

Modelos multidimensionais para respostas dicotômicas

Prof. Caio Azevedo

Aspectos Gerais

- Os itens de um teste podem medir mais de um tipo de conhecimento.
- Exemplo: itens de matemática que expõe uma situação problema- interpretação de textos e matemática.
- Estrutura semelhante à de um modelo de análise fatorial.
- A antiga versão do ENEM (até 2009?).

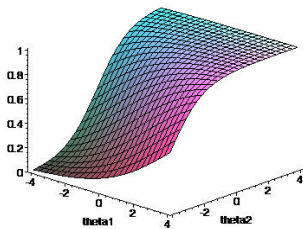
- **Modelo multidimensional compensatório de 2 parâmetros** : Seja Y_{ij} a resposta do indivíduo j ao item i .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

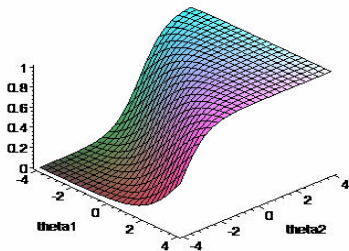
$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}'_i \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$.
- θ_{jm} : traço latente do indivíduo j relacionado à dimensão m .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i)'$.
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$, vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item i .
- d_i : parâmetro relacionado à dificuldade do item i .

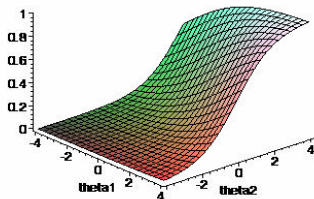
$$a_1 = 0, 5; a_2 = 1; d = 2$$



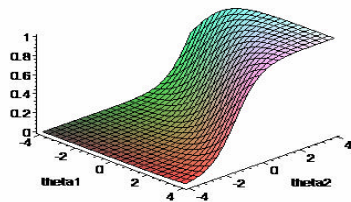
$$a_1 = 1; a_2 = 1,5; d = 2$$



$$a_1 = 0, 5; a_2 = 1; d = -2$$



$$a_1 = 1; a_2 = 1,5; d = -2$$



- Existe uma “inclinação” associada à cada dimensão do traço latente.
- Resumir toda informação em único parâmetro.

- Dificuldade multidimensional: $DIFICM_i = -\frac{d_i}{\sqrt{\sum_{m=1}^M a_{im}^2}}$

- Discriminação multidimensional ($DISCM_i$) = $\sqrt{\sum_{m=1}^M a_i^2}$.

- Veja Reckase (2009) e Nojosa (2001).

Parâmetro de dificuldade

- Suposições:
 - Probabilidade de resposta correta aumenta monotonicamente com o aumento de pelo menos um dos traços letentes.
 - Um item está localizado (posicionado) em um único ponto do espaço multidimensional (dificuldade no caso unidimensional).
 - Utiliza-se o ponto que em que o item possui maior poder de discriminação (maior informação sobre os indivíduos).
 - Interpretação: De uma forma geral, semelhante ao caso unidimensional

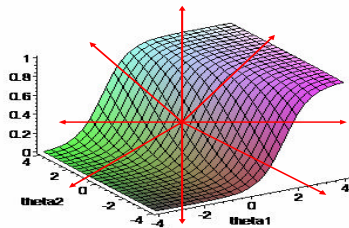
Parâmetro de discriminação

- Suposições:
 - Está relacionada com a inclinação da superfície de resposta ao item.
 - Importante se estabelecer uma direção para a qual se pretende medir a discriminação.
 - É estabelecida a partir do ponto onde a inclinação na direção indicada pelo DIFICM é máxima.

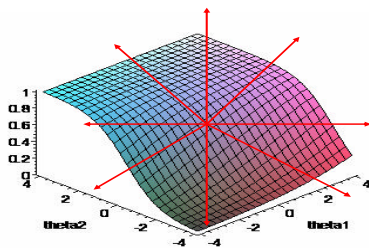
Item	a_{i1}	a_{i2}	d_i	$DIFICM_i$	$DISCM_i$
1	1,69	0,21	0,58	-0,34	1,70
2	1,30	0,14	-0,41	0,31	1,31
3	0,10	1,85	1,50	-0,81	1,85

- No exemplo a seguir o item 2 discrimina melhor indivíduos que diferem na segunda dimensão enquanto que o item 1 discrimina melhor indivíduos que diferem na primeira dimensão.

$a_1 = 1,9; a_2 = 0,7; d = 0$



$a_1 = 0,4; a_2 = 1,2; d = 2$



Identificabilidade

- É suficiente restringir os traços latentes? Depende do contexto.
- Exemplo $\theta_j \sim N_M(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Modelo de análise fatorial ortogonal.
- Os parâmetros \mathbf{a}_i podem permutar de sinal com os traços latentes, sem mudar a distribuição dos traços latentes (acima). Processo de estimação se encarrega dessa restrição? Em princípio, sim.
- Tópico em aberto com diversas discussões interessantes.
- Veja Padilla (2014). Temos que evitar que transformações de translação e rotação sejam possíveis.

Identificabilidade

- Em linhas gerais:
 - Preditor: $\mathbf{a}'_i \boldsymbol{\theta}_j + d_i = \mathbf{a}'_i \mathbf{T}' \mathbf{T} \boldsymbol{\theta}_j + \alpha + d_i - \alpha = \mathbf{a}'_i^* \boldsymbol{\theta}_j^* + d_i^*$, se \mathbf{T} for uma matriz ortogonal e α for uma constante.
 - Vetor de médias (traços latentes): $\boldsymbol{\mu}_\theta = \mathbf{0}$.
 - Matriz de covariâncias (traços latentes): se $\boldsymbol{\Psi}_\theta = \mathbf{I}$ então $a_{im} > 0, \forall i, m$, se $\boldsymbol{\Psi}_\theta$ for uma matriz de correlações (com todas as correlações diferentes de 0) então não há necessidade de se impor outras restrições.

Estimação

- Se um conjunto de parâmetros é conhecido.
 - Máxima verossimilhança.
 - Métodos bayesianos.
- Todos os parâmetros desconhecidos.
 - Máxima verossimilhança marginal.
 - Integrais multidimensionais (M): quadratura adaptativa.
 - Passom M : $(M+1)$ equações para serem resolvidas.

Recursos computacionais

- Programa Testfact.
 - Modelos compensatórios (parâmetro c deve ser estimado antecipadamente).
 - MVM, MMAP, EAP e MAP implementados.
 - Teste para a escolha do número de dimensões do modelo.
- Pacote MCMCpack (R).
 - Modelos compensatórios (não permite o ajuste do modelo de 3 parâmetros).
 - Baseado em métodos de MCMC.
 - Contorna problemas com relação ao número de dimensões do modelo.

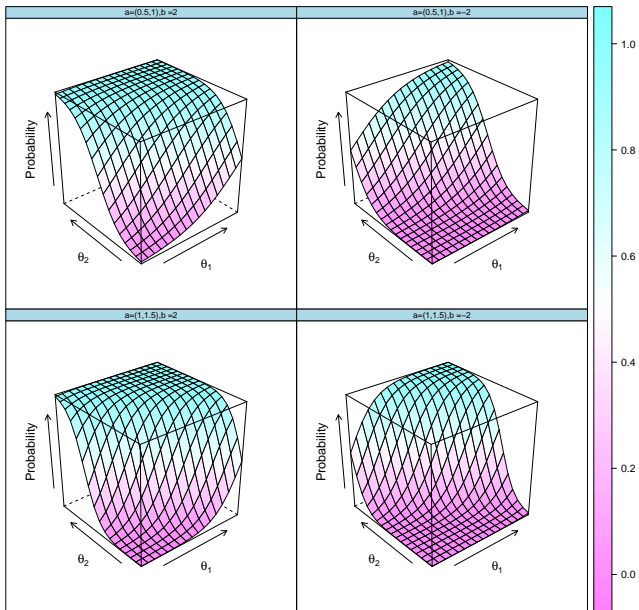
- Pacote mirt.
 - Modelos compensatórios e não compensatórios.
 - Diferentes estruturas de covariâncias e número de fatores por item.
 - Pode-se implementar, externamente, diferentes funções de resposta ao item e distribuições dos traços latentes.
 - Estimação: marginal - perfilada (frequentista e bayesiana), algoritmo Metropolis-Hastings de Robbins-Monro.

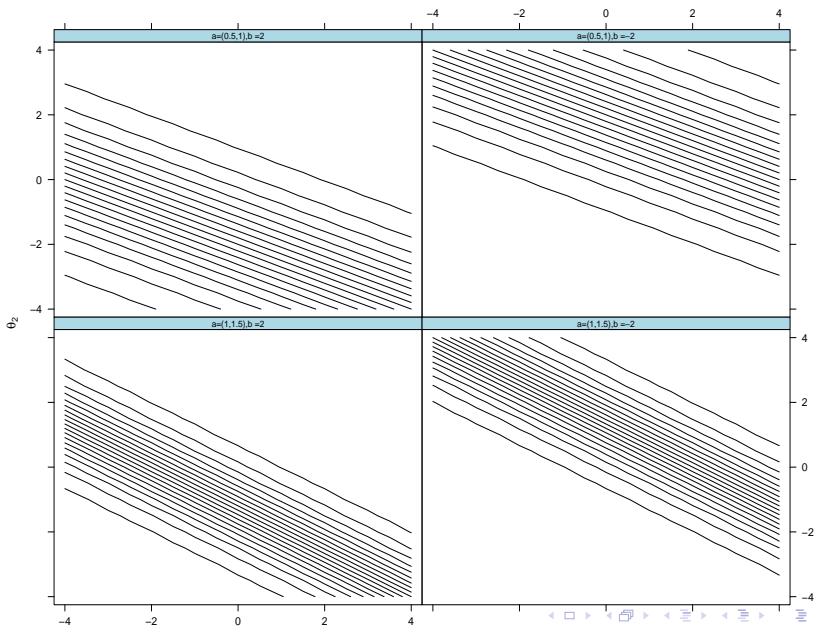
- **Modelo multidimensional compensatório de 3 parâmetros** : Seja Y_{ij} a resposta do indivíduo j ao item i .

