ME - 210 C Probabilidade I
Primeiro semestre de 2024
Lista de exercícios VI

1. Considere o experimento aleatório que consiste em jogar uma moeda honesta. Se a face observada for "cara", retira-se duas bolas, consecutivamente e sem reposição, de uma urna que contem 3 bolas brancas e 2 azuis, caso contrário (face observada "coroa"), retira-se duas bolas, consecutivamente e sem reposição, de uma urna que contem 1 bola branca e 3 azuis. Defina as seguintes variáveis aleatórias:

   - X: o resultado da moeda, sendo 1 se cara e 0, caso contrário.
   - $Y_i$: o número de bolas azuis observadas se a urna i for sorteada, i =1,2.
   - Z: o número de total de bolas brancas observadas.

   Responda os itens abaixo:

   a) Encontre as distribuições de $X$ e $Y_i, i = 1, 2$.
   b) Calcule os valores esperados e as variâncias de cada uma das variáveis do item a).
   c) Encontre a distribuição de $Z|X = x$. Calcule $\mathcal{E}(Z|X = x)$ e $\mathcal{V}(Z|X = x)$
   d) Encontre a distribuição de $Z$.
   e) Calcule o valor esperado e a variância de $Z$ pelas definições bem como utilizando a esperança e a variância condicional encontradas no item c). Os resultados são os mesmos? Isso é esperado?

2. Com relação à questão anterior, responda os itens abaixo considerando $(X, Y_1, Z)'$, $(X, Y_2, Z)'$, $(X, Y_1, Y_2)'$, $(Y_1, Y_2, Z)'$.

   a) Encontre as distribuições conjuntas trivariadas.
   b) Encontre as distribuições conjuntas bivariadas.
   c) Encontre as distribuições marginais univariadas.
   d) Encontre as distribuições condicionais de cada componente dada as outras duas.
   e) Encontre todas as distribuições condicionais bivariadas dada a outra componente.
   f) Calcule as esperanças,variâncias e fgm's das distribuições dos itens c) e d).
   f) Calcule as covariâncias e correlações das distribuições dos itens b) e e).

3. Seja o seguinte vea. trivariado $\boldsymbol{Z} = (X, Y, V)'$, cuja respectiva fdp conjunta é dada na Tabela a seguir. Responda os itens abaixo.

| | | V | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | | 1 | |
| | | X | | | |
| | | -1 | 1 | -1 | 1 |
| Y | -1 | 1/16 | 3/16 | 1/16 | 2/16 |
| | 0 | 2/16 | 2/16 | 3/16 | 2/16 |

a) De que tipo é o ve. $\boldsymbol{Z}$?

b) Obtenha as distribuições marginais de $X$, $Y$ e $V$.

c) Calcule as esperanças e variâncias de $X$, $Y$ e $V$.

d) Obtenha as distribuições conjuntas de $(X, Y)'$, $(X, Z)'$ e $(Y, Z)'$.

d) Calcule as covariâncias e as correlações entre $X$ e $Y$, $X$ e $V$ e $Y$ e $V$.

e) As componentes do vetor $\boldsymbol{Z}$ são mutuamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

f) Existe algum par de variáveis aleatórias de $\boldsymbol{Z}$ cujas componentes sejam mutuamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

g) Encontre as distribuições de $X|(Y = y, V = v)$, $Y|(X = x, V = v)$, $Z|(X = x, Y = y)$ e as respectivas esperanças e variâncias.

h) Encontre as distribuições de $X|Y = y$, $X|V = v$, $Y|X = x$, $Y|V = v$, $V|X = x$, $V|Y = y$.

i) Encontre as distribuições de $(X, Y)|V = v$, $(X, V)|Y = y$, , $(Y, V)|X = x$.

j) Calcule as esperanças e variâncias das distribuições dos itens g) e h).

l) Calcule as covariâncias e correlações das distribuições do item i).

4. Seja $\boldsymbol{Z} \sim$ Trinomial$(n, p_1, p_2)$. Responda os itens:

a) Encontre a f.g.m. de $\boldsymbol{Z}$.

b) Encontre a f.g.m. de X e de Y.

c) Identifique a distribuição de X e de Y através de suas respectivas f.g.m.'s.

d) Calcule $Cov(X, Y)$ e $Corre(X, Y)$ utilizando a f.g.m de $\boldsymbol{Z}$.

5. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a distribuição das seguintes variáveis aleatórias: $Y = |X|$, $Z = \exp(X)$ e $V = X^2$. Encontre a esperança e a variância de cada uma delas através das propriedades vistas em sala bem como através das distribuições que você encontrou.

6. **Aproximação da distribuição Binomial pela Normal**. Seja $X \sim \text{Binomial}(n, p)$. Sabe-se que $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}} \approx N(0, 1)$, se $n \to \infty$. Ou seja, a distribuição da Binomial pode ser aproximada pela distribuição normal, sob certas condições. Calcule as seguintes probabilidades: $P(X \leq 10)$, $P(X \geq 7)$ e $P(7 \leq X \leq 10)$ usando a distribuição de X e também a distribuição de $Z$, nos seguintes casos (sugestão: use um programa de computador de sua preferência).

   a) n= 15 , p =1/2.
   b) n = 30 , p = 1/2.
   c) n= 15 , p =2/3.
   d) n = 30 , p = 2/3.
   e) Em quais situações a aproximação se mostrou melhor? Tal resultado era esperado? Justifique adequadamente sua resposta.

7. **Aproximação da distribuição Binomial pela Normal**. Seja $X \sim Binomial(n, p)$. Sabe-se que se $n \to \infty$ e $np \to \lambda$, então $X \approx Y$, $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Calcule as seguintes probabilidades: $P(X \geq 28)$, $P(X \leq 25)$ e $P(25 \leq X \leq 28)$, usando a distribuição de X e também a distribuição de $Y$, nos seguintes casos (sugestão: use um programa de computador de sua preferência):

   a) n= 30 , p =1/2.
   b) n = 30 , p = 1/2.
   c) n= 30 , p =1/5.
   d) n = 30 , p = 1/5.
   e) Em quais situações a aproximação se mostrou melhor? Tal resultado era esperado? Justifique adequadamente sua resposta.