4\} =$ obter duas faces iguais

    $P(A) = P(\{\omega_1, \omega_4\}) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Cáculo de Probabilidades

Como pode-se observar, através das probabilidades pontuais, é possível calcular a probabilidade de ocorrência de eventos (como o evento A exemplificado) que incluem a ocorrência de vários pontos amostrais.

- Retomando o exemplo do dado:
  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$
    em que $\omega_i =$ face i, $\forall\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
  - $P(\omega_i) = \frac{1}{6}$
  - seja o evento
    $A = \{\text{a face é um número par}\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{2, 4, 6\}$
    $P(A) = P(\{2\}, \{4\}, \{6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Cáculo de Probabilidades

- Exemplo: uma lâmpada é retirada de um lote e é medido seu tempo de vida antes de queimar.
  - $\Omega = \{t : \ t \geq 0\}$, ou seja, o espaço amostral são todos os números reais positivos
  - $A = \{t : \ 0 \leq t \leq 20\}$, o tempo de vida é menor ou igual a 20 horas A é um evento (conjunto) que pode ser considerado como subconjunto de Ω
  - Esse tipo de espaço amostral é chamado de "espaço amostral contínuo"
  - Os espaços amostrais apresentados nos exemplos anteriores são chamados de "espaço amostral discreto"

Propriedades: Modelo Teórico

- (Ω, P):
    - Ω é o espaço amostral
    - P é probabilidade em Ω
    - Seja A é um evento em Ω
    - $\varnothing$ é um conjunto vazio ou evento impossível
- Propriedades:
    - $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall$ evento A em Ω
    - $P(\Omega) = 1$
    - $P(\varnothing) = 0$

Propriedades: Modelo Teórico

- Exemplo: representando uma possível divisão de alunos matriculados em dado instituto de matemática, num certo ano:

	Masculino (Ma)	Feminino (Fe)	Total
Mat. Pura (M)	70	40	110
Mat. Aplicada (A)	15	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C)	20	10	30
Total	115	85	200

Propriedades: Modelo Teórico

- Escolhendo um aluno ao acaso (e considerando que cada aluno tem a mesma probabilidade de ser selecionado), definem-se os seguintes eventos:
  - M: estudante da Matemática Pura
  - A: estudante da Matemática Aplicada
  - E: estudante da Estatística
  - C: estudante da Computação
  - Ma: sexo Masculino
  - Fe: sexo Feminino

Propriedades: Modelo Teórico

- Assim,
  - $P(M) = \frac{110}{200} = 0.550$
  - $P(A) = \frac{30}{200} = 0.150$
  - $P(E) = \frac{30}{200} = 0.150$
  - $P(C) = \frac{30}{200} = 0.150$
  - $P(Ma) = \frac{115}{200} = 0.575$
  - $P(Fe) = \frac{85}{200} = 0.425$

Interseção de Eventos

- Utilizando o último exemplo, vamos definir como evento (I), escolher ao acaso um aluno e ele ser estudante de estatística do sexo masculino, simultâneamente.
- $I = E \cap Ma$, o evento I é uma interseção dos eventos E e Ma.
- $P(E \cap Ma) = \frac{10}{200} = 0.05$

União de Eventos

- Definimos agora como evento (U), escolher ao acaso um aluno e ele ser estudante de estatística ou sexo masculino.
- $I = E \cup Ma$, o evento U é uma união dos eventos E e Ma.
- $P(E \cup Ma) = P(E) + P(Ma) - P(E \cap Ma)$

  $P(E) = \frac{10+20}{200} = 0.150$

  $P(Ma) = \frac{70+15+10+20}{200} = 0.575$

  $P(E \cap MA) = \frac{10}{200} = 0.050$

  Então: $P(E \cup Ma) = 0.150 + 0.575 - 0.050 = 0.675$

União de Eventos

- No caso de eventos mutuamente exclusivos ou disjuntos, a interseção é vazia ($\varnothing$).
- $P(M \cap C) = P(\varnothing) = 0$
- Assim:

$$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = P(M) + P(C) = \frac{140}{200} = 0.700$$

Evento Complementar

Vamos considerar agora apenas o curso em que o aluno está matriculado.
Então, os eventos M e $\{A \cup E \cup C\}$ são chamados eventos complementares:

- $\{M \cap \{A \cup E \cup C\}\} = \varnothing$
- $\{M \cup \{A \cup E \cup C\}\} = \Omega$

Evento Complementar

No caso geral, seja A e B subconjuntos de Ω:

- $A \cap B =$ evento em que A e B ocorrem simultâneamente
- $A \cup B =$ evento em que A ou B ocorrem
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- se $\{A \cap B\} = \varnothing$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A e B são complementares se $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = \Omega$
    - como $P(A) + P(B) = 1$, então $P(B) = 1 - P(A)$
    - B é denotado por $B = A^C$

Equiprobabilidade

- $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ finito
- $P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \ \forall \ i = 1, 2, ..., n$
- $A = \{\omega_{A1}, ..., \omega_{Am}\}$ evento em Ω com $m \leq n$ pontos amostrais
- então $P(A) = \frac{m}{n}$

Equiprobabilidade

- Exemplo: uma moeda honesta é lançada uma vez.
  - $\Omega = \{C, X\}$
  - $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$
  - $A = \{C\}$
  - então $P(A) = \frac{1}{2}$

Equiprobabilidade

- Exemplo: uma moeda honesta é lançada duas vezes.
  - $\Omega = \{(C,C),(X,C),(C,X),(X,X)\}$
  - $P(C,C) = P(X,C) = P(C,X) = P(X,X) = \frac{1}{4}$
  - $A = \{(X,X),(C,C)\}$
  - então $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$