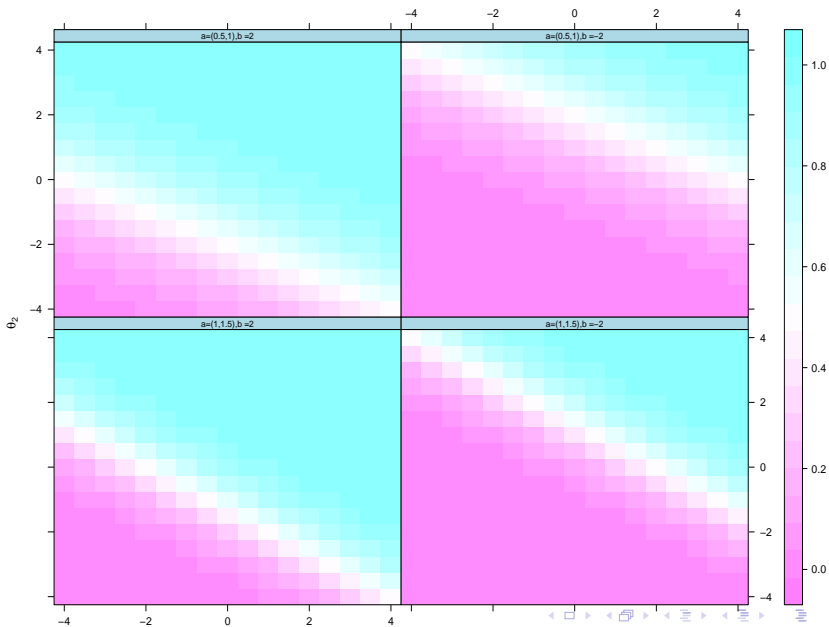
$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

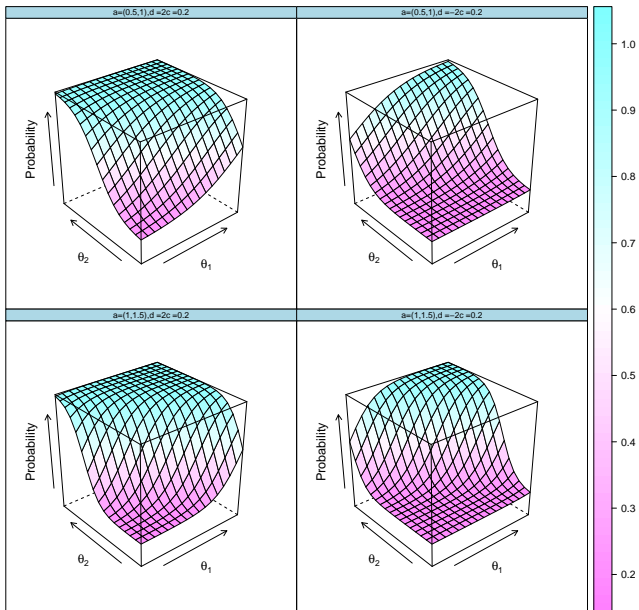
$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}'_i \theta_j + d_i)}}$$

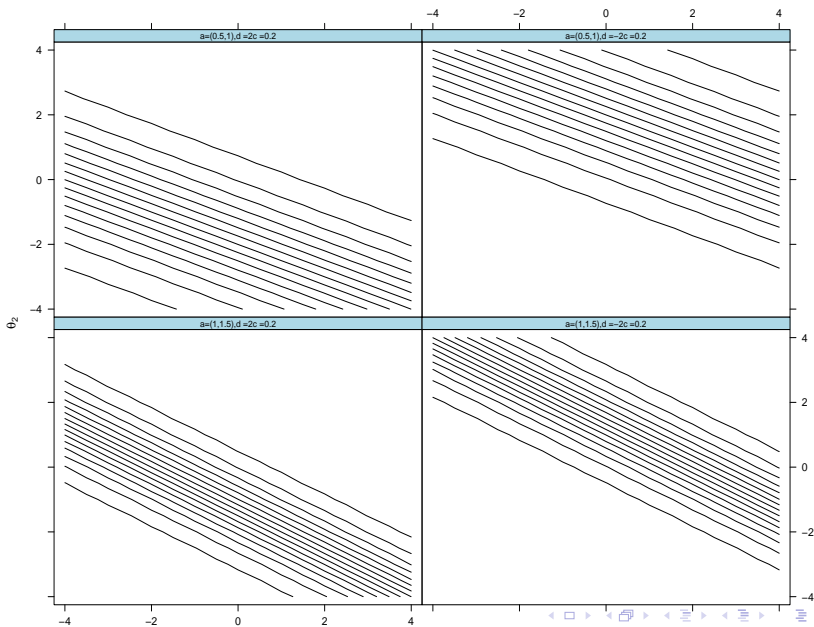
- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$.
- θ_{jm} : traço latente do indivíduo j relacionado à dimensão m .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i, c_i)'$.
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$, vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item i .
- d_i : parâmetro relacionado à dificuldade do item i .
- c_i : probabilidade aproximada de resposta correta ao item i de indivíduos

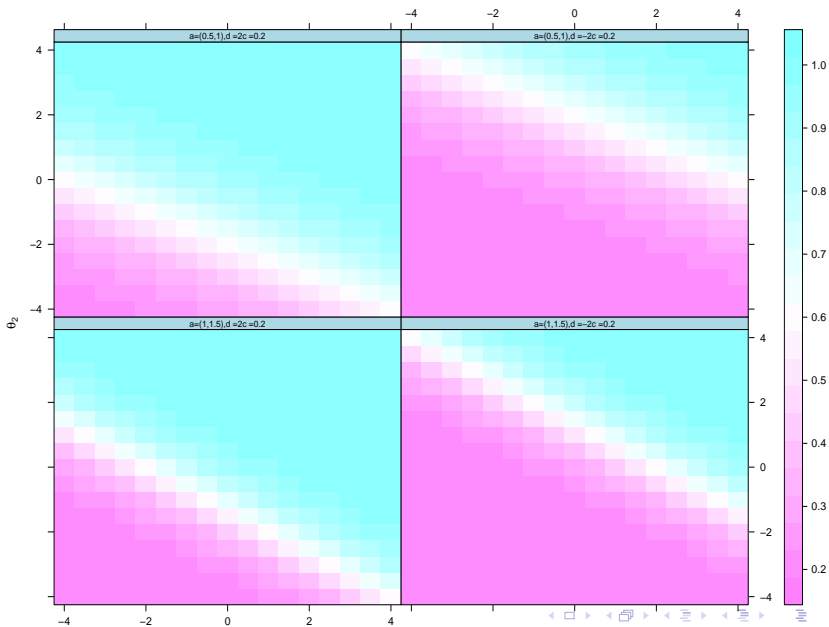












- Nojosa, R. T. (2001). Modelos multidimensionais para a teoria da resposta ao item. Dissertação de Mestrado. DE, UFPE.
- Reckase, M. D. (1997). A linear logistic multidimensional model for dichotomous item response data. In W. J. van der Linden and R. K. Hambleton eds. Handbook of modern item response theory. New York-Springer - Verlag.
- Gomez, J. L. P. (2014). Modelos da Teoria de Resposta ao Item Multidimensionais Assimétricos de Grupos Múltiplos para Respostas Dicotômicas sob um Enfoque Bayesiano. Dissertação de Mestrado. IMECC. Unicamp

Métodos de estimação

- Marginal-perfilado:
 - Integrações numéricas de ordem M .
 - Equações de estimação: sistema de ordem $(3 \text{ parâmetros}) 2 \cdot I + M$.
- Bayesianos plenos:
 - Maior número de condicionais completas com maior complexidade.

Construção da Verossimilhança Marginal

■ Probabilidade Marginal de Resposta

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y}_{.j} = \mathbf{y}_{.j} | \zeta, \boldsymbol{\eta}_\theta) &\equiv P(\mathbf{Y}_{.j} | \zeta, \boldsymbol{\eta}_\theta) = \underbrace{\int_{\mathfrak{R}} \dots \int_{\mathfrak{R}}}_{\text{M integrais}} P(\mathbf{Y}_{.j} = \mathbf{y}_{.j} | \boldsymbol{\theta}, \zeta) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\theta) d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{\mathfrak{R}^M} P(\mathbf{Y}_{.j} = \mathbf{y}_{.j} | \boldsymbol{\theta}, \zeta) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\theta) d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{\mathfrak{R}^M} P(\mathbf{Y}_{.j} = \mathbf{y}_{.j} | \boldsymbol{\theta}, \zeta) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\theta) d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{\mathfrak{R}^M} P(\mathbf{Y}_{.j} | \boldsymbol{\theta}, \zeta) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\theta) d\boldsymbol{\theta}, \end{aligned}$$

em que $P(\mathbf{Y}_{.j} | \boldsymbol{\theta}, \zeta) = \prod_{i=1}^I P_i^{y_{ij}} Q_i^{1-y_{ij}}$ e $\boldsymbol{\eta}_\theta$ é chamado de vetor de

parâmetros populacionais.



Integração numérica (multivariada)

- Deve-se estabelecer um conjunto de pontos de quadratura para cada dimensão (em geral de tamanhos iguais) e substituir as integrais por somas de mesma dimensão.

- Considere $M = 2$ e $q = 3$ pontos de quadratura por dimensão.

Teremos então:

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{11} & \bar{\theta}_{21} \\ \bar{\theta}_{11} & \bar{\theta}_{22} \\ \bar{\theta}_{11} & \bar{\theta}_{23} \\ \bar{\theta}_{12} & \bar{\theta}_{21} \\ \bar{\theta}_{12} & \bar{\theta}_{22} \\ \bar{\theta}_{12} & \bar{\theta}_{23} \\ \bar{\theta}_{13} & \bar{\theta}_{21} \\ \bar{\theta}_{13} & \bar{\theta}_{22} \\ \bar{\theta}_{13} & \bar{\theta}_{23} \end{bmatrix}_{9 \times 2} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{\theta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\theta}_7 \\ \bar{\theta}_8 \\ \bar{\theta}_9 \end{bmatrix}_{9 \times 2}$$

Aproximação de integrais

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}^M} P(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\theta}, \zeta) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\theta) d\boldsymbol{\theta} &\approx \sum_{l=1}^{q^M} P(\mathbf{Y}_{.j}|\bar{\boldsymbol{\theta}}_l, \zeta) g(\bar{\boldsymbol{\theta}}_l, \boldsymbol{\eta}_\theta) \\ &= \sum_{l_1=1}^q \sum_{l_2=1}^q \dots \sum_{l_M=1}^q P(\mathbf{Y}_{.j}|\bar{\boldsymbol{\theta}}, \zeta) g(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\eta}_\theta) \end{aligned}$$

em que $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\theta_{l_1}, \theta_{l_2}, \dots, \theta_{l_M})'$

Construção da Verossimilhança Marginal

- Verossimilhança marginal

$$\begin{aligned} L(\zeta, \eta_\theta) &= \prod_{j=1}^n P(\mathbf{Y}_{.j} | \zeta, \eta_\theta) = \prod_{j=1}^n \int_{\mathfrak{R}^M} P(\mathbf{Y}_{.j} | \theta, \zeta) g(\theta, \eta_\theta) d\theta \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{\mathfrak{R}^M} \prod_{i=1}^l P(\mathbf{Y}_{ij} | \theta, \zeta_i) g(\theta, \eta_\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Desenvolvimento das expressões

- logverossimilhança

$$l(\zeta, \eta_{\theta}) = \sum_{j=1}^n \ln \int_{\mathfrak{R}^M} \prod_{i=1}^I P(\mathbf{Y}_{ij} | \theta, \zeta_i) g(\theta, \eta_{\theta}) d\theta. \quad (1)$$

- Estimadores de Máxima verossimilhança (Marginal)

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\zeta, \eta_{\theta})}{\partial \zeta_i} &= \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \left\{ \sum_{j=1}^n \ln P(\mathbf{Y}_{.j} | \zeta, \eta_{\theta}) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{P(\mathbf{Y}_{.j} | \zeta, \eta_{\theta})} \frac{\partial P(\mathbf{Y}_{.j} | \zeta, \eta_{\theta})}{\partial \zeta_i}. \end{aligned}$$

