ME 420 - Inferência Estatística II / ME 419 - Inferência
Primeiro semestre de 2011
Lista de Exercícios VI

OBS: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ e $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

OBS: Se nada for dito, o teste a ser construído deve ser exato (baseado em uma estatística da qual se utiliza da distribuição exata).

OBS: Teste assintótico = baseado em uma estatística da qual se utiliza da distribuição assintótica.

1. Resolva os exercícios deixados em sala.

2. Seja $Y_1, ..., Y_n$ uma amostra de variáveis independentes, tais que $Y_i \sim N(\beta_0 + x_i\beta_1, \sigma^2)$, em que x_i são variáveis não aleatórias e σ^2 é conhecido. Encontre o emv de $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1)$. Não é necessário provar que é ponto de máximo.

3. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2) \sim \text{Trinomial}(\theta_1, \theta_2), \theta_i \in (0,1), i = 1, 2$ e $0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$. Encontre o emv de $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$. Não é necessário provar que é ponto de máximo.

4. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Considere as hipóteses: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma_2 \neq \sigma_0^2$. Para tal consideramos o seguinte teste:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se,} \quad t = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq k \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
   Responda os itens:

   a) Calcule a distribuição da estatística do teste sob H_0.
   b) Obtenha a respectiva função poder.
   c) Encontre k tal que $\alpha = sup\alpha(\theta)$, para α fixado.
   d) Obtenha o p-valor associado ao teste.

5. Implemente o teste anterior considerando $n = 20, \sigma_0^2 = 8, s^2 = 7,1, \alpha = 0,01$. Obtenha suas conclusões comparando com o ponto crítico e utilizando p-valor. Calcule também o poder estimado.

6. Resolva a questão anterior considerando $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ e depois $\sigma^2 < \sigma_0^2$.

7. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1, ..., Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, mutuamente independentes com σ_1^2, σ_2^2 conhecidos. Considere o teste abaixo para testar $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta$, $\Delta \in (-\infty, \infty)$.

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se,} \quad t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \geq k \, \text{ou} \, \leq -k \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   a) Calcule a distribuição da estatística do teste sob H_0.
   b) Obtenha a respectiva função poder.
   c) Encontre k tal que $\alpha = sup\alpha(\theta)$, para α fixado.
   d) Com base na estatística do teste, encontre uma quantidade pivotal e construa IC com coeficiente de confiança γ, para $\mu_1 - \mu_2$.
   e) Obtenha o p-valor associado ao teste. Calcule também o poder estimado.

8. Implemente o teste anterior considerando $n = 20, m = 22, \overline{x} = 22,34, \overline{y} = 25,08, \sigma_1^2 = 8, \sigma_2^2 = 4, \Delta = 0, \alpha = 0,01$. Obtenha suas conclusões comparando com o ponto crítico e utilizando p-valor.

9. Resolva a questão anterior considerando $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

10. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1, ..., Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, mutuamente independentes. Suponha que as variâncias são desconhecidas, porém iguais. Considere o teste abaixo para testar $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta$, $\Delta \in (-\infty, \infty)$.

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se,} \quad t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y} - \Delta}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \geq k \, \text{ou} \, \leq k \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

em que $s_p^2 = \frac{(n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2}{n+m-2}$, $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$, $s_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2$.

a) Calcule a distribuição da estatística do teste sob H_0.

a) Calcule a distribuição da estatística do teste sob H_0.

b) Obtenha a respectiva função poder sob H_0.

c) Encontre k tal que $\alpha = \alpha(\theta_0) = P(\text{Rejeitar} H_0|\theta = \theta_0)$, para α fixado.

d) Com base na estatística do teste, encontre uma quantidade pivotal e construa IC com coeficiente de confiança γ, para $\mu_1 - \mu_2$.

e) Obtenha o p-valor associado ao teste.

11. Implemente o teste anterior considerando $n = 20, m = 22, \overline{x} = 22,34, \overline{y} = 25,08, s_x^2 = 16, s_2^2 = 12, \Delta = 0, \alpha = 0,05$. Obtenha suas conclusões comparando com o ponto crítico e utilizando p-valor. Calcule também o poder estimado.

12. Resolva a questão anterior considerando $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

13. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1, ..., Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, mutuamente independentes. Considere o teste abaixo para testar $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Para tal consideramos o seguinte teste:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se,} \quad t = \dfrac{\sigma_2^2 s_x^2}{\sigma_1^2 s_y^2} > k \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Calcule a distribuição da estatística do teste sob H_0.

b) Obtenha a respectiva função poder.

c) Encontre k tal que $\alpha = sup\alpha(\theta)$, para α fixado

d) Com base na estatística do teste, encontre uma quantidade pivotal e construa IC com coeficiente de confiança γ, para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

e) Obtenha o p-valor associado ao teste.

