1. Questão 1.

   a) Sejam $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{AY}$ e $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{BY}$, em que $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu} \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}$ e $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}'\left(\boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}$. Assim, temos que:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{CY}$$

Logo $\boldsymbol{F} \sim N_{2m}\left(\boldsymbol{\mu_F}, \boldsymbol{\Sigma_F}\right)$, em que:

$$\boldsymbol{\mu_F} = \mathcal{E}\left(\boldsymbol{F}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \mathcal{E}(\boldsymbol{Y}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{\Sigma_F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{B}' \end{bmatrix}$$

em que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A\Sigma A}' = &= \left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\left(\boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}\right)\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1} \\ &= \left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{LL}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1} \\ &+ \left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1} \\ &= \boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{B\Sigma B}' = \boldsymbol{L}'\left(\boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}\right)\left(\boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}'\left(\boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{A\Sigma B}' = \left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\left(\boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}\right)\left(\boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I} \neq \boldsymbol{0}$$

** Agora usando a proposição original do enunciado

$$\boldsymbol{B\Sigma B}' = \boldsymbol{L}'\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L} + \boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}\right)\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L} + \boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{A\Sigma B}' = \left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\left(\boldsymbol{LL}' + \boldsymbol{\Psi}\right)\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L} + \boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{0}$$

Assim, $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ são dependentes, como se esperava, pois $\boldsymbol{F}_1 = g(\boldsymbol{Y})$ e $\boldsymbol{F}_2 = h(\boldsymbol{Y})$.

b) O TRV indica que dois fatores são razoáveis para representar a estrutura dos dados (p=0,6726). Além disso, cada um dos fatores está associado a cada um do dois grupos de variáveis de interesse. Por fim, as variâncias específicas apresentam-se (bem) menores que as comunalidades. Assim, o modelo, sob os aspectos mencionados, parece estar bem ajustado.

2. Questão 2

a) A Figura 1, possivelmente, está associada a TC gerada pelas variáveis independentes, pois os pontos estão todos próximos entre si e ao par ordenado (0,0). Este padrão é típico de variáveis independentes, pois não há associação (aparente) entre categorias. A Figura 2, por apresentar (aparentemente) padrões de associações entre categorias, deve estar associada à outra TC (variáveis dependentes).

b) Temos que

	Y	
X	-1	1
-1	p^2	pq
1	pq	q^2

Pela simetria da Tabela de Contingência, temos que X e Y tem a mesma distribuição. Com efeito

$$\begin{aligned} P(X=-1) &= p^2 + p(1-p) = p \\ P(X=1) &= (1-q)q + q^2 = 1-p \end{aligned}$$

Portanto, $f_X(x) = pI_{\{-1\}}(x) + (1-p)\mathbb{1}_{\{1\}}(x)$. Assim, $\mathcal{E}(X) = -p + 1 - p = 1 - 2p$, $\mathcal{E}(X^2) = p + 1 - p = 1$ e

$$\mathcal{V}(X) = \mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}^2(X) = 1 - (1 - 4p + 4p^2) = 4p(1-p) = 4pq$$

Também

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(XY) &= p^2 - pq - pq + q^2 = p^2 - p + p^2 - p + p^2 + 1 - 2p + p^2 \\ &= 1 - 4p + 4p^2 = (1-2p)^2 \end{aligned}$$

$$Cov(X,Y) = 1 - 4p + 4p^2 - 1 + 4p - 4p^2 = 0$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned}
P(X=-1,Y=-1) &= p^2 = p \times p = P(X=-1)P(Y=-1) \\
P(X=-1,Y=1) &= pq = p \times q = P(X=-1)P(Y=1) \\
P(X=1,Y=-1) &= qp = q \times p = P(X=1)P(Y=-1) \\
P(X=1,Y=1) &= q^2 = q \times q = P(X=1)P(Y=1)
\end{aligned}$$

Logo, $Cov(X,Y) = 0$ e $X \perp Y$, $\forall p$.

3. Questão 3

   a) As correlações são positivas entre as variáveis dentro de cada grupo e negativas entre as variáveis de grupos distintos. Sim, era esperado pois: 1) Em geral, atletas que tem bons resultados em uma dada modalidade, tendem a tê-lo nas demais (a despeito de eventuais espcialidades) 2) As variáves do grupo 2 estão com seus valores na direção oposta daquelas do grupo 1.

   b) Temos que:

Modalidade	Atleta
score	Joyner-Kersee
longjump	Joyner-Kersee
highjump	Joyner-Kersee
shot	Joyner-Kersee
javelin	Joyner-Kersee
run200m	Joyner-Kersee
run800m	Jeong-Mi
hurdles	Joyner-Kersee