Desenvolvimento das expressões

■ Mas,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(\mathbf{Y}_j|\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_\theta)}{\partial \zeta_i} &= \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \int_{\mathfrak{R}^M} P(\mathbf{Y}_j|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\theta) d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{\mathfrak{R}^M} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} P(\mathbf{Y}_j|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}) \right) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\theta) d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{\mathfrak{R}^M} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \prod_{h=1}^l P(\mathbf{Y}_{hj}|\boldsymbol{\theta}, \zeta_h) \right) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\theta) d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{\mathfrak{R}^M} \left(\prod_{h \neq i}^l P(\mathbf{Y}_{hj}|\boldsymbol{\theta}, \zeta_h) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} P(\mathbf{Y}_{ij}|\boldsymbol{\theta}, \zeta_i) \right) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\theta) d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{\mathfrak{R}^M} \left(\frac{\partial P(\mathbf{Y}_{ij}|\boldsymbol{\theta}, \zeta_i) / \partial \zeta_i}{P(\mathbf{Y}_{ij}|\boldsymbol{\theta}, \zeta_i)} \right) P(\mathbf{Y}_j|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\theta) d\boldsymbol{\theta}.\end{aligned}$$

Desenvolvimento das expressões

- Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(Y_{ij}|\zeta_i, \theta)}{\partial \zeta_i} &= \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (P_i^{y_{ij}} Q_i^{1-y_{ij}}) \\ &= y_{ij} P_i^{y_{ij}-1} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \zeta_i} \right) Q_i^{1-y_{ij}} + P_i^{y_{ij}} (1-y_{ij}) Q_i^{-y_{ij}} \left(\frac{-\partial P_i}{\partial \zeta_i} \right) \\ &= \left[y_{ij} P_i^{y_{ij}-1} Q_i^{1-y_{ij}} - P_i^{y_{ij}} (1-y_{ij}) Q_i^{-y_{ij}} \right] \left(\frac{\partial P_i}{\partial \zeta_i} \right).\end{aligned}$$

Notemos que o termo entre colchetes vale 1 quando $y_{ij} = 1$ e -1 quando $y_{ij} = 0$, portanto, podemos reescrevê-lo como $(-1)^{y_{ij}+1}$. Com isso,

$$\frac{\partial P(Y_{ij}|\zeta_i, \theta)}{\partial \zeta_i} = (-1)^{y_{ij}+1} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \zeta_i} \right).$$

Note agora que

$$\frac{(-1)^{y_{ij}+1} P_i Q_i}{P_i^{y_{ij}} Q_i^{1-y_{ij}}} = \begin{cases} Q_i, & \text{se } y_{ij} = 1 \\ -P_i, & \text{se } y_{ij} = 0 \end{cases} = [y_{ij} - P_{ij}].$$

Desenvolvimento das expressões

- Dessa forma, temos que

$$\frac{1}{P(\mathbf{Y}_{ij}|\boldsymbol{\theta}, \zeta_i)} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} P(\mathbf{Y}_{ij}|\boldsymbol{\theta}, \zeta_i) = \frac{(y_{ij} - P_i)}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \zeta_i} \right),$$

Logo,

$$\frac{\partial P(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \zeta_i} = \int_{\mathbb{R}^M} \left[\frac{(y_{ij} - P_i)}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial b_i} \right) \right] P(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}) g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}) d\boldsymbol{\theta}$$

portanto,

$$S(\zeta_i) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{P(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\theta}})} \frac{\partial P(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \zeta_i} = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^M} \left[\frac{(y_{ij} - P_i)}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial b_i} \right) \right] g_j^*(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta},$$

em que,

$$g_j^*(\boldsymbol{\theta}) \equiv g(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_{.j}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{P(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}) g(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\theta}})}{P(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\theta}})}.$$

Desenvolvimento da verossimilhança - Algoritmo EM

- Denote por $\mathbf{f}_i = (f_{i1}, \dots, f_{iq^M})'$ a quantidade de indivíduos em cada combinação dos valores do traços latentes ($\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}'_1, \boldsymbol{\theta}'_2, \dots, \boldsymbol{\theta}'_{q^M})'$) (veja slide 27) para cada dimensão e $\mathbf{r}_i = (r_{i1}, \dots, r_{iq^M})'$ a quantidade daqueles que respondem corretamente ao item i , para cada combinações de valores dos traços latentes. Além disso $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_I)'$.

Desenvolvimento da verossimilhança - Algoritmo EM

- A probabilidade conjunta que os f_{il} indivíduos tenham vetor de traços latentes $\bar{\theta}_l = (\theta_{l(1)}, \dots, \theta_{l(M)})$, $l = 1, \dots, q^m$, é dada pela distribuição multinomial:

$$P(\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i | \boldsymbol{\pi}) \equiv P(\mathbf{f}_i | \boldsymbol{\pi}) = \frac{n(i)!}{\prod_{l=1}^{q^M} f_{il}!} \prod_{l=1}^{q^M} \pi_l^{f_{il}}, \quad i = 1, \dots, I,$$

- Dados f_{il} e $\bar{\theta}_l$, a probabilidade de ocorrerem r_{il} acertos ao item i dentre as f_{il} tentativas (respostas) por indivíduos com habilidade $\bar{\theta}_l$ é

$$P(R_{il} = r_{il} | f_{il}, \bar{\theta}_l) \equiv P(r_{il} | f_{il}, \bar{\theta}_l) = \binom{f_{il}}{r_{il}} P_{il}^{r_{il}} Q_{il}^{f_{il} - r_{il}},$$

Desenvolvimento da verossimilhança - Algoritmo EM

- A probabilidade conjunta de \mathbf{f} e \mathbf{r} , dados $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\boldsymbol{\theta}}_1, \dots, \bar{\boldsymbol{\theta}}_{q_M})'$ e π , é

$$\begin{aligned} P(\mathbf{F} = \mathbf{f}, \mathbf{R} = \mathbf{r} | \bar{\boldsymbol{\theta}}, \pi) &\equiv P(\mathbf{f}, \mathbf{r} | \bar{\boldsymbol{\theta}}, \pi) = P(\mathbf{r} | \mathbf{f}, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \pi) P(\mathbf{f} | \bar{\boldsymbol{\theta}}, \pi) \\ &= P(\mathbf{r} | \mathbf{f}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) P(\mathbf{f} | \pi) \\ &= \left\{ \prod_{i=1}^I \prod_{l=1}^{q_M} P(r_{il} | f_{il}, \bar{\boldsymbol{\theta}}_l) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^I P(f_i | \pi) \right\} \end{aligned}$$

Desenvolvimento da verossimilhança - Algoritmo EM

- Segue que a log-verossimilhança para os dados completos é :

$$\begin{aligned}\ln L(\zeta) &= \ln P(\mathbf{f}|\pi) + \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^{q^M} \ln P(r_{il}|f_{il}, \bar{\theta}_l) \\ &= \ln P(\mathbf{f}|\pi) + \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^{q^M} \left\{ \ln \binom{f_{il}}{r_{il}} + r_{il} \ln P_{il} + (f_{il} - r_{il}) \ln Q_{il} \right\} \\ &= C + \sum_{l=1}^{q^M} \sum_{i=1}^I \{r_{il} \ln P_{il} + (f_{il} - r_{il}) \ln Q_{il}\},\end{aligned}$$

Desenvolvimento da verossimilhança - Algoritmo EM

- Tomando a esperança da log-verossimilhança, condicionada a $(\mathbf{Y}'_{..}, \mathbf{b}')'$, para os dados completos, temos que

$$E[\ln L(\mathbf{b}) | (\mathbf{Y}'_{..}, \mathbf{b}')'] = \bar{C} + \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^{q^M} \{ \bar{r}_{il} \ln P_{il} + (\bar{f}_{il} - \bar{r}_{il}) \ln Q_{il} \},$$

em que

$$\bar{r}_{il} = E[r_{il} | \mathbf{Y}_{..}, \mathbf{b}], \quad \bar{f}_{il} = E[f_{il} | \mathbf{Y}_{..}, \mathbf{b}] \quad \text{e} \quad \bar{C} = E[C | \mathbf{Y}_{..}, \mathbf{b}].$$

Desenvolvimento da verossimilhança - Algoritmo EM

- Em que

$$\bar{r}_{il} = \sum_{j=1}^n y_{ij} g_j^* (\bar{\theta}_l) \quad , \quad \bar{f}_{il} = \sum_{j=1}^n g_j^* (\bar{\theta}_l) .$$

e

$$g_j^* (\theta) \equiv g (\theta | y_{.j}, \zeta, \eta) = \frac{P(\mathbf{Y}_{.j} | \theta, \zeta) g(\theta | \eta)}{P(\mathbf{Y}_{.j} | \zeta, \eta)} .$$

Modelo de 3 parâmetros

Equações de verossimilhança: Forma de quadratura

$$a_{im} : (1 - c_i) \sum_{j=1}^n \sum_{l_1=1}^q \dots \sum_{l_m=1}^q \dots \sum_{l_M=1}^q [(y_{ij} - P_{il}) (\bar{\theta}_{lm} - b_i) W_{il}] g_j^* (\bar{\theta}_l) = 0$$

$$d_i : (1 - c_i) \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{q^M} [(y_{ij} - P_{il}) W_{il}] g_j^* (\bar{\theta}_l) = 0$$

$$c_i : \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{q^M} \left[(y_{ij} - P_{il}) \frac{W_{il}}{P_{il}^*} \right] g_j^* (\bar{\theta}_l) = 0$$

com $W_{ij} = \frac{P_{ij}^* Q_{ij}^*}{P_{ij} Q_{ij}}$, $P_{ij}^* = \left\{ 1 + e^{-(\mathbf{a}'_i \theta_j + d_i)} \right\}^{-1}$ e $Q_{ij}^* = 1 - P_{ij}^*$, em que $m = 1, 2, \dots, M$.

Informação de Fisher: Forma de quadratura

$$\begin{aligned} I(\zeta_i) &= \mathcal{E} \{-\mathbf{H}(\zeta_i)\} \\ &= \sum_{l_1=1}^q \dots \sum_{l_m=1}^q \dots \sum_{l_M=1}^q f_{il} P_{il}^* Q_{il}^* \mathbf{h}_{il} \mathbf{h}'_{il}, \end{aligned}$$

em que

$$\mathbf{h}_{il} = (P_{il}^* Q_{il}^*)^{-1} \left(\frac{\partial P_{il}}{\partial \zeta_i} \right) = \begin{pmatrix} D(1 - c_i) (\bar{\theta}_{l1} - b_i) \\ D(1 - c_i) (\bar{\theta}_{l2} - b_i) \\ \vdots \\ D(1 - c_i) (\bar{\theta}_{lM} - b_i) \\ -Da_i(1 - c_i) \\ \frac{1}{P_{il}^*} \end{pmatrix}$$

Métodos bayesianos plenos (voltando à TRI)

■ Priors

- $\theta_j \stackrel{i.i.d.}{\sim} N_M(\mathbf{0}, I)$ (podemos estender os resultados para uma matriz covariâncias mais geral mas, em geral, as médias e as variâncias têm de ser fixadas em 0 e 1, respectivamente).
- $(a_i, d_i) \stackrel{i.i.d.}{\sim} N_{M+1}(\mu_\zeta, \Psi_\zeta) \prod_{m=1}^M I_{(a_{im} > 0)}$ (ou sem essa restrição).
Também podemos assumir priors independentes, como, por exemplo, $a_{im} \stackrel{i.i.d.}{\sim} LN(\mu_a, \sigma_a^2)$, $m = 1, 2, \dots, M$ (LN log-normal tal que $\mathcal{E}(\ln(a)) = \mu_a$ e $\mathcal{V}(\ln(a)) = \sigma_a^2$) e $b_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_b, \sigma_b^2)$.
- $c_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{beta}(r, s)$.

