1. Questão 1

   a) Temos que:

      - Estatística do teste (EDT): Defina $\boldsymbol{Y} = \overline{\boldsymbol{X}}_1 - \overline{\boldsymbol{X}}_2 \sim N_p\left(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2, \frac{1}{n_1}\boldsymbol{\Sigma}_1 + \frac{1}{n_2}\boldsymbol{\Sigma}_2\right) \equiv N_p\left(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}\right)$ (prova, item 1) do Formulário e o fato de que $\overline{\boldsymbol{X}}_1 \perp \overline{\boldsymbol{X}}_2$) e $Q = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}^{-1}\boldsymbol{Y}$ (EDT).
      - Distribuição sob H_0 Note que $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}^{-1}$ é simétrica e que $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}^{-1} = \boldsymbol{I}$, a qual é idempotente. Assim, $Q \sim \chi^2_{[r(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}})^{-1}=p, \boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}]}$ (item 2) do formulário). Contudo, sob H_0, $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{0}$ e, assim, $\delta = 0$. Portanto, como $||\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}|| \to 0 \Rightarrow Q \to 0$ e $||\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}|| \to \infty \Rightarrow Q \to \infty$, ela é uma estatística apropriada. Sob H_0, $Q \sim \chi^2_p$ ($\delta = 0$).
      - RR, RA e p-valor: Além disso rejeita-se H_0 se $q_c > q_\alpha$, em que $q_c = \left(\overline{\boldsymbol{x}}_1 - \overline{\boldsymbol{x}}_2\right)' \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}^{-1}\left(\overline{\boldsymbol{x}}_1 - \overline{\boldsymbol{x}}_2\right)$ e $P(X \geq q_\alpha|H_0) = \alpha$, $X \sim \chi^2_p$; $p{-}valor = P(X \geq q_c|H_0)$. $RR = \{q_c \in I\!R^+ | q_c \geq q_\alpha\}$ $(RA = RC^c)$.

   b)

   - Temos que:

      - Estatística do teste: Defina (usando o item a) e o item 1) do formulário) $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{Y} \sim N_c\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{R}'\right)$ e $Q^* = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{R}'\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{R}'\right)^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{Y}$.
      - Distribuição sob H_0 Note que $\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{R}'\right)^{-1}$ é simétrica e que $\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{R}'\right)^{-1}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{R}'\right) = \boldsymbol{I}$, a qual é idempotente. Assim, $Q^* \sim \chi^2_{[r((\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{R}')^{-1})=c, \boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}'\boldsymbol{R}'(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}]}$ (item 2) do formulário). Contudo, sob H_0, $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{0}$ e, assim, $\delta = 0$. Portanto, como $||\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}|| \to 0 \Rightarrow Q^* \to 0$ e $||\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}|| \to \infty \Rightarrow Q^* \to \infty$, ela é uma estatística apropriada.
      - RR, RA e p-valor: Sob H_0, $Q^* \sim \chi^2_c$. Além disso rejeita-se H_0 se $q_c > q_\alpha$, em que $q_c = \left(\overline{\boldsymbol{x}}_1 - \overline{\boldsymbol{x}}_2\right)'\boldsymbol{R}'\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}^{-1}\boldsymbol{R}'\right)^{-1}\boldsymbol{R}\left(\overline{\boldsymbol{x}}_1 - \overline{\boldsymbol{x}}_2\right)$ e $P(X \geq q_\alpha|H_0) = \alpha$, $X \sim \chi^2_c$; $p - valor = P(X \geq q_c|H_0)$. $RR = \{q_c \in I\!R^+ | q_c \geq q_\alpha\}$ $(RA = RC^c)$.