14. Implemente o teste anterior considerando $n = 30, m = 19, s_x^2 = 14, s_2^2 = 11, \alpha = 0,10$. Obtenha suas conclusões comparando com o ponto crítico e utilizando p-valor. Calcule também o poder estimado.

15. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a de $X \sim$ Bernoulli(θ). Baseado na distribuição assintótica do emv de θ encontre uma quantidade pivotal assintótica (qpa). Baseado nessa qpa proponha um teste (assintótico) para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Para esse teste:

    a) Calcule a distribuição assintótica da estatística do teste sob H_0.
    b) Obtenha a respectiva função poder (assintótica).
    c) Encontre k tal que $\alpha = sup\alpha(\theta)$, para α fixado.
    d) Obtenha o p-valor associado ao teste.

16. Implemente o teste anterior considerando $\overline{x} = 0,4, \theta_0 = 0,3, n = 32, \alpha = 0,01$. Obtenha suas conclusões comparando com o ponto crítico e utilizando p-valor. Calcule também o poder estimado.

17. Resolva a questão 15 considerando $X \sim$ gama(r, θ), com r conhecido.

18. Considere $\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_n$ uma a.a. de $\boldsymbol{X} \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$. Suponha que se deseja testar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Defina $Z_i = X_i - Y_i, i = 1, ..., n$. Para tal consideramos o seguinte teste:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se,} \quad t = \dfrac{\overline{z} - \mu_z}{\sqrt{s_z^2/n}} > k, \text{ ou } < -k \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

    $s_z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \overline{z})^2$ e $\mu_z = \mu_1 - \mu_2$.

    Responda os itens.

    a) Obtenha a distribuição de Z_i.
    b) Calcule a distribuição da estatística do teste sob H_0.
    c) Obtenha a respectiva função poder.
    d) Encontre k tal que $\alpha = sup\alpha(\theta)$, para α fixado.
    e) Obtenha o p-valor associado ao teste.

19. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X,

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens:

a) Obtenha um teste UMP de tamanho α para testar as hipóteses: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$. Calcule também sua função poder e o respectivo p-valor.

b) Mostre a inexistência de um teste UMP de tamanho α para testar as hipóteses: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0, \theta_0 > 0$.

c) Obtenha o TRV para testar as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0, \theta_0 > 0$. Calcule também sua função poder e o respectivo p-valor.

20. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X,

$$f_X(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens:

a) Encontre o e.m.v de $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ e sua respectiva distribuição assintótica.

b) Obtenha um teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$. Calcule também sua função poder e o respectivo p-valor.

c) Obtenha o TRV para testar as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0, \theta_0 > 0$. Calcule também sua função poder e o respectivo p-valor.

21. Os itens a seguir são referentes as questões 19 e 20. Você deve, com base nas informações dadas e nos testes UMP e TRV que você encontrou, calcular a estatística do teste e concluir se H_0 deve ou não ser rejeitada. Utilize as distribuições usuais, i.e, normal, t de student, qui-quadrado ou F. Calcule também o poder observado, com base na estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de interesse.

(a) Questão 19, n = 20, $\theta_0 = 1$, $\alpha = 0.01$, $\overline{x} = 3,90$.

(b) Questão 20, n = 50, $\theta_0 = 1$, $\alpha = 0.10$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+x_i) = 12,42$.

22. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de X, cuja distribuição é dada por

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\beta^\alpha \mathbb{1}_{(\beta,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta), \alpha, \beta > 0$$

considere β conhecido.

a) Obtenha um teste UMP para tester $H_0 : \alpha = \alpha_0$ vs $H_1 : \alpha > \alpha_0$. Calcule também sua função poder e o respectivo p-valor.

b) Obtenha o TRV para testar $H_0 : \alpha = \alpha_0$ vs $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$. Calcule também sua função poder e o respectivo p-valor.

23. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de $X \sim$ beta$(\theta, 1)$. Responda os itens:

a) Encontre o ENVUM de $\frac{1}{\theta}$.

b) Encontre um IC assintótico para μ^2 com coeficiente de confiança de aproximadamente γ.

c) Considere, adicionalmente, $Y_1, ..., Y_m$ uma aa de $Y \sim$ beta$(\mu, 1)$, independente de $X_1, ..., X_n$. Enconte o TRV para testar $H_0 : \theta = \mu$ vs $H_1 : \theta \neq \mu$.