Métodos bayesianos plenos

- Amostrador de Gibbs: posteriori via verossimilhança aumentada

$$\begin{aligned} p(\zeta, \theta, \eta_\theta | \mathbf{y}) &\propto p(\mathbf{y} | \mathbf{z}, \mathbf{u}) p(\mathbf{z} | \mathbf{a}, \mathbf{b}, \theta) p(\mathbf{u} | \mathbf{c}) p(\zeta) p(\theta) \\ &\propto \prod_{j=1}^n \prod_{i \in \mathbb{1}_j} \exp \left\{ -0.5 (z_{ij} - \mathbf{a}'_i \theta_j - d_i)^2 \right\} \mathbb{1}_{\{z_{ij}, y_{ij}, u_{ij}\}} \\ &\times \prod_{j=1}^n \prod_{i \in \mathbb{1}_j} u_{ij}^{c_{ij}} (1 - u_{ij})^{1 - c_{ij}} \mathbb{1}_{\{z_{ij}, y_{ij}, u_{ij}\}} \left(\prod_{j=1}^n e^{-0.5 \sum_{j=1}^M \theta_j^2} \right) \\ &\times \left(\prod_{i=1}^I \exp \left[-0.5 (\zeta_i - \boldsymbol{\mu}_\zeta)^t \boldsymbol{\Psi}_\zeta^{-1} (\zeta_i - \boldsymbol{\mu}_\zeta) \right] \prod_{m=1}^M \mathbb{1}_{(a_i > 0)} \right) \\ &\times \prod_{i=1}^I c_i^{r-1} (1 - c_i)^{s-1} \end{aligned}$$

Métodos bayesianos plenos

- Metropolis-Hastings (posteriori via verossimilhança original):

$$\begin{aligned} p(\zeta, \theta | \mathbf{y}) &\propto L(\zeta, \theta) p(\zeta) p(\theta) \\ &\propto \left(\prod_{j=1}^n \prod_{i \in \mathbb{I}_j} p_{ij}^{y_{ij}} (1 - p_{ij})^{1-y_{ij}} \right) \left(\prod_{j=1}^n e^{-0.5\theta_j^2} \right) \\ &\times \left(\prod_{i=1}^l \exp \left[-0.5 (\zeta_i - \mu_\zeta)^t \Psi_\zeta^{-1} (\zeta_i - \mu_\zeta) \right] \mathbb{1}_{(a_i > 0)} \right) \\ &\times \prod_{i=1}^l c_i^{r-1} (1 - c_i)^{s-1} \end{aligned}$$

Condicionais completas

- Sob a verossimilhança original, independentemente da escolha da priori, as condicionais completas não possuem forma conhecida (distribuição catalogada).
- Sob a verossimilhança aumentada, consoante a priori escolhida, é possível de obter todas as condicionais completas com forma conhecida (distribuição catalogada).

Modelo de 2 parâmetros

Denotando por (\cdot) o conjunto de todos os outros parâmetros, temos que os passos do Amostrador de Gibbs são dados por :

- Iniciar a simulação das cadeias através de valores convenientes.
- Simular Z_{ij} de forma mutuamente independente através de $Z_{ij}|\cdot$ (normais univariadas truncadas).
- Simular θ_j de forma mutuamente independente através de $\theta_j|\cdot$ (normais univariadas).
- Simular ζ_i de forma mutuamente independente através de $\zeta_i|\cdot$ (normais multivariadas truncadas).

Repetir procedimento até convergência do processo.

Modelo de 3 parâmetros, Sahu ou Beguin and Glas

Denotando por $(.)$ o conjunto de todos os outros parâmetros, temos que os passos do Amostrador de Gibbs são dados por :

- Iniciar a simulação das cadeias através de valores convenientes.
- Simular Z_{ij} de forma mutuamente independente através de $Z_{ij}|(.)$ (normais univariadas truncadas).
- Simular U_{ij} de forma mutuamente independente através de $Z_{ij}|(.)$ (bernoullis univariadas).
- Simular θ_j de forma mutuamente independente através de $\theta_j|(.)$ (normais univariadas).
- Simular ζ_j de forma mutuamente independente através de $\zeta_j|(.)$ (normais multivariadas truncadas).
- Simular c_i de forma mutuamente independente através $c_i|(.)$ (betas univariadas)

Repetir procedimento até convergência do processo.



Condicionalis completas: AG - M2P

- **Passo 1** : Simular as variáveis não observáveis utilizando

$Z_{ij} | (\cdot) \sim N(\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}_j + d_i, 1) \mathbb{1}_{\{y_{ij}, z_{ij}\}}$, em que

$\mathbb{1}_{\{y_{ij}, z_{ij}\}} = I_{\{z_{ij} > 0, y_{ij} = 1\}} + I_{\{z_{ij} < 0, y_{ij} = 0\}}$ de forma mutuamente independente.

- **Passo 2** : Simular os traços latentes utilizando $\boldsymbol{\theta}_j | (\cdot) \sim N(\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{\theta_j} \widehat{\boldsymbol{\theta}}_j, \widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{\theta_j})$, mutuamente independentes, em que (I_j conjunto de itens que respondidos pelo indivíduo j)

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_j = \sum_{i \in I_j} z_{ij} \mathbf{a}_i + \sum_{i \in I_j} b_i \mathbf{a}_i,$$
$$\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{\theta_j} = \left(\mathbf{I}_M + \sum_{i \in I_j} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i' \right)^{-1}.$$

Condicionais completas: AG - M2P

- **Passo 3** : Simular os parâmetros dos itens através de

$\zeta_i | (\cdot) \sim N(\widehat{\Psi}_{\zeta_i} \widehat{\zeta}_i, \widehat{\Psi}_{\zeta_i})$, de forma mutuamente independente, em que

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta}_i &= H_{i..}^t z_{i..} + \Psi_{\zeta}^{-1} \mu_{\zeta}, \\ \widehat{\Psi}_{\zeta_i} &= \left(H_{i..}^t H_{i..} + \Psi_{\zeta}^{-1} \right)^{-1}, \\ H_{i..} &= [\theta \quad -1] \bullet \mathbb{1}_i,\end{aligned}$$

$\mathbb{1}_i$ é uma matriz indicadora de dimensão $n \times 2$ cuja linhas assumem o valor do vetor com 0's ou 1's consoante o indivíduo j responde ou não ao item i e \bullet denota o produto de Hadamard, o qual multiplica de forma pontual os elementos correspondentes de matrizes de mesma dimensão, Horn and Johnson (1991).

Condicionais completas: AG - M3P

- Beguin and Glas: Simular U_{ij} de Bernoullis como em (??) - (??).

Depois, dado U_{ij} simular $Z_{ij} \stackrel{ind.}{\sim} N(\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}_j + d_i, 1) I_{\{z_{ij}, u_{ij}\}}$, em que

$$I_{\{z_{ij}, u_{ij}\}} = I_{\{z_{ij} \geq 0, u_{ij} = 1\}} + I_{\{z_{ij} < 0, u_{ij} = 0\}}.$$

Condicionalis completas: AG - M3P

- Sahu: Variáveis Z e U (slides seguintes)
- Traços latentes e parâmetros dos itens: como para o modelo M2P (Sahu e Beguin and Glas).
- Parâmetro de acerto casual:

$c_i | (.) \text{beta}(r + \sum_{j \in I_i} u_{ij}, s + \sum_{j \in I_i} (1 - u_{ij}))$ (Sahu) e

$c_i | (.) \text{beta}(s + \sum_{j \in I_i | u_{ij}=0} y_{ij}, r + \sum_{j \in I_i} u_{ij} - \sum_{j \in I_i | u_{ij}=0} y_{ij})$ (Beguin and Glas), em que I_i é o conjunto de indivíduos que respondeu ao item i .

Condicionais completas: AG - M3P

- Sahu: Proceder da seguinte forma:

Simulando	Y_{ij}	U_{ij}	Z_{ij}
Z_{ij}	0	0	$N(\mathbf{a}_i\boldsymbol{\theta}_j + d_i, 1)I_{(z_{ij}<0)}$
Z_{ij}	1	0	$N(\mathbf{a}_i\boldsymbol{\theta}_j + d_i, 1)I_{(z_{ij}>0)}$
Z_{ij}	1	1	$N(\mathbf{a}_i\boldsymbol{\theta}_j + d_i, 1)$
U_{ijk}	0	0	qualquer valor
U_{ij}	1	1	< 0
U_{ij}	1	Bernoulli(c_i)	≥ 0

Algoritmo de Metropolis-Hastings dentro do Gibbs

- Simular $\theta_j^{(t)} \sim g(\theta_j | \zeta^{(t-1)}, \mathbf{y}_{..})$ (condicional completa), para $j = 1, \dots, n$

independentemente, considerando como priori uma $N_M(\theta_j | \mathbf{0}, \mathbf{I})$ através de :

(a) Simular $\theta_j^{(*)} \sim N_M(\theta_j^{(t-1)}, \Psi_{\theta_j})$

(b) Calcular o vetor de probabilidades de aceitação $\theta_j^{(t)} = \theta_j^{(*)}$

$$\pi_j(\theta_j^{(t-1)}, \theta_j^{(*)}) = \min \left\{ \frac{L(\zeta^{(t-1)}, \theta_j^{(*)}) \exp \left\{ -\frac{\sum_{j=1}^M (\theta_j^{(*)})^2}{2} \right\}}{L(\zeta^{(t-1)}, \theta_j^{(t-1)}) \exp \left\{ -\frac{\sum_{j=1}^M (\theta_j^{(t-1)})^2}{2} \right\}}, 1 \right\}$$

(c) Aceitar cada $\theta_j^{(t)} = \theta_j^{(*)}$ com probabilidade π_j , caso contrário

$$\theta_j^{(t)} = \theta_j^{(t-1)}$$

Algoritmo de Metropolis-Hastings dentro do Gibbs (M2P)

- Simular $\zeta_i^{(t)} \sim g(\zeta_i | \theta^{(t)}, \mathbf{y}_{..})$ (condicional completa), para $i = 1, \dots, I$ independentemente, considerando como priori

$f(\zeta_i | \tau_i) \equiv \log - normal(a_i | \mu_{a_i}, \sigma_{a_i}^2) \times N(b_i | \mu_{b_i}, \sigma_{b_i}^2)$ através de :