2. Questão 2

   a) μ_j : valor médio da variável resposta j (j=1,2,3), para as tartarugas fêmea. $\alpha_{2j} = \mu_{2j} - \mu_j$: diferença entre a média (da variável resposta j) das tartarugas macho e das tartarugas fêmea ($j = 1, 2, 3$).

   b) Parece haver diferença (médias) entre os dois sexos (Tabela 1), para cada uma das três variáveis. Não somente isso, as distribuições (box-plots, Figura 1) diferem-se tanto em termos de variabilidade, como também em relação aos quantis. A normalidade, para os dois sexos e cada variável, não parece ser razoável (assimetria, curtose, Tebela

1 e Figura 1) e gráficos de quantis quantis (Figura 2). As variâncias, entre os sexos, para cada variável, parecem ser muito diferentes (ausência de homocedasticidade multivariada) (Tabela 1).

c) Pela análise residual (Figuras de 3 a 9), há indicações de ausência de normalidade (padrões e/ou pontos fora da banda de confiança, QQ-plot) e de homocedasticadade (gráficos de resíduo x valor predito), o que indica que o modelo não está bem ajustado, apesar da ausência de dependência entre as observações (o padrão observado nos gráficos de resíduo x índice se deve, possivelmente, ao fato do banco de dados estarem ordenados por sexo). Pelas Tabelas MANOVA (Tabela 2) e a que contem as estimativas dos parâmetros do modelo (Tabela 3), temos que há diferença entre os dois sexos, para cada uma das três variáveis.

3. Questão 3

a) Temos que:

- Auto-valores

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \rho \\ \rho & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - \rho^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \rho^2 = 0$$

Assim, $\Delta = 4 - 4(1-\rho^2) = 4\rho^2$. Portanto,

- Auto-vetores

$$\lambda_1 = \frac{2+2\rho}{2} = 1+\rho, \lambda_2 = \frac{2-2\rho}{2} = 1-\rho$$

Por outro lado, para λ_1, vem que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 &= \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} e_1 + e_2\rho \\ e_1\rho + e_2 \end{bmatrix} - (1+\rho) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} \rho(e_2 - e_1) \\ \rho(e_1 - e_2) \end{bmatrix} &= 0 \rightarrow e_1 = e_2 \end{aligned}$$

Analogamente, para λ_2, temos que

$$\begin{bmatrix} \rho(e_2 + e_1) \\ \rho(e_1 + e_2) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow e_1 = -e_2$$

- Componentes principais

Portanto, $\boldsymbol{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$ e $\boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$. Componente 1: média ponderada entre as duas variáveis (com igual peso para ambas) $\left(Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}Z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Z_2\right)$. Componente 2: é um contraste entre ambas as vari[aveis, com iguais pesos entre elas $\left(Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}Z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Z_2\right)$.

b) Do item a), note que,

- $|\lambda| \to 1$
  se $|\rho| \to 1$, então $\lambda_1 \to 2, \lambda_2 \to 0$. Assim, temos apenas uma única componente principal, de sorte que: $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}Z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Z_2, \boldsymbol{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$ e $\boldsymbol{e}_2 = (0,0)'$, se $\lambda \to 1$ e $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}Z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Z_2, \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$ e $\boldsymbol{e}_1 = (0,0)'$, se $\lambda \to -1$. Assim, a CP não nula é uma média das duas variáveis (uma única componente tende a aboserver toda a variabilidade dos dados).
- $|\lambda| \to 0$ Por outro lado, se $|\rho| \to 0$, então $\lambda_1, \lambda_2 \to 1$ e, além disso: $Y_1 = Z_1, \boldsymbol{e}_1 = (1,0)'$ e $Y_2 = -Z_2, , \boldsymbol{e}_2 = (0,-1)'$ (decomposição de Gran-Schmidt)

c) Temos que $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{E}'\boldsymbol{Z}$, em que $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e}_1' \ \boldsymbol{e}_2' \ ... \ \boldsymbol{e}_p']$, logo, pelo item 1) do formulário, temos que $\boldsymbol{Y} \ N_p(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{E}})$, em que $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}'\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E}'\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\Lambda}$. Por outro lado, $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ é simétrica, de sorte que $r(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}) = p$, uma vez que todos os respectivos autovalores são positivos. Além disso, $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{I}$ é idempotente. Assim, $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Y} \sim \chi^2_p$, uma vez que $\mathcal{E}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{0}$ (item 2) do formulário).