- Simular $a_i^{(*)} \sim \log - normal(a_i^{(*)} | a_i^{(t-1)}, \psi_{a_i})$,
 $b_i^{(*)} \sim N(b_i^{(*)} | b_i^{(t-1)}, \psi_{b_i})$
- Calcular o vetor de probabilidades de aceitação $\zeta^{(t)} = \zeta^{(*)}$

$$\pi_i(\zeta^{(t-1)}, \zeta^{(*)}) = \min\{R_{\zeta_i}, 1\}$$

Algoritmo de Metropolis-Hastings dentro do Gibbs (M2P)

com

$$R_{\zeta_i} = \frac{L(\zeta_i^{(*)}, \theta^{(t)}) \exp \left\{ -\frac{(\ln a_i^{(*)} - \mu_{a_i})^2}{2\sigma_{a_i}^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{(b_i^{(*)} - \mu_{b_i})^2}{2\sigma_{b_i}^2} \right\}}{L(\zeta_i^{(t-1)}, \theta^{(t)}) \exp \left\{ -\frac{(\ln a_i^{(t-1)} - \mu_{a_i})^2}{2\sigma_{a_i}^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{(b_i^{(t-1)} - \mu_{b_i})^2}{2\sigma_{b_i}^2} \right\}} \\ \times \frac{[a_i^{(*)}]^2 \exp \left\{ -\frac{(\ln a_i^{(*)} - a_i^{(t-1)})^2}{2\psi_{a_1}^2} \right\}}{[a_i^{(t-1)}]^2 \exp \left\{ -\frac{(\ln a_i^{(t-1)} - a_i^{(*)})^2}{2\psi_{a_1}^2} \right\}}$$

(c) Aceitar cada $\zeta_i^{(t)} = \zeta_i^{(*)}$ com probabilidade π_i , caso contrário $\zeta_i^{(t)} = \zeta_i^{(t-1)}$

Algoritmo de Metropolis-Hastings dentro do Gibbs (M3P)

- Simular $\zeta_i^{(t)} \sim g(\zeta_i | \theta^{(t)}, \mathbf{y}_{..})$ (condicional completa), para $i = 1, \dots, I$ independentemente, considerando como priori

$$f(\zeta_i | \tau_i) \equiv \log - normal(a_i | \mu_{a_i}, \sigma_{a_i}^2) \times N(b_i | \mu_{b_i}, \sigma_{b_i}^2) \times Beta(c_i | \alpha_i - 1, \beta_i - 1)$$

através de :

- (a) Simular $a_i^{(*)} \sim \log - normal(a_i^{(*)} | a_i^{(t-1)}, \psi_{a_i})$,
 $b_i^{(*)} \sim N(b_i^{(*)} | b_i^{(t-1)}, \psi_{b_i})$ e
 $c_i^{(*)} \sim Beta(c_i^{(*)} | s_i^{(t-1)} - 1, r_i^{(t-1)} - 1)$

- (b) Calcular o vetor de probabilidades de aceitação $\zeta^{(t)} = \zeta^{(*)}$

$$\pi_i(\zeta^{(t-1)}, \zeta^{(*)}) = \min\{R_{\zeta_i}, 1\}$$

com

$$\begin{aligned}
 R_{\zeta_i} &= \frac{L(\zeta_i^{(*)}, \theta^{(t)}) \exp \left\{ -\frac{(\ln a_i^{(*)} - \mu_{a_i})^2}{2\sigma_{a_i}^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{(b_i^{(*)} - \mu_{b_i})^2}{2\sigma_{b_i}^2} \right\}}{L(\zeta_i^{(t-1)}, \theta^{(t)}) \exp \left\{ -\frac{(\ln a_i^{(t-1)} - \mu_{a_i})^2}{2\sigma_{a_i}^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{(b_i^{(t-1)} - \mu_{b_i})^2}{2\sigma_{b_i}^2} \right\}} \\
 &\times \frac{[c_i^{(*)}]^{\alpha_i - 2 + s_i^{(t-1)} - 1} [a_i^{(*)}]^2 \exp \left\{ -\frac{(\ln a_i^{(*)} - a_i^{(t-1)})^2}{2\psi_{a_1}^2} \right\}}{[c_i^{(t-1)}]^{\alpha_i - 2 + s_i^{(*)} - 1} [a_i^{(t-1)}]^2 \exp \left\{ -\frac{(\ln a_i^{(t-1)} - a_i^{(*)})^2}{2\psi_{a_1}^2} \right\}} \\
 &\times \frac{\beta(s_i^{(*)} - 1, r_i^{(*)} - 1) [1 - c_i^{(*)}]^{\beta_i - 2 + r_i^{(t-1)} - 1}}{\beta(s_i^{(t-1)} - 1, r_i^{(t-1)} - 1) [1 - c_i^{(t-1)}]^{\beta_i - 2 + r_i^{(*)} - 1}}
 \end{aligned}$$

(c) Aceitar cada $\zeta_i^{(t)} = \zeta_i^{(*)}$ com probabilidade π_i , caso contrário $\zeta_i^{(t)} = \zeta_i^{(t-1)}$

Métodos bayesianos plenos

- Estimam todos os parâmetros simultaneamente
- Em geral, não requerem métodos de maximização numérica e executam as integrações de forma mais geral.
- Normalidade dos traços latentes é prescindível: flexibilidade na escolha de prioris.
- Implementação relativamente simples mesmo para modelos mais complexos.
- Demandam bastante esforço (tempo) computacional.
- Para a maioria dos modelos é facilmente, considerando ambos os algoritmos, a implementação no WinBUGS é relativamente simples.

Voltando ao Exemplo 1

- Espera-se observar dependência (correlação) entre as respostas de um mesmo indivíduo.
- A correlação linear de Pearson não é apropriada para se medir a dependência entre duas variáveis binárias (Nojosa, 2001).
- A correlação tetracórica é mais apropriada.
- Seja Y_{ij} como usual e Z_{ij} a variável latente subjacente à Y_{ij} , $Y_{ij} = I_{(Z_{ij} > \gamma_i)}$. A idéia é inferir a correlação entre $(Z_{ij}, Z_{i'j})$ através das variáveis $(Y_{ij}, Y_{i'j})$ (para mais detalhes veja (Nojosa, 2001) e (Divgi, 1979)).

Correlação tetracórica

- Sejam
 - $\pi_{ii'}$: proporção de indivíduos tais que $Z_{ij} > \gamma_i$ e $Z_{i'j} > \gamma_{i'}$
 - π_i : proporção de indivíduos tais que $Z_{ij} > \gamma_i$ (independentemente de $Z_{i'j}$).
 - $\pi_{i'}$: proporção de indivíduos tais que $Z_{i'j} > \gamma_{i'}$ (independentemente de Z_{ij}).
- Assume-se que $(Z_{ij}, Z_{i'j})$ segue uma distribuição normal bivariada padrão com correlação $\rho_{ii'}$.

Correlação tetracórica

- Portanto, podemos definir as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned}\pi_{ii'} &= \int_{\gamma_i}^{\infty} \int_{\gamma_{i'}}^{\infty} f(z_{ij}, z_{i'j}) dz_{ij} dz_{i'j} \\ \pi_i &= \int_{\gamma_i}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z_{ij}, z_{i'j}) dz_{ij} dz_{i'j} \\ \pi_{i'} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\gamma_{i'}}^{\infty} f(z_{ij}, z_{i'j}) dz_{ij} dz_{i'j}\end{aligned}$$

Correlação tetracórica

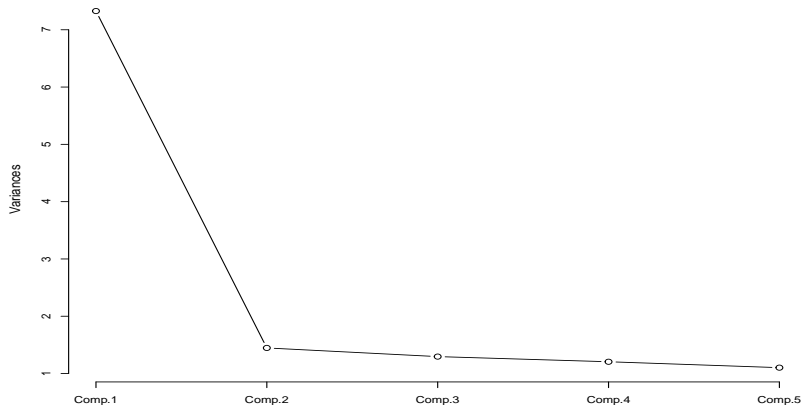
- As quantidades ρ_{ij} , γ_i e $\gamma_{i'}$ devem ser estimadas numericamente, com base em estimativas (proporções amostrais) das proporções de indivíduos que
 - $\hat{\pi}_{ii'}$: responderam corretamente aos dois itens.
 - $\hat{\pi}_{i\bar{i}'}$: responderam corretamente ao item i mas não ao item i' .
 - $\hat{\pi}_{\bar{i}i'}$: responderam corretamente ao item i' mas não ao item i .

através de métodos numéricos.

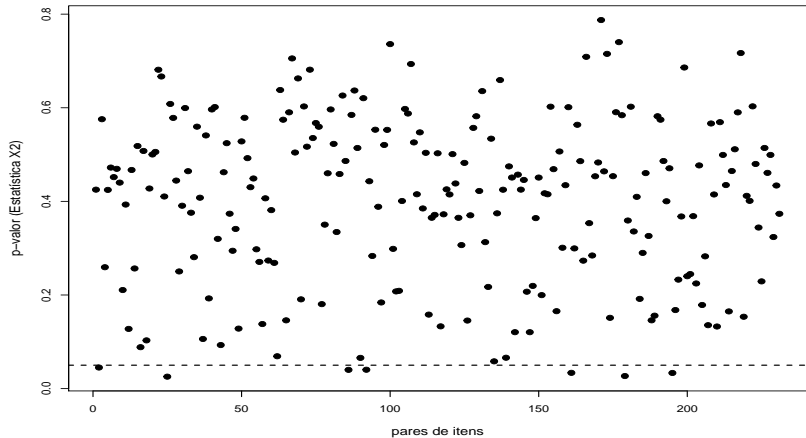
Exemplo 1

- Ajustou-se dois modelos de 3 parâmetros: unidimensional (M1) e multidimensional (M2), através do método perfilado-marginal bayesiano (M1) e bayesiano pleno (M2).
- Também, posteriormente, realizou-se uma análise do modelo M2 via mirt.
- Descrição das prioris: ver os programas.

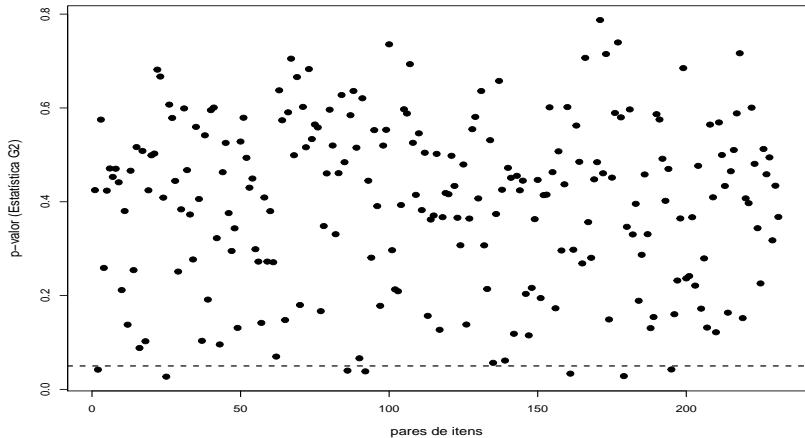
Auto-valores da matriz de correlação tetracórica



Estatística χ^2 (mirt) (Chen & Thissen, 1997)



Estatísticas G^2 (Chen & Thissen, 1997)



- Análise via método bayesiano pleno (WinBUGS).

- Priors:

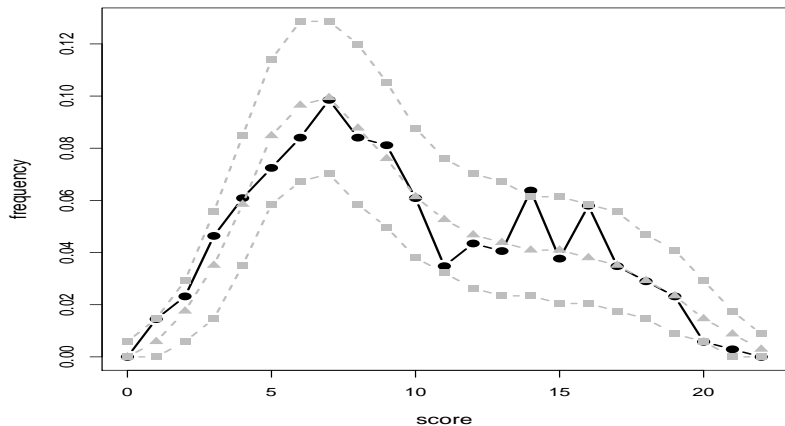
- $\theta_{jk} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1), \forall j, m.$

- $a_{im} \stackrel{i.i.d.}{\sim} LN(0, 4891; 0, 08296621) \forall i, m.$

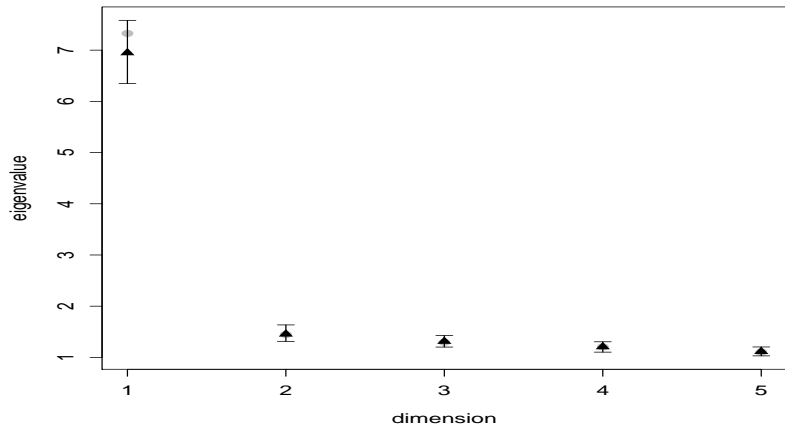
- $d_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 2).$

- $c_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{beta}(100, 340).$

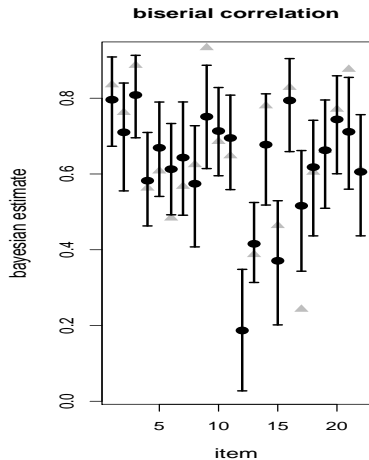
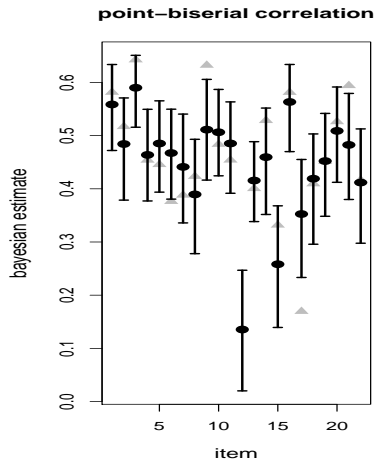
Distribuição observada e predita dos escores



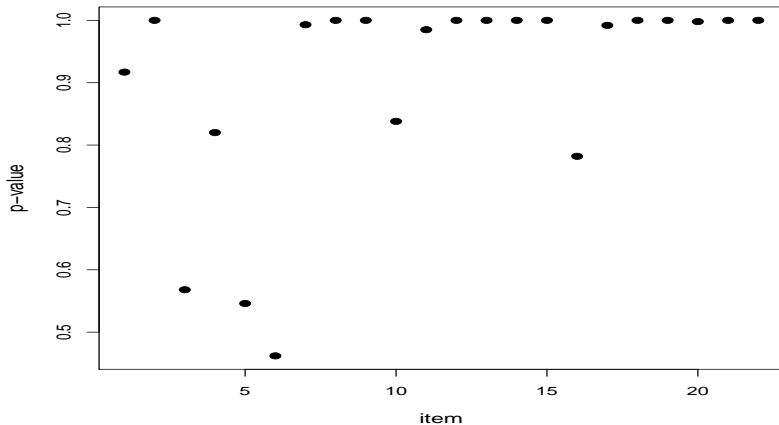
Auto-valores observados e preditos da MCT



CBIS e CPBIS observadas e previstas da MCT



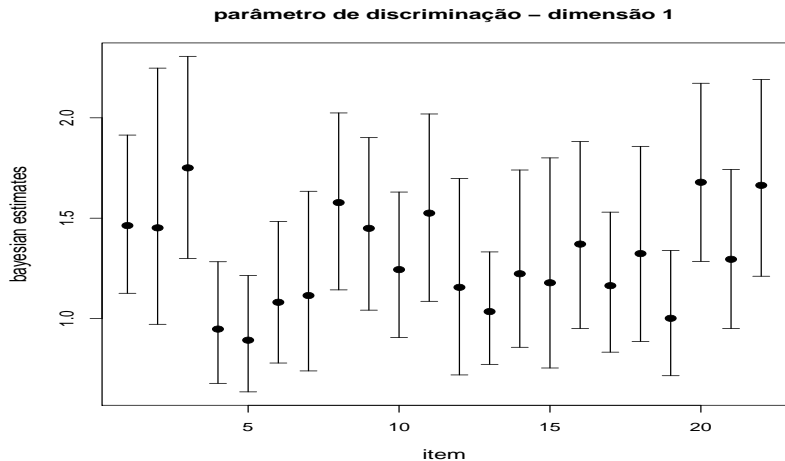
p-valores para as proporções observadas e previstas



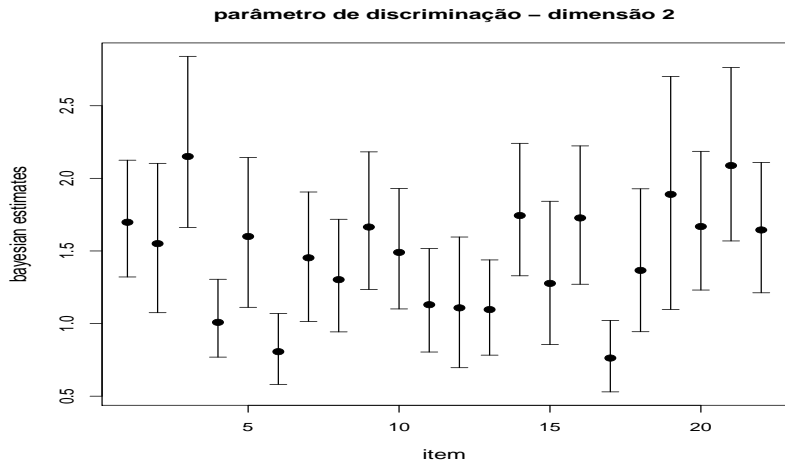
Proporções observadas e previstas

[http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/
ProbcorrectresponseModeloMult2S2017.pdf](http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/ProbcorrectresponseModeloMult2S2017.pdf)

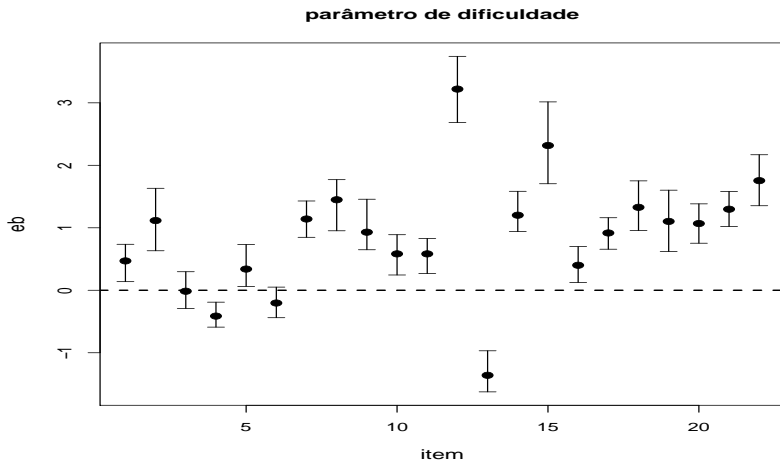
parâmetros do discriminação - dimensão 1



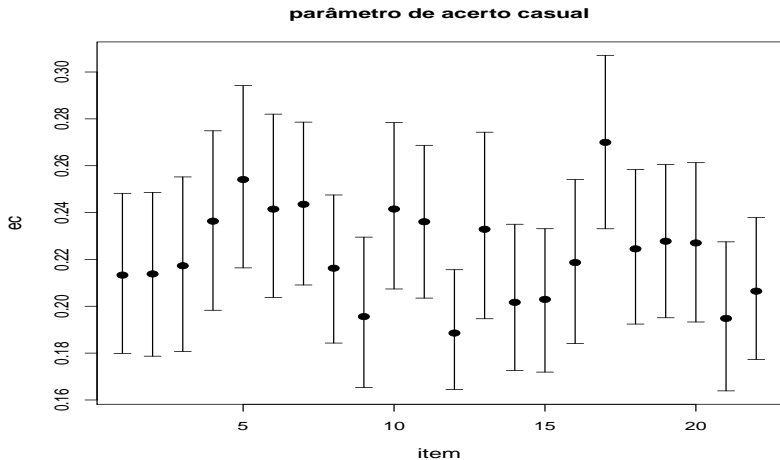
parâmetros do discriminação - dimensão 2



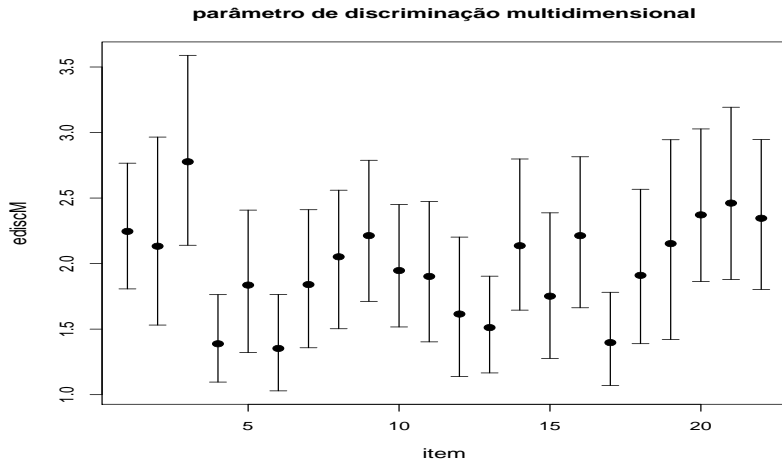
parâmetros de dificuldade



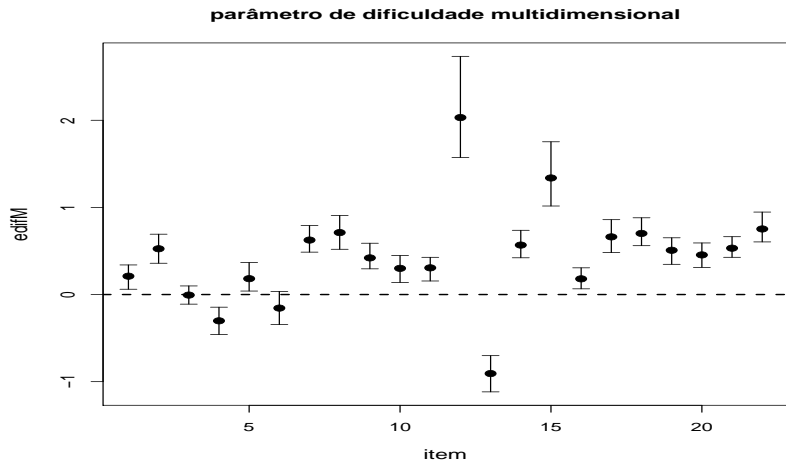
parâmetros de “acerto casual”



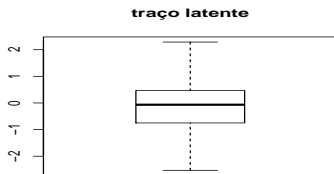
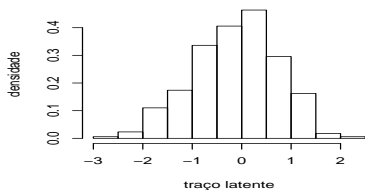
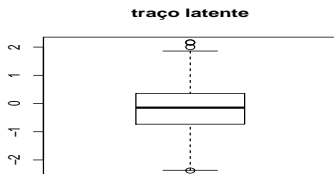
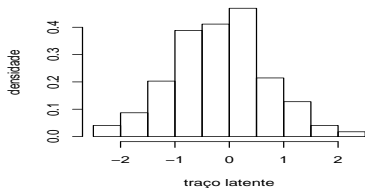
parâmetros de discriminação multidimensional



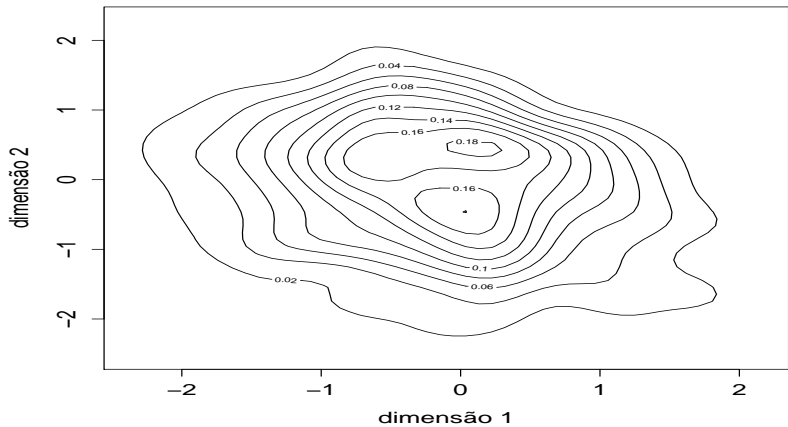
parâmetros de dificuldade multidimensional



traços latentes

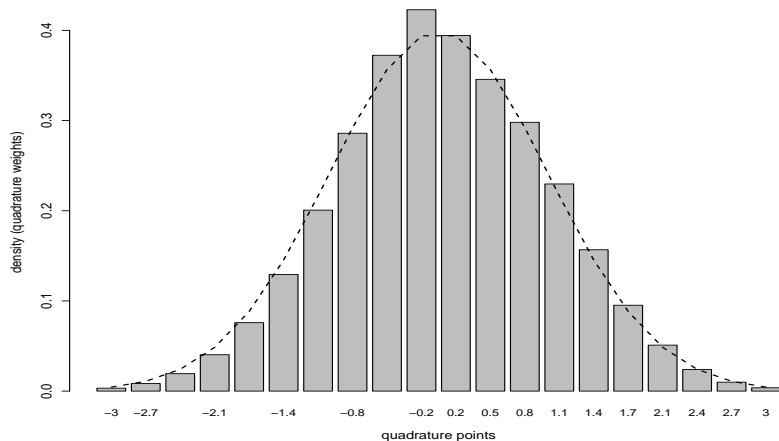


traços latentes

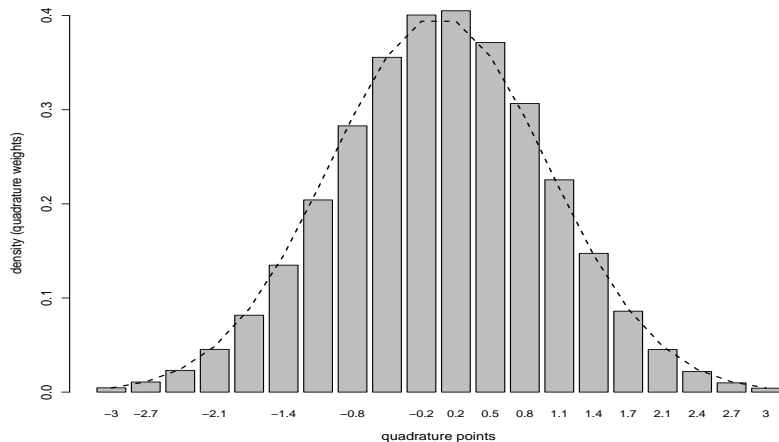


- Análise via método marginal-perfilado bayesiano (mirt).
- Priors:
 - $\theta_{jk} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1), \forall j, m.$
 - $a_{i1} \stackrel{i.i.d.}{\sim} LN(0, 4891; 0, 9024086) \forall i$
 - $a_{i2} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1) \forall i, \text{ com } a_{32} = 0.$
 - $d_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1).$
 - $c_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{beta}(5, 15).$
- As estimativas intervalares dos parâmetros de dificuldade de discriminação multidimensionais foram obtidas através do método bootstrap não paramétrico.

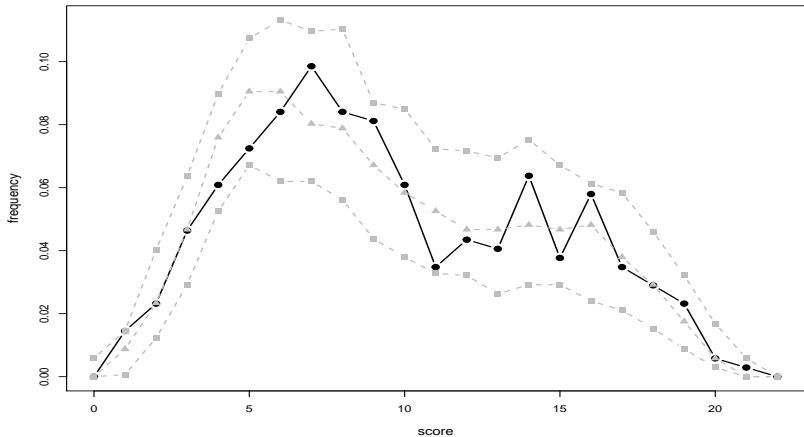
Distribuição dos traços latentes - dimensão 1



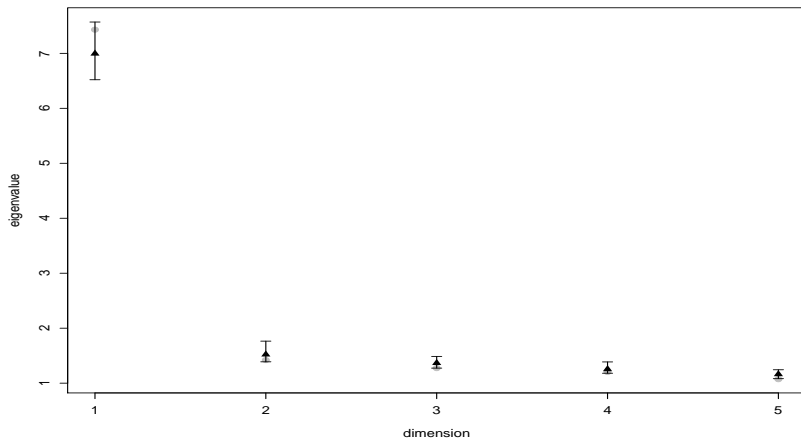
Distribuição dos traços latentes - dimensão 2



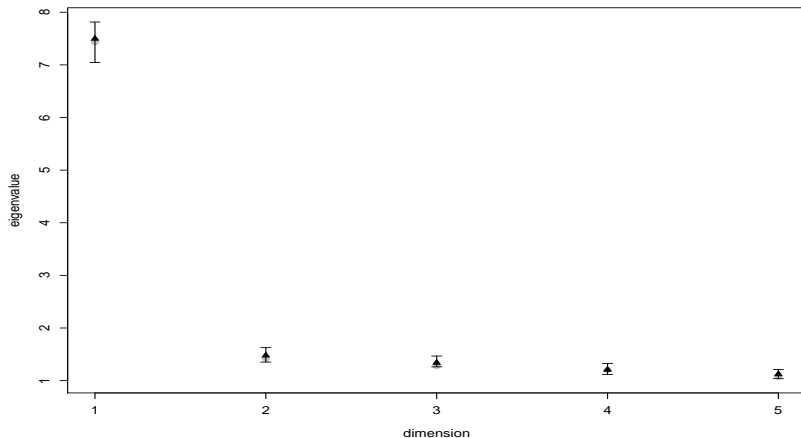
Distribuição observada e predita dos escores



Auto-valores observados e preditos da MCT (M1)



Auto-valores observados e preditos da MCT (M2)



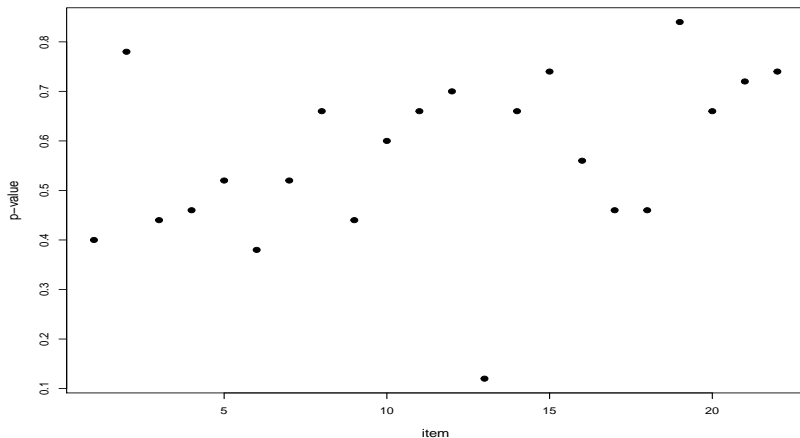
Probabilidades (em função das m-uplas) observadas e preditas

`http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/
FigureProbMModeloMult2S2017.pdf`

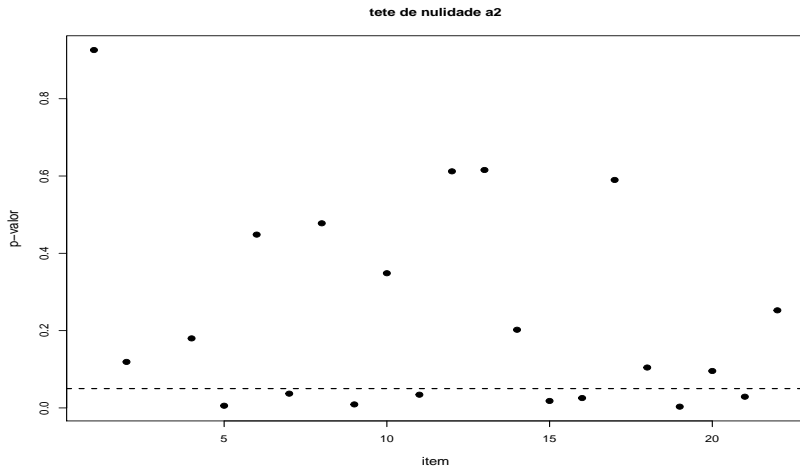
Proporções observadas e previstas

[`http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/`](http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/)
`FigurePropMModeloMult2S2017.pdf`

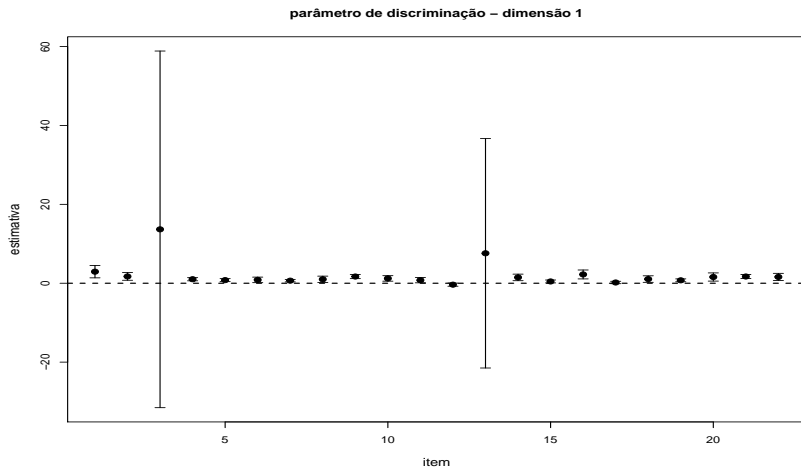
p-valores para as proporções observadas e previstas



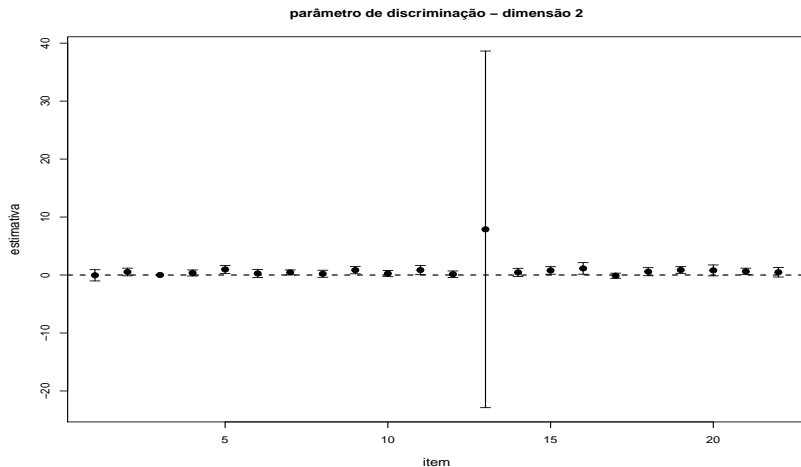
Testes de nulidade



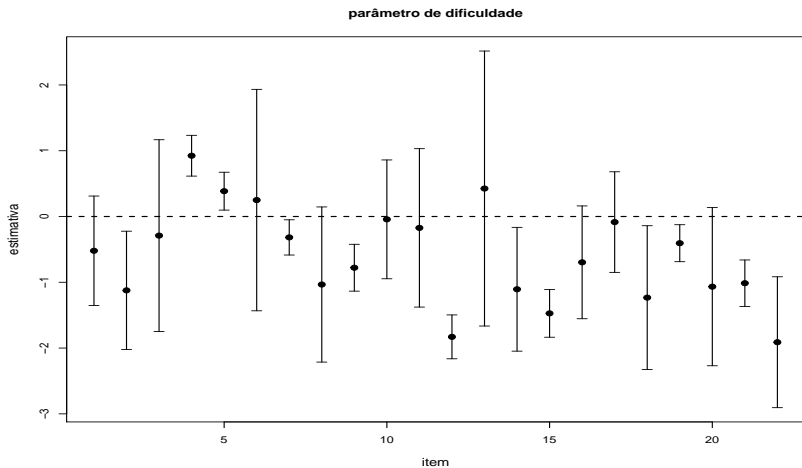
parâmetros do discriminação - dimensão 1



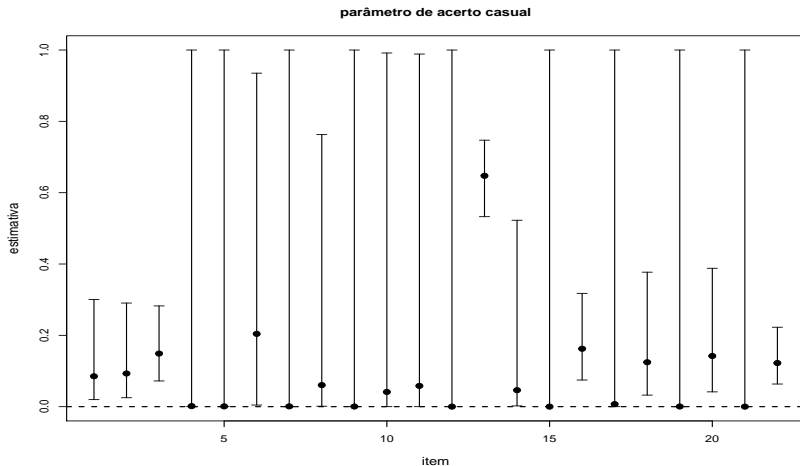
parâmetros do discriminação - dimensão 2



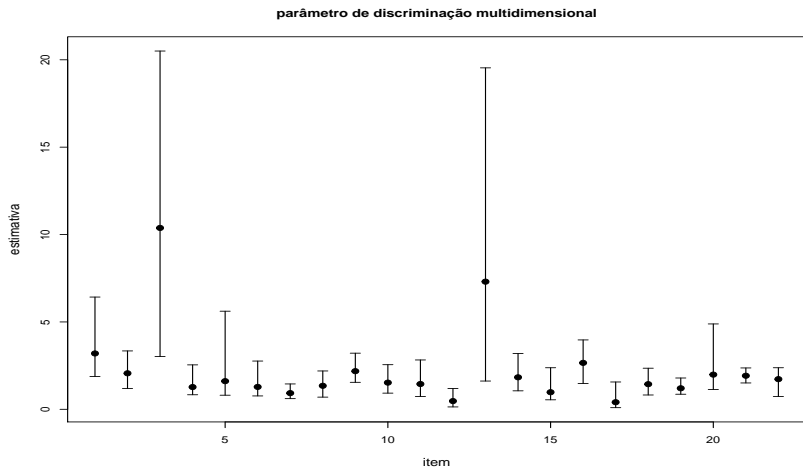
parâmetros de dificuldade



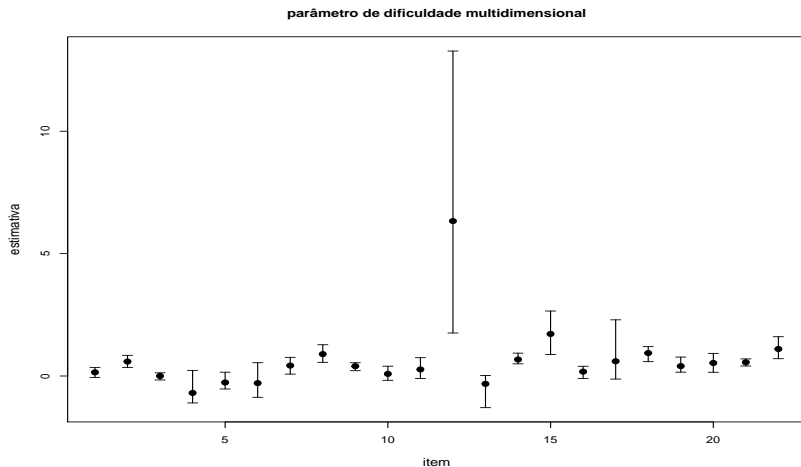
parâmetros de “acerto casual”



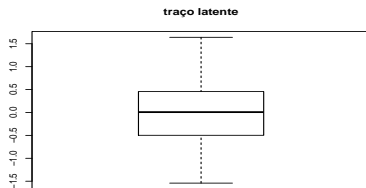
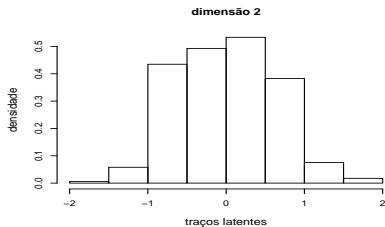
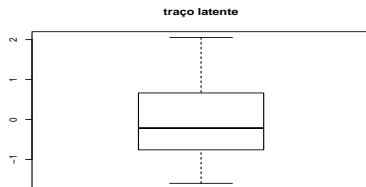
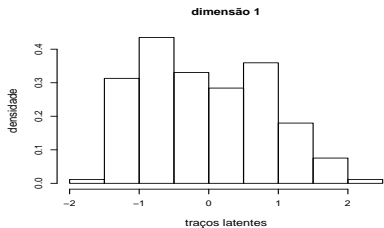
parâmetros de discriminação multidimensional



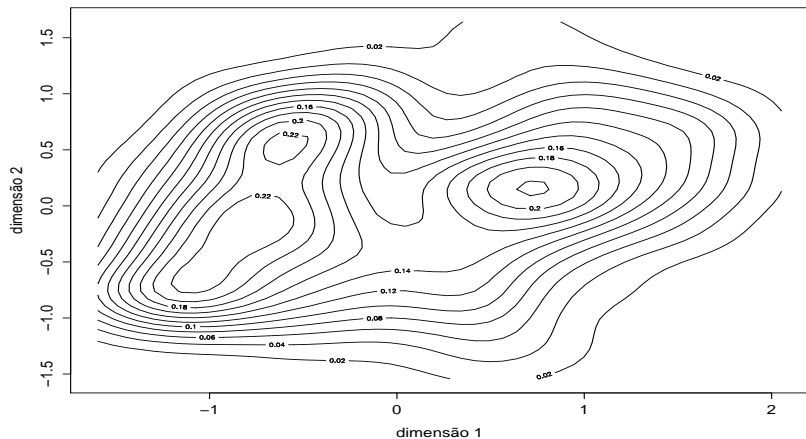
parâmetros de dificuldade multidimensional



traços latentes



traços latentes



Exercício

- Analisar os dados do PDE (instante 1) através de um modelo multidimensiona apropriado. Utilize os métodos marginal-perfilado e bayesiano pleno.